Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

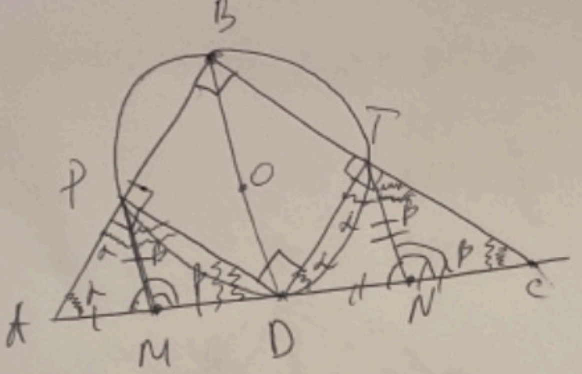
Шифр: **211006402**

ID профиля: **358993**

Вариант 9

Чистовик Лист N1

1.



Дано:
BD — диаметр
M — середина AD
N — середина CD
PM || TN.

а) Найти: ∠ABC

∠DPB = 90° (т.к вписанный угол опирается на диаметр)

и ∠DTB = 90° (по аналогичным соображениям)

т.к PM || TN, то ∠AMP = ∠DNT и ∠TNC = ∠PMD (как соответственные)

т.к ∠APD = 90° и AM = MD =>

PM — медиана в прямоуг. треуг. из угла 90°

=> PM = AM = MD

и аналогично TN = DN = NC (медиана в прямоуг. треуг из угла 90°)

=> ∠MAP = ∠APM = ∠NDT = ∠NTD

и ∠MDP = ∠MPD = ∠NTC = ∠NCT =>

=> Пусть ∠APM = α и ∠MDP = β =>

α + β = 90° т.к ∠DTN + ∠NTC = 90° =>

=> ∠PDT = 180° − (α + β) = 90° = 180° − (∠MDP + ∠TDN) = 90°.

=> ∠ABC = 90° т.к четырехугол. PBTD — вписан => ∠ABC = ∠PDT = 90°.

Ответ: 90°.

Чистовик Лист №2

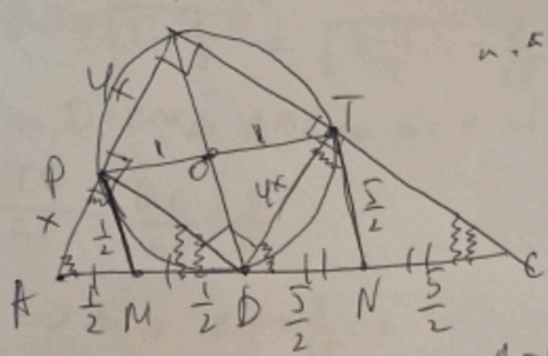
1.

б) Дополнительно дано:

$MP = \frac{1}{2}$

$NT = \frac{5}{2}$ $S_{ABC} - ?$

$BD = 2$



т.к $MP = \frac{1}{2} \Rightarrow$
$AM = \frac{1}{2} = MB$
$TN = \frac{5}{2} = DN = NC$

$\triangle APD \sim \triangle ABC$ т.к $\angle A$ - общий и $\angle \cancel{A}$ $\angle \cancel{APD} = 90^\circ$ и $\angle B = 90^\circ$

$\Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ Пусть $AP = x \Rightarrow AB = 5x \Rightarrow PB = 4x$

и $\angle AMP = \varphi$ Применим. Thr cos для $\triangle APM$:
$x^2 = AM^2 + MP^2 - 2AM \cdot MP \cdot \cos\varphi$

$x^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \cos\varphi$

$\cancel{\cos} -x^2 + \frac{1}{2} = +\frac{1}{2}\cos\varphi$

$\cos\varphi = 1 - 2x^2 \Rightarrow PD^2 = MD^2 + PM^2 - 2MD \cdot PM \cdot \cos(180^\circ-\varphi)$

$\Rightarrow PD^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \cos(180^\circ - \varphi)$

т.к $-\cos\varphi = \cos(180^\circ - \varphi) \Rightarrow$

$\Rightarrow PD^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos\varphi =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - x^2 = 1 - x^2$

Но $PD = BT$ и $DT = PB = 4x$ т.к в четырехугольнике все углы по $90^\circ \Rightarrow$ это как минимум прямоугольник $\Rightarrow BT^2 = 1 - x^2$, т.к $\angle ABC = 90^\circ \Rightarrow PT$ проходит через центр и является диаметром $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Применим Thr. Пифагора в треугольнике $\triangle PBT$: $\cancel{4} \cdot PT^2 = PB^2 + BT^2 \Leftrightarrow 4 = 16x^2 + 1 - x^2 \Rightarrow$ ~~...~~
$15x^2 = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

211006402 (U358993 M1275868)

Чистовик Лист N 3.

1.

б) (продолжение)

$x = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow AB = 5x = 5 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$. S_{ABC} - ?

$DT = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$PD = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{5-1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = BT$

$\because \triangle DTC \sim \triangle ABC$ т.к $\angle C$ общий и $\angle DTC = \angle ABC = 90^\circ$

$\Rightarrow \frac{TC}{BC} = \frac{DC}{AC} = \frac{5}{6}$

$\Rightarrow$ т.к $BT = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{TC}{TC + \frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{5}{6}$

$5TC + 2\sqrt{5} = 6TC$

$TC = 2\sqrt{5} \Rightarrow$

$BC = 2\sqrt{5} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AB = \frac{12}{\cancel{\sqrt{5}}} \cdot \cancel{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{6}$

Ответ: 6.

Ответ: а) 90°; б) 6.

Чистовик Лист №4.

2.

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$$

$$24+2x-x^2=(6-x)(x+4)$$

$$\begin{cases} x+4\geq 0 \\ 6-x\geq 0 \\ \cancel{x}+4+6\cancel{-x}-2\sqrt{(x+4)(6-x)}=\left(2\sqrt{(6-x)(x+4)}-4\right)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -4 \\ x\leq 6 \end{cases} \longrightarrow ОДЗ.$$

Пусть $\sqrt{(x+4)(6-x)}=t$, если $t\geq 0$

$\Rightarrow (6-x)(x+4)=t^2$

$$=4\left(\sqrt{(6-x)(x+4)}\right)^2-16\sqrt{(6-x)(x+4)}+16.$$

$$10-2\sqrt{(x+4)(6-x)}=4t^2-16t+16.$$

$$10-2t=4t^2-16t+16$$

$$2t^2-7t+3=0$$

$$D=7^2-4\cdot 6= =49-24=25$$

$$\sqrt{D}=5$$

$$\left[\begin{array}{l} t=\frac{7+5}{4}=3 \\ t=\frac{7-5}{4}=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\sqrt{(x+4)(6-x)}=3$$

$$\Rightarrow 24+2x-x^2=9$$

$$x^2-2x-15=0$$

$$\Rightarrow D=64$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-3 \end{array}\right.$$ – п.к после проверки.

$$24+2x-x^2=\frac{1}{4}$$

$$x^2-2x-\left(24-\frac{1}{4}\right)=0$$

$$x^2-2x-\frac{95}{4}=0$$

$$\Rightarrow D=4+95=99$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{2-3\sqrt{11}}{2} \\ x=\frac{2+3\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.$$ – п.к. н.к

тогда $2t-4=1-4=-3$

$\Rightarrow$ в квадрат нельзя возводить

Ответ: 5.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006402**

ID профиля: **358993**

Вариант 9

Вар. 9.

Лист N 1

Чистовик

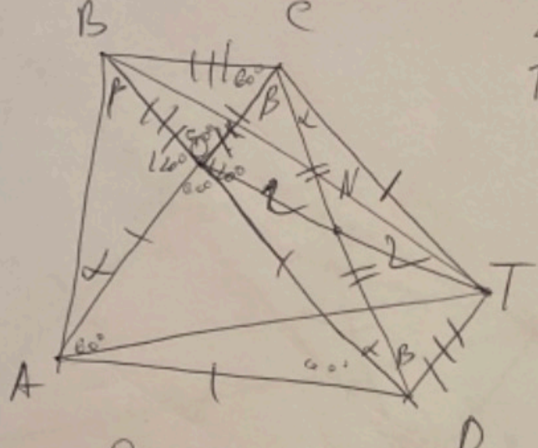
6.

Дано:

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – правильные

T симметрично O относительно N (середина CD.

а)



Достроим $OCTD$ до параллелограмма

т.к. $ON=NT$ (по условию) и $CN=ND$ (по условию)

$\Rightarrow$ т.к. $\angle COD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \angle OTD = 120^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OCT$ и $\angle ODT = 60^\circ$

$TD = CO$ и $CT = OD$; пусть $\angle OAB = \alpha$ и

$\angle ABO = \beta \Rightarrow$

$\angle OCD = \beta$ (т.к. $\triangle ABO = \triangle OCD$ (по двум сторонам и углу)

$\Rightarrow \angle ODC = \alpha \Rightarrow$

т.к. $OCTD$ – параллелограмм $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ODC = \angle DCT = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CDT = \angle OCD = \beta$, но если мы посмотрим $\triangle ABO$, то увидим, что тогда $\alpha + \beta = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADT = \angle BCT = 120^\circ$

Отсюда следует, что $\triangle ADT = \triangle BCT$ (по двум сторонам и углу между ними)

$\Rightarrow AT = BT$, но $\triangle ADT$ ~~BCT~~ $= \triangle ABO$ (тоже по двум сторонам и углу между ними) $\Rightarrow AT = AB \Rightarrow AT = AB = BT \Rightarrow \triangle ABT$ – правильн.

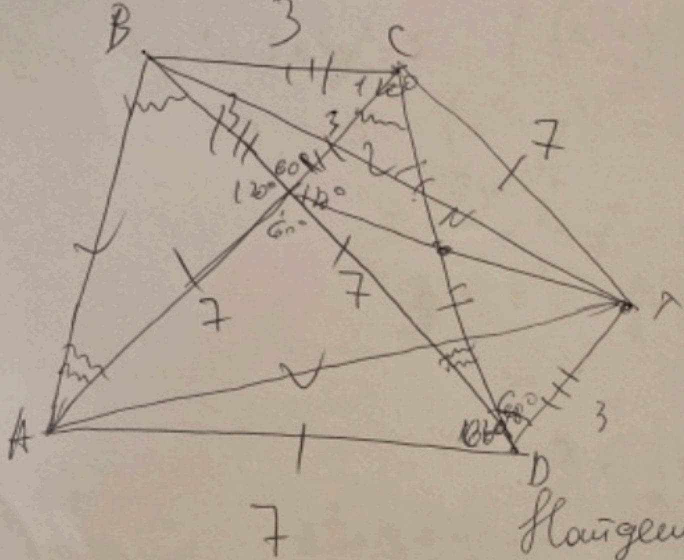
6. б)

Листовик

Лист 2

Дополнительно известно, что $BC=3$; $AD=7$

Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ — ?



Найдем $S_{\triangle ABT}$:

Найдем BT по Th cos через $\triangle BCT$

$$BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2BC\cdot CT\cdot\cos 120^\circ$$

$$BT^2 = 9+49+\cancel{42}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = 30+49$$

$$BT=\sqrt{79}$$

$S_{\triangle ABT} = \sqrt{p\cdot(p-BT)^3}$ = (формула герона)

где $p=\frac{3\sqrt{79}}{2}$ — полупериметр

$$= \sqrt{\frac{3\sqrt{79}}{2}\cdot\left(\frac{3\sqrt{79}}{2}-\sqrt{79}\right)^3} = \sqrt{\frac{3\sqrt{79}\cdot(\sqrt{79})^3}{2}\cdot(0{,}5)^3} = \sqrt{\frac{3(\sqrt{79})^4}{2^4}} = \frac{79}{4}\cdot\sqrt{3}$$

т.к. $AB=CD$ (т.к. $\triangle ABO=\triangle COD$ по двум сторонам и углу)

$\Rightarrow CD=\sqrt{79}$

$$S_{ABCD}=S_{ABO}+S_{BCO}+S_{COD}+S_{AOD} = \frac{AO\cdot BO\cdot\sin120^\circ}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2} + \frac{BO^2}{2}\cdot\sin 60^\circ + \frac{AO^2}{2}\cdot\sin60^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt3}{2}\left(21+\frac{9+49}{2}\right) = \frac{\sqrt3}{2}\cdot 50 = 25\sqrt3 \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79}{4}\cancel{\sqrt3}\cdot\frac{1}{25\cancel{\sqrt3}} = \frac{79}{100}$$

$\boxed{\text{Ответ: } \frac{79}{100}}$

211006402 (U358993 M1275869)

0 дней 00 часов 18 минут 22 секунды

4. Чистовик Лист №3

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2y^2 = 2 - \frac{2}{x^2+y^2} \Rightarrow \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 5 - (x^2+y^2)^2 = 2 - \frac{2}{x^2+y^2}$$

пусть

$\cancel{3\Rightarrow}$ $x^2+y^2 = t,\ t \geq 0$

$3 - t^2 = -\frac{2}{t}$ $\quad x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow$ домножим всё на t

$$3t - t^3 = -2$$

$$t^3 - 3t - 2 = 0$$

при $t=-1$ - верно

$$\begin{array}{l|l} t^3-3t-2 & t+1 \\ \underline{t^3+t^2} & t^2-t-2 \\ -t^2-3t & \\ \underline{-t^2-t} & \\ -2t-2 & \end{array}$$

$$(t+1)(t^2-t-2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-1 \text{ - п.к. т.к. } t \geq 0 \\ t = 2 \Rightarrow \\ t = -1 \text{ - п.к} \end{array}\right. \qquad t=2 \qquad \begin{array}{l} x^2+y^2 = 2 \\ y^2 = 2 - x^2 \end{array}$$

$$1 + (2-x^2)x^2 = 2$$

$$-x^4 + 2x^2 - 1 = 0$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

$$(x^2-1)^2 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$x = \pm 1 \Rightarrow$ $\quad x = 1 \Rightarrow y = \pm 1$

$x = -1 \Rightarrow y = \pm 1$

Ответ: $(1;-1); (1;+1); (-1;1); (-1;-1)$.