Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

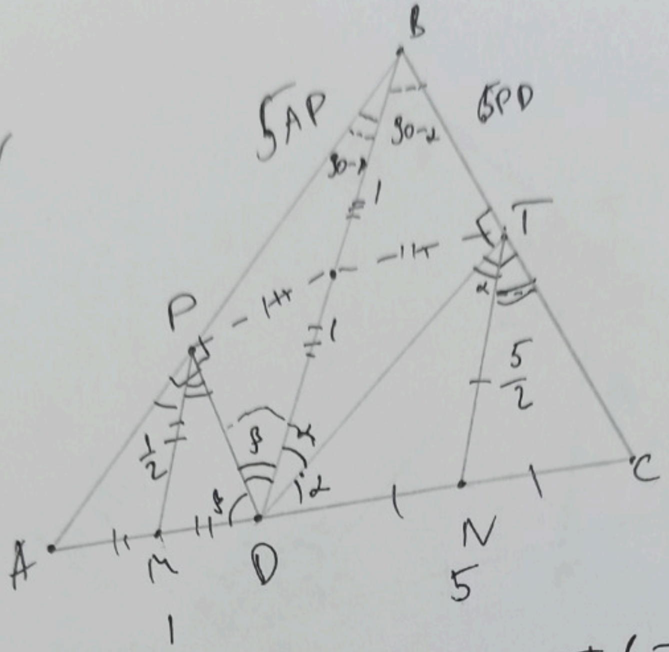
Шифр: **211006523**

ID профиля: **208011**

Вариант 9

Черновик

PM||TN

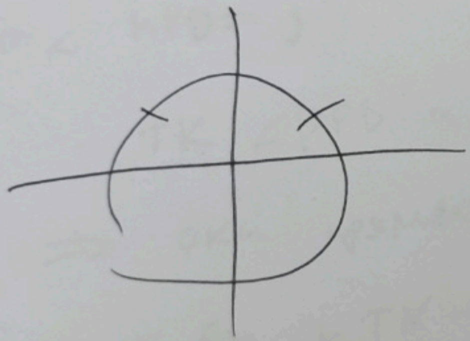


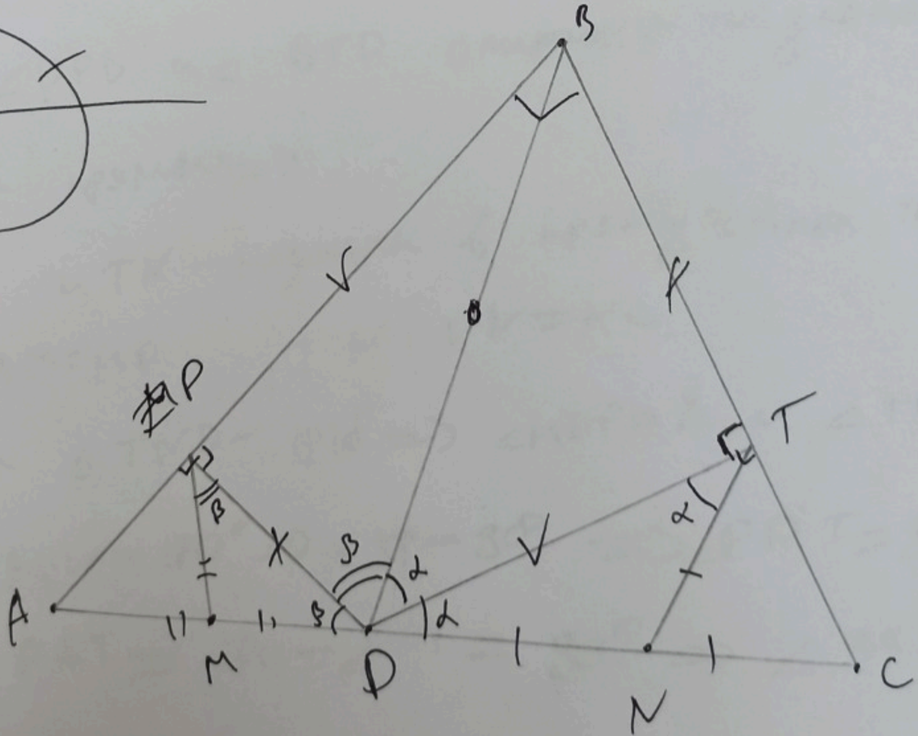
$\frac{AD}{DC}=\frac{PD}{TC}=\frac{1}{5}$

$TC=5PD$

$BT=PD$

$\Rightarrow BC=6PD$

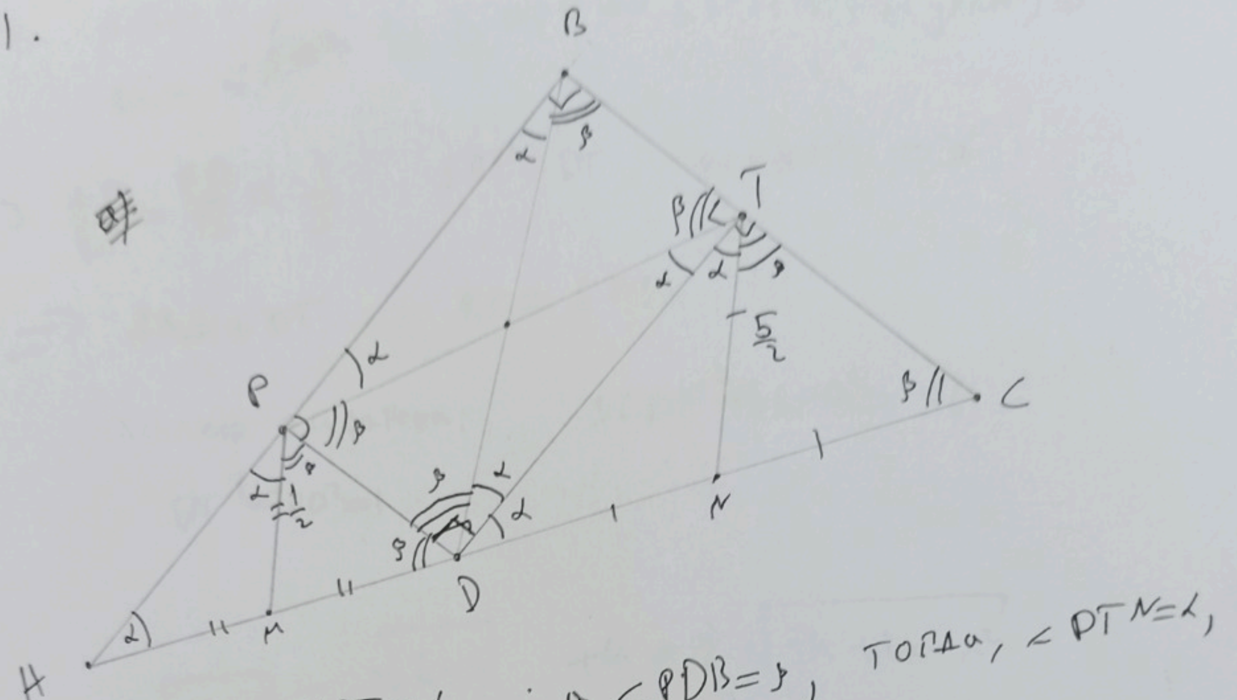




211006523 (U208011 M1275562)

Черновик

1.



а) пусть $\angle BDT = \alpha$; а $\angle PDB = \beta$, тогда, $\angle DTN = \alpha$,

а $\angle MPD = \beta$

ТК $\angle DPB$ и $\angle BTD$ опираются на диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ они прямые $\Rightarrow$

в прямоугольном треугольнике $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ТК PM и TN – медианы

$\Rightarrow PM = AM = MD$; $TN = DN = NC$

ΔPMD и ΔTND – р/б $\Rightarrow \angle MDP = \beta$ и $\angle TDN = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\beta + 2\alpha = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \angle PDT = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PBT = 180 - \angle PDT = 90^\circ \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$

б) ТК $BT = PD$ (PDBT – прямоугольник) и $DT = PB \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = PD + TC \quad AB = AP + DT$

Черновик

Т.к. $AD = 1$, $DC = 5$ $\Rightarrow$ и $\triangle APD \sim \triangle DTC$ (по 2-м углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AP}{DT} = \frac{PD}{TC} = \frac{1}{5}$ $\quad 5AP = DT$ $\quad TC = 5PD \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 6DT$ $\quad BC = 6PD$

по теор. пифагора: $\quad 36DT^2 + 36PD^2 = 36$

$DT^2 + PD^2 = 1$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24 + 2x - x^2}$$

$\frac{D}{4} = 1 + 24 = 25$

$\begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 6 \end{cases}$

$x_1 = \frac{-1+5}{-1} = -4$

$x \in [-4; 6]$

$x_2 = 6$

$(x+4)(\cancel{x-6})$

$x+4 \quad + 6-x \quad T$

$(\sqrt{x+4} + \sqrt{6-x})^2$

211006523 (U208011 M1275562)

Черновик

2. $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$

$-x^2+2x+24$

$\frac{D}{4}=1+24=25$ $\quad x_1=\frac{-1+5}{-1}=-4$

$x_2=\frac{-1-5}{-1}=6$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$\begin{cases} x\geq -4 \\ x\leq 6 \end{cases}$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+x+4+6-x-6-2\sqrt{(x+4)(6-x)}=0$

$(\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x})+(\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x})^2-6=0$

$(\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x})=t$

$t^2+t-6=0$

$D=1+24=25$

$t_1=\frac{-1+5}{2}=2$

$t_2=\frac{-1-5}{2}=-3$

1) $t=2$:

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=2$

$x+4+6-x-2\sqrt{(x+4)(6-x)}=4$

$10-4=2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$3^2=(x+4)(6-x)$

$6x-x^2+24-4x=9$

$-x^2+2x+15=0$

$\frac{D}{4}=1+15=16$

$x_1=\frac{-1+4}{-1}=-3$

$x_2=\frac{-1-4}{-1}=5$

2) $t=-3$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=-3$

$x+4+6-x-2\sqrt{(x+4)(6-x)}=9$

$1=2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$2\cdot 6x-2x^2+48-8x=1$

$-2x^2+4x+47=0$

$2x^2-4x-47=0$

$\frac{D}{4}=4+96=100$

$x_1=\frac{2+10}{2}=6$

$x_2=\frac{2-10}{2}=-4$

$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$26a^2 - (22x + 20y)a + \cancel{y^2} \dots = 0$ 26·5 26

$\begin{array}{r} 26 \\ \times\ 8 \\ \hline 208 \end{array}$ 104

$\frac{D}{4} = 121x^2 + 100y^2 + 220xy - 130x^2 - 208xy - 104y^2 =$

$= -9x^2 - 4y^2 + 12xy = -(3x - 2y)^2$

$26 \cdot \left(\frac{11x + 10y}{26}\right)^2 - 2(11x + 10y) \cdot \frac{(11x + 10y)}{26} + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$ $3x = \cancel{2y} - 2y$

$\frac{-(11x + 10y)^2}{26} + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$-121x$ $a =$

Черновик $\quad y=3x-4$

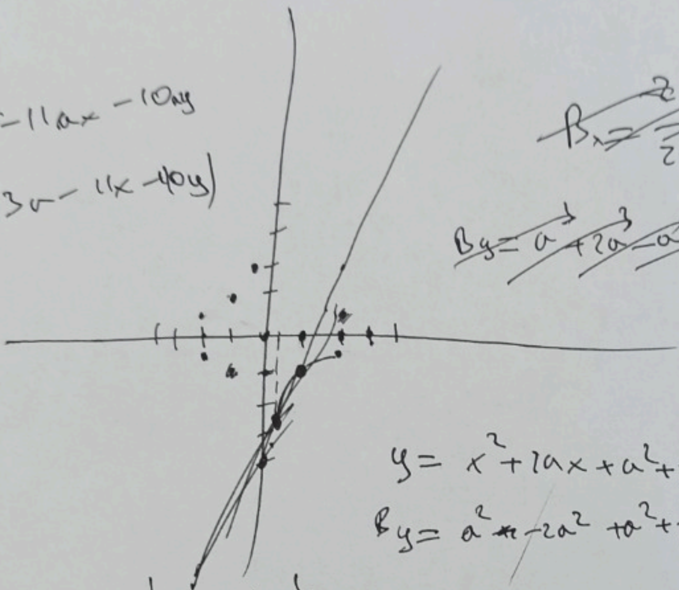
$a\neq 0$

$13a^2-11ax-10ay$

$a(13a-11x-10y)$

~~$B_x=\frac{-2a^2}{2a}=-a$~~

~~$B_y=a^3+2a^3-a$~~



$\boxed{B_x=\frac{-2a}{2}=-a}$

$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$

$B_y=a^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}$ $\quad B_y=\frac{1}{a}$ $\quad a\neq 0$

$y=\frac{1}{a}$ $\quad y=\frac{1}{-x}$

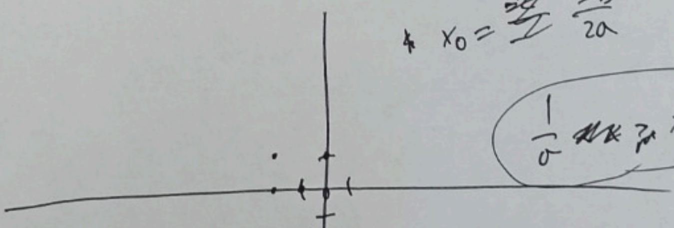
$\frac{x^2}{y^2}$

$x=-a$ $\quad y=x^2+2x+1=0$ $\quad (x+1)^2$

$\frac{D}{4}=16-20$

$x_0=\frac{-b}{2a}$

$\frac{1}{a} \geq x^2+2x+1$



$\frac{1}{a}=-3a-4$

$1=-3a^2-4a$

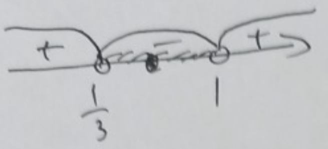
$3a^2+4a+1=0$

$D=16-12=4$

$a_1=\frac{-4+2}{6}=-\frac{1}{3}$

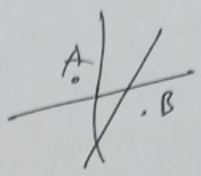
$a_2=\frac{-4-2}{6}=-1$

чистовик



$$\begin{cases} x \in \left(\frac{1}{3};1\right) \\ x \in \left(\frac{8}{3};+\infty\right) \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$$

б) B справа ~~(сверху)~~ (снизу) A слева (сверху)



$$\begin{cases} -\frac{1}{x} < 3x-4 \\ 1{,}5x > 3x-4 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{x} < 3x-4 \\ 1{,}5x < 4 \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{x} < 3x-4 \\ x < \frac{8}{3} \end{cases}$$

1) $x<0$

$-1 > 3x^2-4x$

$3x^2-4x+1<0$

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{1}{3};1\right) \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$$

2) $x \in \left(0;\frac{8}{3}\right)$

$3x^2-4x+1>0$

$$\begin{cases} x \in \left(0;\frac{1}{3}\right) \cup (1;+\infty) \\ x \in \left(0;\frac{8}{3}\right) \end{cases}$$

$x \in \left(0;\frac{1}{3}\right) \cup \left(1;\frac{8}{3}\right)$

3) $x=0 \Rightarrow a=0$:

$0-6-0+0+0+4y^2=0$

$y=0$

$0+0-0+0+1=0$

$1=0 \Rightarrow x \neq 0$

$x \in \left(0;\frac{1}{3}\right) \cup \left(1;\frac{8}{3}\right)$

$\Downarrow$

Ответ $a \in \left(-\frac{8}{3};-1\right) \cup \left(-\frac{1}{3};0\right)$

Чистовик

3. $26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$

$26a^2-2(11x+10y)\cdot a+5x^2+8xy+4y^2=0$

$\frac{D}{4}=121x^2+220xy+100y^2-130x^2-208xy-104y^2=$

$=-9x^2+12xy-4y^2=-(3x-2y)^2 \quad (3x-2y)^2\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{D}{4}\leq 0 \Rightarrow \quad 3x-2y=0 \quad 2y=3x \quad y=1{,}5x \Rightarrow$

~~⇒ т. А описывается уравнением~~

~~ax~~

$a_{\pm}=\frac{11x+10y\pm 0}{26}=\frac{11x+10y}{26}$

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$

$ay=ax^2+2a^2x+a^3+1$

1) $a=0$

$0=0+0+0+1$

$\Downarrow$

$a\neq 0$

2) $a\neq 0$

$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$

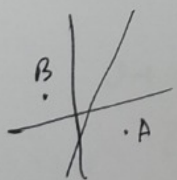
$B_x=\frac{-2a}{2}=-a \quad B_x=-a$

$B_y=a^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}$

$B_y=\frac{1}{a} \quad y=\frac{1}{a}$

$y=-\frac{1}{x}$

$y=3x-4$



а) B слева (сверху) A – справа (снизу)

$\begin{cases}-\frac{1}{x}>3x-4\\ 1{,}5x<3x-4\end{cases} \quad \begin{cases}-\frac{1}{x}>3x-4\\ 1{,}5x>4\end{cases} \quad \begin{cases}-1>3x^2-4x\\ x>\frac{8}{3}\end{cases} \quad \begin{cases}3x^2-4x+1<0\\ x>\frac{8}{3}\end{cases}$

$\frac{D}{4}=4-3=1 \quad x_1=\frac{2+1}{3}=1 \quad x_2=\frac{1}{3} \quad 3\cdot(x-1)(x-\frac{1}{3})$

3

211006523 (U208011 M1275562)

Чистовик

2. $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4+x+4-4+6-x-6-2\sqrt{(x+4)(6-x)}=0$

$(\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x})+4-4-6+(\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x})^2=0$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=t$

$t-6+t^2=0 \qquad t^2+t-6=0$

$D=1+24=25$

$t_1=\frac{-1+5}{2}=2$

$t_2=\frac{-1-5}{2}=-3$

1) $t=2$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=2$

$\cancel{x+4=4+6-x+4\sqrt{6-x}}$

$\cancel{2x-6=4\sqrt{6-x}}$

$\cancel{x-3=2\sqrt{6-x}}$

$\cancel{x^2+9-6x=12-2x}$

$\cancel{x^2-4x-3=0}$

$\cancel{\frac{D}{2}=4+3}$

$x+4+6-x-2\sqrt{(x+4)(6-x)}=4$

$6-2\sqrt{(x+4)(6-x)}=0$

$(x+4)(6-x)=9$

$2x-x^2+24=9$

$-x^2+2x+15=0$

$\frac{D}{4}=1+15=16$

$x_1=\frac{-1+4}{-1}=-3$ Не подходит, тк t становится <0, а $t=2$

$x_2=\frac{-1-4}{-1}=5$

2) $t=-3$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=-3$

$10-2\sqrt{(x+4)(6-x)}=9$

$1=2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$4x-2x^2+48=1$

$2x^2-4x-47=0$

$\frac{D}{4}=4+94=98=2\cdot 49=(7\sqrt{2})^2$

$x_1=\frac{2+7\sqrt{2}}{2}$ Не подходит, тк обращает $t>0$, а $t=-3$

$x_2=\frac{2-7\sqrt{2}}{2}$

Ответ $x=5;\ \frac{2-7\sqrt{2}}{2}$

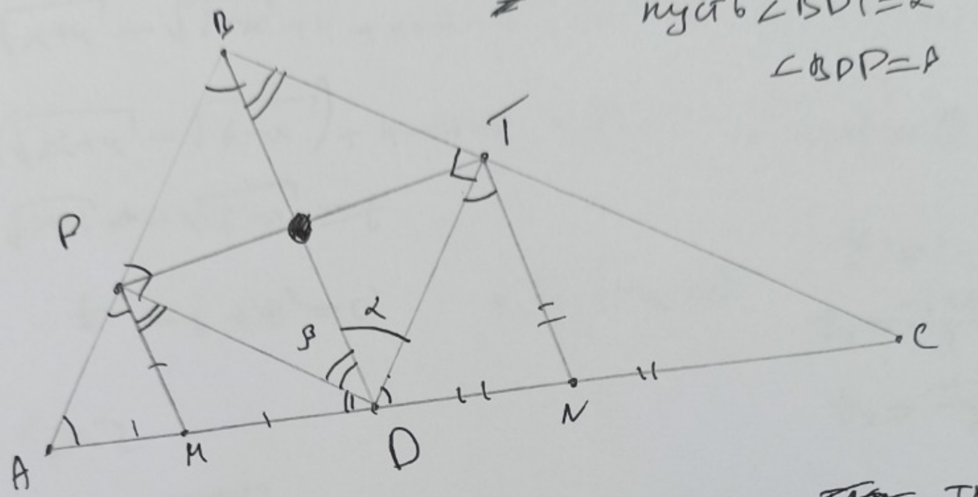
№1

Чистовик

ТК $\angle BTD$ и $\angle BPD$ опираются на диаметр $\Rightarrow$ они — прямые $\Leftrightarrow$

пусть $\angle BDT = \alpha$

$\angle BDP = \beta$



ТК $\triangle DTC$ и $\triangle APD$ — прямоугольные $\Rightarrow$ $TN = DN = NC$

$PM = AM = MD \Rightarrow \angle TDN = \angle DTN = \alpha$

$\angle MDP = \angle MPD = \angle\beta \Rightarrow 2\beta + 2\alpha = 180^\circ$ $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PDT = 90^\circ \Rightarrow \angle PBT = \angle ABC = 90^\circ$

Ответ $\angle ABC = 90^\circ$

$\cancel{AD = AD \cdot \sin\beta}$

$\cancel{PD = AD \cdot \cos\beta}$

$\cancel{PD = \frac{\cos\beta}{2}}$

$\cancel{PD^2 = \cos^2\beta}$

~~теорем косинусов:~~

$\cancel{PD^2 = PM^2 + MD^2 - 2PM \cdot MD \cdot \cos\angle PMD}$

$\cancel{PD^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{2}{4} \cdot \cos(180 - 2\beta)}$

$\cancel{PD^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos 2\beta}$

$\cancel{PD^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos^2\beta - \frac{1}{2}\sin^2\beta}$

$\cancel{\cos^2\beta = \frac{1}{2} + \frac{\cos^2\beta}{2} - \frac{\sin^2\beta}{2}}$

$\cancel{\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta}$

1

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006523**

ID профиля: **208011**

Вариант 9

$m^2-2m+1=0$ Черновик

$(m-1)^2=0$ $y^2=1$ $y=\pm 1$

$x^2=1$

Черновик

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=5 \end{cases} \quad x^2+y^2=t \quad x^2y^2=k$$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{t}+k=2 \\ t^2+k=5 \end{cases} \quad k=2-\frac{2}{t}$$

$$t^2+2-\frac{2}{t}=5$$

$$t^2-3-\frac{2}{t}=0 \quad t^2-3t-2=0 \quad \cancel{D=9+8=17}$$

	1	0	-3	-2	
1	1	1	-2	-4	x
-1	1	-1	-2	0	v
-1	1	-2	0		v

$$(t+1)^2\cdot(t-2)=0$$

$$t=2$$

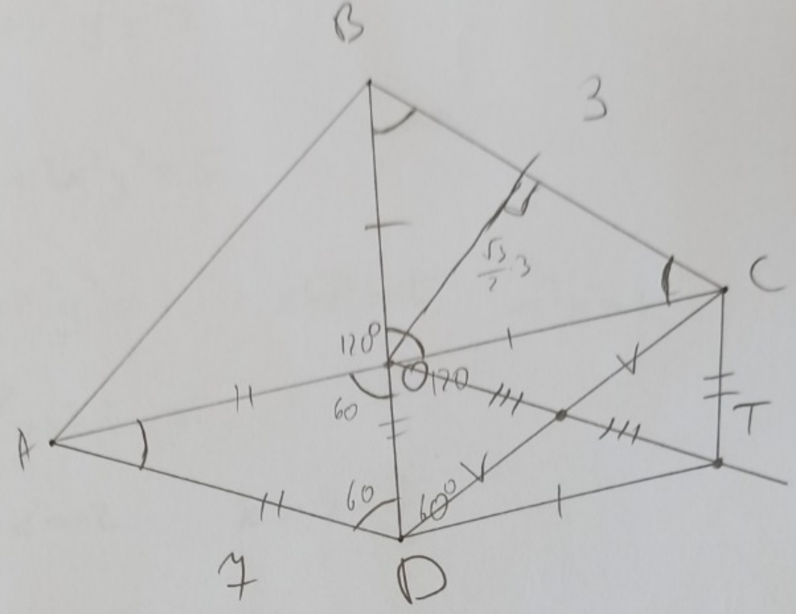
$$4+k=5 \quad k=1$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \end{cases} \quad \cancel{x^2+y^2+2x^2y^2=4}$$

$$x^2=\frac{1}{y^2} \quad \frac{1}{y^2}+y^2=2 \quad y^4-2y^2+1=0$$

211006523 (U208011 M1275563)

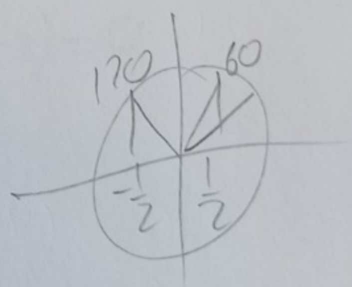
Черновик



$(7+3) \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\times \frac{49}{7}$

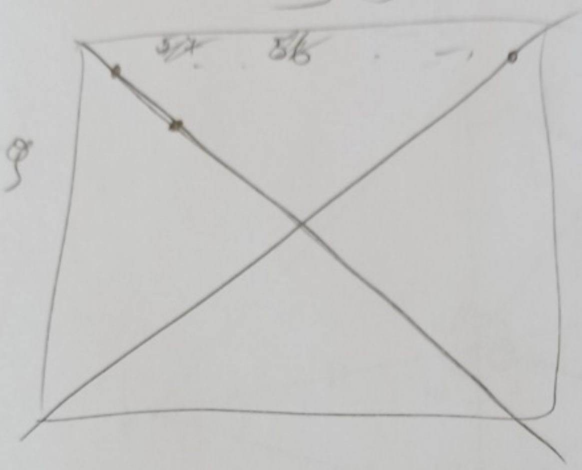
343



211006523 (U208011 M1275563)

60 черновик

~~59~~ 58

59 

56
58×58
464
2900
3364 −116 =
= 3248

58·58

57 57

1) 2 узла лежат

58

58 

$58+58 = \frac{116\cdot 115}{2} =$

$\frac{116\cdot 2}{2}$

$\frac{116\cdot 113}{2} = 58\cdot 113$

2) 1 узел лежит

116 · ~~3248~~ 3246

58 · 113

58×113
174
580
5800
6554

58×58
464
2900
3364

C
3134×116
18804
31340
313400
363544
+ 6554
370098

211006523 (U208011 M1275563)

Черновик Черновик

4. $\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ x^4+y^4+3y^2x^2=5 \end{cases}$ x и $y \neq 0$ одновременно

$\begin{cases} 2+x^4y^2+y^4x^2=2x^2+2y^2 \\ (x^2+y^2)^2+y^2x^2=5 \end{cases}$

$x^2+y^2=t$ $t^2=x^4+2x^2y^2+y^4$

~~$x^2=t-y^2$~~

~~$y^2x^2=y$~~

~~$x+y=t$~~ $xy=t$ $x=\frac{t}{y}$ $\frac{t}{y}+y=\frac{t+y^2}{y}$

$\begin{cases} \frac{2}{t}+k=2 \\ (t)^2+k=5 \end{cases}$

$\begin{cases} 2+tk=2t \\ t^2-5=k \end{cases}$

$2+t^3-5t=2t$

$t^3-7t+2=0$

	1	-7	0	2
2	1	-5		
1	1	-6	-6	-4

$t^2-\frac{2}{t}=3$

$t^3-2-3t=0$

$t^3-3t-2=0$

	1	0	-3	-2
2	1	2	1	0 ✓

$(t-2)(t^2+2t+1)=0$

$(t-2)(t+1)^2=0$

$x^2+y^2=2$

$x^2=-y^2+2$

$4-y^4+y^2=5$

$y^4-y^2+1=0$

$x^2-x+1=0$

211006523 (U208011 M1275563)

Чистовик

№4

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4 + 3x^2y^2 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5 \end{cases} \qquad x^2+y^2 \neq 0$$

$$x^2+y^2 = t \qquad \begin{cases} \frac{2}{t} + k = 2 \\ t^2 + k = 5 \end{cases} \qquad t \neq 0$$

$$x^2y^2 = k$$

$$t^2 - \frac{2}{t} = 3 \qquad t^3 - 3t \cancel{\;} - 2 = 0$$

	1	0	-3	-2	
1	1	1	-2	-4	x
-1	1	-1	-2	0	V
-1	1	-2	0	V	

$$(t+1)^2(t-2) = 0$$

$t \neq -1$, тк $x^2+y^2 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 2$

$$4 + k = 5 \qquad k = 1$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 2 \\ x^2y^2 = 1 \end{cases} \qquad y^2 = \frac{1}{x^2} \quad x^2 \neq 0, \text{ тк } x^2 \cdot y^2 = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = 0 \qquad x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$(x^2-1)^2 = 0;\ x^2 = 1;\ x = \pm 1 \Rightarrow 1 \cdot y^2 = 1 \quad y^2 = 1 \quad y = \pm 1$$

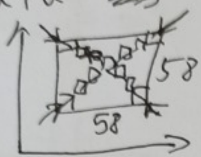
Ответить $x = \pm 1;\ y = \pm 1$

1

№5. Чистовик

Переформулируем условие, пусть место узлов будут клеточки, тогда ~~получи~~ у нас получится квадрат 58×58 клеток, и мы выбираем 2 клеточки:

$y=x$ и $y=59-x$, по сути диагонали нашего квадрата. Тогда есть только 2 ва



1) оба выбранных квадрата — лежат на диагоналях:

тогда кол-во способов $= \frac{116 \cdot 113}{2} = 58 \cdot 113 = 6554$

Общее число клеток

число клеток минус использованная (1) и те что лежат на одной гор. или верт. прямой (2)

:2 для избегания упорядочивания (выбор равнозначен)

2) только 1 кв. на диагонали:

кол-во способов $= 116 \cdot (58\times 58 - 116 - 114) =$

клетки на диагоналях

все клетки

клетки на диагоналях

клетки в одной строке или столбце

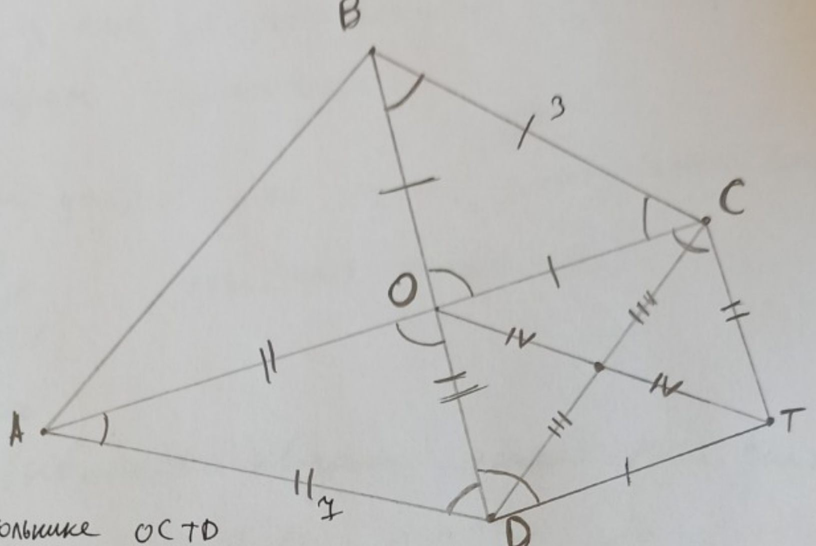
$= 116\cdot(3364 - 230) = 116 \cdot 3134 = 363544$

$363544 + 6554 = 370098$ Ответ 370098

2

Чистовик

№6.



а) ТК в 4-хугольнике OCTD диагонали т. пересечения делятся пополам => OCDT — параллелограмм

$CT = OD$ $OC = DT$

$\Rightarrow \angle OCT = \angle ODT = 180^\circ - \angle CTD = 180^\circ - \angle COD = 60^\circ$

$\angle COD = 120^\circ$ $\angle BOA = 120^\circ$ (как смежные с $\angle 60^\circ$)

ТК $AD = CT = AO$

$BC = BO = DT$

$\angle BOA = \angle ADT = \angle BCT = 120^\circ$ $\Big| \Rightarrow \triangle BOA = \triangle BCT = \triangle TDA \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ — правильный

ч.т.д.

б) $\dfrac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle ABC}} = \dfrac{OC}{AC} = 0{,}3$ $S_{\triangle BOC} = BC \cdot OC \sin 60^\circ \cdot \frac{1}{2} = 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3}{10} = \frac{27\sqrt{3}}{40}$

$\dfrac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle ADC}} = \dfrac{AO}{AC} = \dfrac{7}{10}$ $S_{\triangle AOD} = AO \cdot AD \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{1}{2} = 49 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$S_{\triangle ADC} = \frac{343\sqrt{3}}{40}$

3

$S_{ABCD} = \frac{(343+27)\sqrt{3}}{40} = \frac{370\sqrt{3}}{40} = \frac{37\sqrt{3}}{4}$

$S_{\triangle ABT} = AB \cdot BT \cdot \cancel{\cos 60^\circ} \sin 60^\circ \cdot \frac{1}{2}$

211006523 (U208011 M1275563)

чистовик

по теор. кос.:

$$AB^2 = OB^2 + AO^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos 120^\circ$$

$$AB^2 = 9 + 49 - 2 \cdot 21 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$AB^2 = 58 + 21 = 79 \qquad AB = \sqrt{79}$$

$$S_{ABT} = \sqrt{79} \cdot \sqrt{79} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{79\sqrt{3}}{4}}{\frac{37\sqrt{3}}{4}} = \frac{79}{37}$$

Ответ $\frac{79}{37}$

4

211006523 (U208011 M1275563)