Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006394**

ID профиля: **900907**

Вариант 9

Чистовик

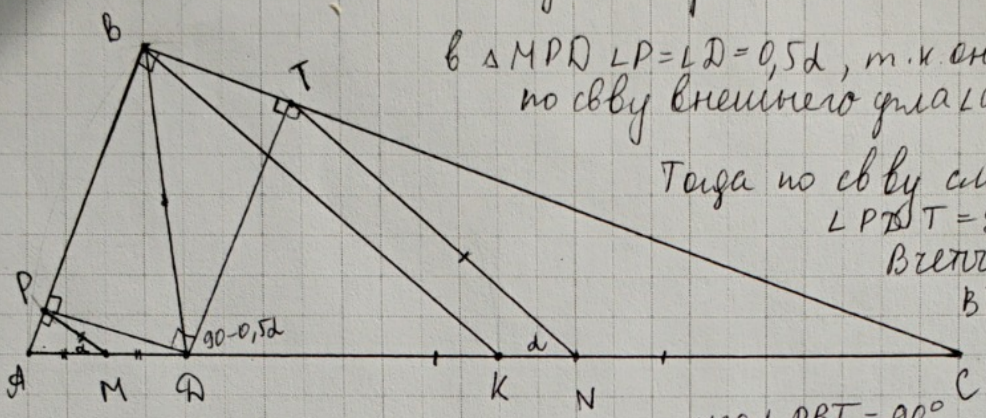
№1

а) $\angle BTD = \angle BPD = 90^\circ$, т.к. они опираются на диаметр. $\Rightarrow \angle DTC = \angle DPA = 90^\circ$ по св-ву смежных углов $\Rightarrow DN = NC = NT$ и $AM = MD = MP$ по св-ву медианы в прямоуг. Δ.

Пусть $\angle DNT = \alpha$. Тогда т.к. $MP \parallel TN$ по усл, то $\angle AMP = \alpha$ по св-ву $\parallel$ прямых (AC – секущая)

в ΔDNT $\angle D = \angle T = 90 - 0{,}5\alpha$, т.к. он р/б по опр и сумма углов $= 180^\circ$

в ΔMPD $\angle P = \angle D = 0{,}5\alpha$, т.к. он р/б по опр-ю по св-ву внешнего угла $\angle AMP = \angle MDP + \angle MPD$.



Тогда по св-ву смежных углов $\angle PDT = 90^\circ$.

В четырехугольнике $BTDP$ ~~на~~ сумма углов $360^\circ \Rightarrow$ оставшийся угол $PBT = 90^\circ$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$

б) пусть K – середина AC, тогда $AK = BK = CK$ по св-ву медианы прямоуг Δ.

$PM = AM = MD = 0{,}5 \Rightarrow AD = 1$. $TN = DN = NC = 2{,}5 \Rightarrow DC = 5 \Rightarrow AC = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow BK = AK = CK = 3. \Rightarrow DK = 2,\ CD = 5$

в ΔBDK $BD = 2$, $DK = 2$, $BK = 3$. по T cos $9 = 4 + 4 - 2\cdot2\cdot2\cdot\cos\alpha$

$9 = 8 - 8\cos\alpha \quad \cos\alpha = -\frac{1}{8}$

$\alpha = \angle BDK$.

в ΔBDC $\cos\alpha = -\frac{1}{8}$; $BD = 2$, $CD = 5$. По Т. cos $BC^2 = 4 + 25 + \frac{20\cdot1}{8} =$

$= 29 + 2{,}5 = 31{,}5$

в прямоуг ΔABC $AB^2 = 36 - 31{,}5$ по Т. Пифагора.

$$S_{ABC} = \frac{AB\cdot BC}{2} = \sqrt{\frac{AB^2\cdot BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{63\cdot 9}{2\cdot4\cdot2}} = \frac{9}{4}\sqrt{7} = 2{,}25\sqrt{7}$$

Ответ: $S_{ABC} = 2{,}25\sqrt{7}$

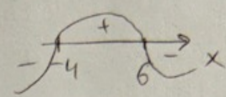
2

211006394 (U900907 M1277112)

№2

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$$

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 24+2x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 6 \\ (6-x)(x+4) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 6 \end{cases}$$



Прибавим к обеим частям $-(x+4+6-x) = -10$. Т.е. вычтем 10.

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} - 6 = -\left((x+4) - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} + (6-x)\right)$$

Замена. Пусть $a = \sqrt{x+4}$ $\quad a \geq 0$

$b = \sqrt{6-x}$ $\quad b \geq 0$

$$a - b - 6 = -(a-b)^2 \qquad \text{пусть } a - b = m$$

$$m - 6 = -m^2 \qquad m^2 + m - 6 = 0$$

$$(m+3)(m-2) = 0$$

$$m = -3 \qquad m = 2$$

Обратная замена

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -3$

$\sqrt{x+4} + 3 = \sqrt{6-x}$ $\uparrow^2$, т.к. обе части ≥ 0

$x+4+9+6\sqrt{x+4} = 6-x$

$2x+7+6\sqrt{x+4} = 0$

$-(2x+7) = 6\sqrt{x+4}$ $\quad 2x+7 \leq 0$

$\uparrow^2$, т.к. обе части ≥ 0 $\quad 2x \leq -7$

$\underline{x \leq -3{,}5}$

$4x^2+49+28x = 36x+144$

$4x^2 - 8x - 95 = 0$

$D = 64+1520 = 1584$

$x_{1,2} = \dfrac{8 \pm 12\sqrt{11}}{8} = 1 \pm 1{,}5\sqrt{11}$

$1+1{,}5\sqrt{11} > -3{,}5 \quad | \cdot 2$

$2+3\sqrt{11} > -7 \quad | -2$

$3\sqrt{11} > -9$

посторонний корень

$1-1{,}5\sqrt{11} < -3{,}5 \quad | \cdot 2$

$2-3\sqrt{11} < -7 \quad | -2$

$-3\sqrt{11} < -9 \quad | :(-3)$

$\sqrt{11} > 3 \quad | \uparrow^2$

$11 > 9$

$1-1{,}5\sqrt{11} > -4 \quad | -1$

$-1{,}5\sqrt{11} > -5 \quad | \cdot(-2)$

$3\sqrt{11} < 10 \quad | \uparrow^2$

$99 < 100$

подходит

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2$

$\sqrt{x+4} = 2+\sqrt{6-x}$ $\uparrow^2$, т.к. обе части ≥ 0

$x+4 = 4+6-x+4\sqrt{6-x}$

$2x-6 = 4\sqrt{6-x}$

$x-3 = \sqrt{6-x}$ $\quad x \geq 3$ $\uparrow^2$, т.к. обе части ≥ 0

$x^2-6x+9 = 6-x$

$x^2-5x+3 = 0$

$D = 25-12 = 13$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$

$\dfrac{5+\sqrt{13}}{2} \overset{?}{>} 3 \quad | \cdot 2$

$5+\sqrt{13} > 6 \quad | -5$

$\sqrt{13} > 1$

$\dfrac{5+\sqrt{13}}{2} < 6 \quad | \cdot 2$

$5+\sqrt{13} < 12 \quad | -5$

$\sqrt{13} < 7 \quad \uparrow^2$

$13 < 49$

подходит

$\dfrac{5-\sqrt{13}}{2} \overset{?}{<} 3 \quad | \cdot 2$

$5-\sqrt{13} < 6 \quad | -5$

$-\sqrt{13} < 1$

пост. кор.

Ответ: $x = 1-1{,}5\sqrt{11}$; $\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$

1

Чистовик

$2a^2x + ax^2 - ay + a^3 + 1 = 0$

$ay = ax^2 + 2a^2x + a^3 + 1$

$a \neq 0$, иначе $0 = 1 \Rightarrow$

$y = x^2 + 2ax + a^2 + \frac{1}{a}$

$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{2a}{2} = -a$

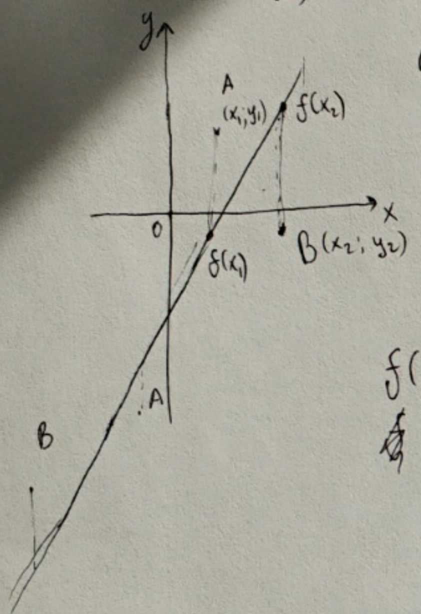
$y_в = (-a)^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$

т.е. $B\left(-a; \frac{1}{a}\right)$

$3x - y = 4$

$y = 3x - 4$

$f(x) = 3x - 4$



они лежат по разных сторонах от этой прямой

когда $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x_2) > y_2 \\ f(x_1) < y_1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x_2) < y_2 \\ f(x_1) > y_1 \end{cases} \end{array}\right.$

$x_2 = -a$

$y_2 = \frac{1}{a}$

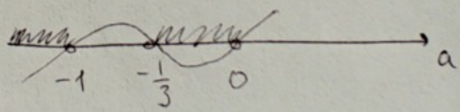
$f(x_2) = -3a - 4$ $\qquad y_2 = \frac{1}{a}$

$-3a - 4 > \frac{1}{a}$

$3a + 4 + \frac{1}{a} < 0$

$\frac{3a^2 + 4a + 1}{a} < 0$

$\frac{(a+1)(3a+1)}{a} < 0$



$f(x_2) > y_2$ при $a \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right)$

$f(x_2) < y_2$ при $a \in \left(-1; -\frac{1}{3}\right) \cup (0; +\infty)$

$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$(2y - 5a)^2 + (x - a)^2 = 4x^2 - 8xy + 20ax$

окружность с 0 радиусом – точка

$(x - x_1)^2 + (y - x_2)^2 = 0$

Черновик

$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 4y^2$

$+x^2 \quad (2x)^2 \quad 2\cdot 2y \quad (2y)^2$

$ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0$

$ay = ax^2 + 2a^2x + a^3 + 1$

$y = x^2 + 2ax + a^2 + \frac{1}{a}$

$x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{-2a}{2} = -a \qquad B\left(-a; \frac{1}{a}\right)$

$y_в = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$

$y = 3x - 4$

$a^2 - 22ax + 5x^2 + 8xy = 4y^2 \quad +4y^2$

$26a^2$

$x^2 + 8$

$3a^2 + 4a + 1$

$25a^2 - 20ay + 4y^2 = 0$

$(5a)^2 \quad 2\cdot 5a\cdot 2y$

$(a+1)(3a+1)$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$

$25a^2 + a^2 - 22ax - 20ay + 4x^2 + x^2 + 4y^2 = -8xy$

$(5a)^2 \quad 2\cdot 5a\cdot 2y \quad (2y)^2$

$a^2 - 2ax + x^2 \qquad = -8xy + 20ax + 4x^2$

$(2y - 5a)^2 + (x - a)^2 = 4x^2 - 8xy + 20ax$

Черновик

$\sqrt{x+4} + \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24 + 2x - x^2} \qquad + a^2 + b^2$

$x + 4 \geq 0$

$6 - x \geq 0$

$24 + 2x - x^2 \geq 0$

$\begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 6 \end{cases}$

$x + 4 + 6 - x =$

$x \in [-4; 6] \quad = 2$

$-x^2 + 2x + 24 \geq 0$

$x^2 - 2x - 24 \leq 0$

$(x-6)(x+4) \leq 0$

$95 \times 16 = 570 + 95 = 1520$; $1520 + 64 = 1584$

$\sqrt{x+4} + \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{(x+4)(6-x)} \quad ab$

$a^2 = x + 4$

$b^2 = 6 - x$

10

$-4 \qquad 6$

$a + b + 0{,}4(a^2 + b^2) = 2ab$

≥ 0

$1440 + 144 = 1584$

$\sqrt{x+4} + \sqrt{6-x} = 2\sqrt{(x+4)(6-x)} - 4$

$x + 4 + 6 - x + 2\sqrt{\ } \quad ab$

$\sqrt{x+4} + \sqrt{6-x} - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} = -4 \qquad -(a^2+b^2) = -10$

$\sqrt{\ } + \sqrt{\ } + 6 = \left(\sqrt{\ } + \sqrt{\ }\right)^2$

$2\ 2\ 9$

$a + b + 6 = (a+b)^2 - (a-b)^2$

$4\cdot 4\cdot 9\cdot 11$

1584

$4\cdot 3\cdot 75 + 21 = 750 +$

$396 = 360 + 36$

$\sqrt{x+4} + \sqrt{6-x} = 3$

12

$a - b - 6 = -(a-b)^2$

$36 \times 4 = 144$

$36 - 28 = 8$

$u^2 - u - 6 = 0$

$(x-3)(x+2) = 0$

$x = 3 \quad x = -2$

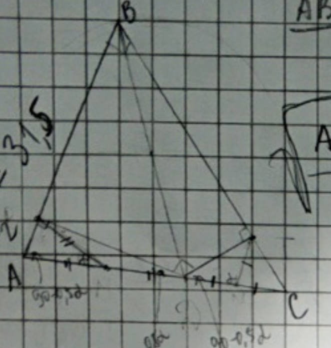
$-x^2 = x - 6$

$x^2 + x - 6 = 0$

$144 - 49 = 95$

$$\frac{AB\cdot BC}{2}$$

$$\sqrt{\frac{AB^2\cdot BC^2}{4}}$$

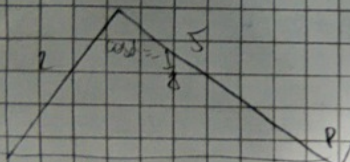


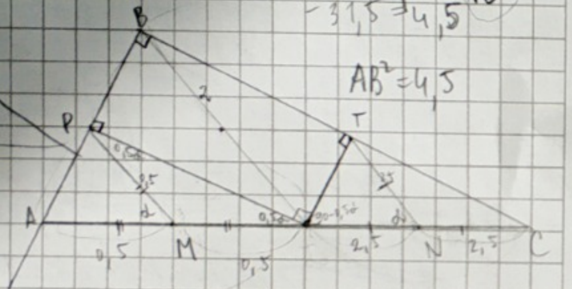
$BC^2=4\cdot 25\cdot 20\cdot\frac{1}{8}=31,5$

$BC^2=20\cdot 20/32$

$$\sqrt{\frac{31,5\cdot 4,5}{4}}=\sqrt{\frac{63\cdot 9}{16}}$$

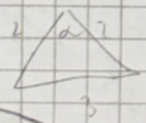
$36-31,5=4,5$





$AB^2=4,5$

$$\frac{AP}{AB}=\frac{1}{6}$$

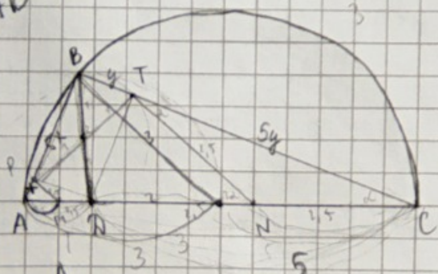


$9=4+4-2\cdot 2\cdot 2\cdot\cos\alpha$

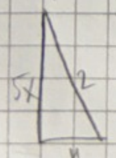
$9=8-8\cos\alpha$

$8\cos\alpha=-1$

$\cos\alpha=-\frac{1}{8}$



$$\frac{CT}{CB}=\frac{5}{6}$$



$y^2+25x^2=4$ $\quad y^2=\frac{4}{25x^2}$ $\quad y=\frac{2}{5x}$ $\quad y=\frac{0,4}{x}$

Черновик

2. 11ax

Черновик

$25a^2$

$$5x^2+8xy+4y^2=a(26a-22x-20y)$$

$$a-b-6=-(a-b)^2$$

$$x^2+x-6=0$$

$$(x+3)(x-2)=0$$

$x=2$

$$\sqrt{x+4}=2+\sqrt{6-x}$$

$(x\ \ \ )^2+(y\ \ \ )^2=4$

$$x+\cancel{4}=\cancel{4}+6-x+4\sqrt{6-x}$$

$$2x-6=4\sqrt{6-x}$$

$x\geq 3$

$$x-3=\sqrt{6-x}$$

$$x^2-6x+9=6-x$$

$$x^2-5x+3=0$$

$$D=25-12=13$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{5+\sqrt{13}}{2}>3$$

$$5+\sqrt{13}>6$$

$26-22x$

$$\sqrt{13}>1$$

$$\frac{5-\sqrt{13}}{2}\quad 3$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

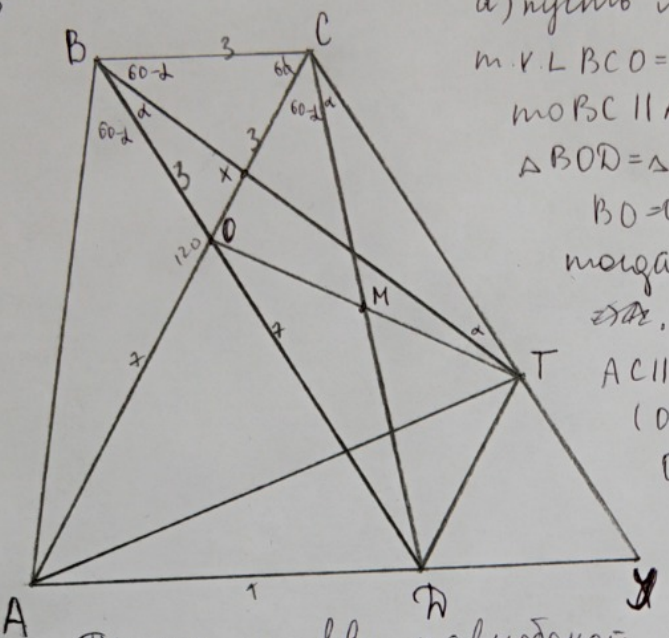
Шифр: **211006394**

ID профиля: **900907**

Вариант 9

Чистовик

N6



а) пусть M-середина CD., $CA \cap BT = x$.

т.к. $\angle BCO = \angle OAD = 60^\circ$ т.к. BOC и AOD-прав. Δ, то $BC \parallel AD$ по призн, AC-секущая.

$\Delta BOD = \Delta COD$ по СУС, $\angle BOA = \angle COD = 120^\circ$ как верт, $BO = OC = BC$, $AO = OD = AD$.

тогда $ABCD$-равнобокая трапеция по опр $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $AB = CD$.

$AC \parallel TD$, т.к. $OCTD$-параллелогр по призн ($OM = MT$, $CM = MD$). И значит $OC \parallel DT$ и $OC = DT$. $\Rightarrow$ по транзитивности $BC = DT \Rightarrow$ $\Rightarrow BCTD$-равнобокая трапеция по опр-ю $\Rightarrow$ по ее св-ву $BT = CD$, т.е. $AB = BT$.

Также, по св-ву равнобокой трапеции $\angle DBT = \angle DCT = \alpha$.

$\angle DBT = \angle BTC = \alpha$ как накр.леж. $\angle TBC = 60 - \alpha$, т.к. $\angle OBC = 60^\circ$

$\angle CXT = 120 - \alpha$ по св-ву внешнего угла ($\angle BCX = 60^\circ$)

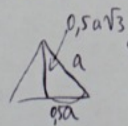
в ΔCXT $\angle XCT = 60^\circ$ по Т о $\Sigma \angle \Delta$. $\Rightarrow \angle ACD = 60 - \alpha$

в р/б трапеции $ABCD$ $\angle ACD = \angle ABD = 60 - \alpha \Rightarrow \angle ABT = 60^\circ$. еще $AB = BT \Rightarrow$ $\Rightarrow ABT$ – правильный.

б) в ΔOBA по Т. cos найдем AB.

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2OB \cdot OA \cdot \cos AOB = 9 + 49 + \frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 1}{\cancel{2}} = 9 + 49 + 21 = 79$$

~~AB~~

$S_{\Delta ABT} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$ (т.к.


$s = \frac{0{,}5a\sqrt{3} \cdot a}{2} = 0{,}25a^2\sqrt{3}$)

$$S_{ABCD} = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOD} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COD} = \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{49\sqrt{3}}{4} + \frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sin 120^\circ}{\cancel{2}} =$$

$$= \frac{58\sqrt{3}}{4} + \frac{21\sqrt{3}}{2} = \frac{58\sqrt{3}}{4} + \frac{42\sqrt{3}}{4} = \frac{100\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79\sqrt{3}}{4} : \frac{100\sqrt{3}}{4} = 0{,}79$$

Ответ: 0,79

1

1

Чистовик

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$$

Замена. $\begin{cases} x^2+y^2=a, & a>0 \\ x^2y^2=b, & b\geq 0 \end{cases}$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$x^4+y^4+3x^2y^2=(x^2+y^2)^2+x^2y^2$

$$-\begin{cases} \dfrac{2}{a}+b=2 \\ a^2+b=5 \end{cases}$$

$-a^2+\dfrac{2}{a}=-3$

$a^2-\dfrac{2}{a}-3=0 \quad |\cdot a$, т.к. $a\neq 0$

$a^3-3a-2=0$

$a^3-2a^2+2a^2-4a+a-2=0$

$a^2(a-2)+2a(a-2)+1(a-2)=0$

$(a+1)^2(a-2)=0$

$a=-1$ пост. корень $\quad a=2$

$4+b=5$

$b=1$

Обратная замена $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \end{cases} \quad x^2=\dfrac{1}{y^2}$, т.к. $y\neq 0$ иначе $0=1$

$y^2+\dfrac{1}{y^2}=2 \quad |\cdot y^2$, т.к. $y\neq 0$

$y^4-2y^2+1=0$

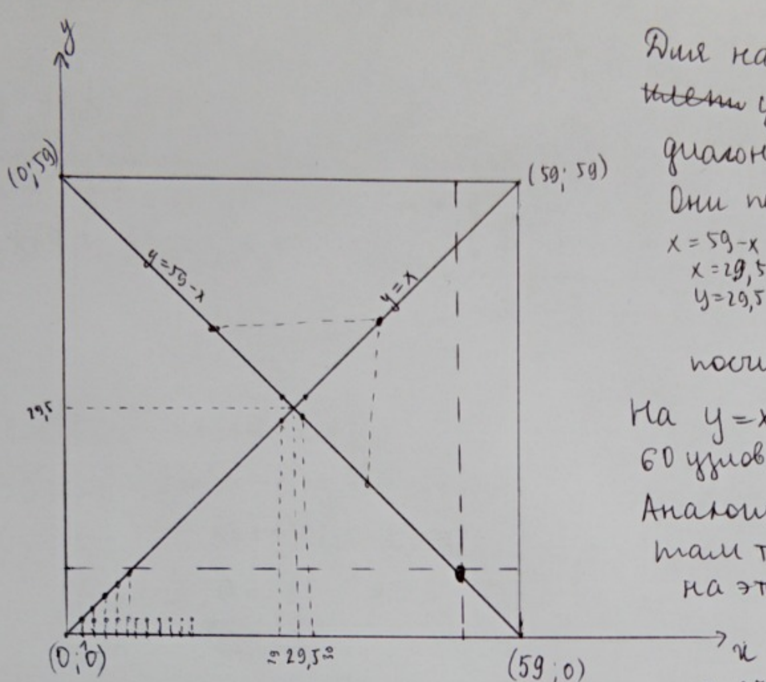
$(y^2-1)^2=0 \quad y^2=1 \quad y=\pm 1 \quad x^2=1 \quad x=\pm 1$

Ответ: $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$

2

211006394 (U900907 M1277113)

Чистовик



Для начала сосчитаем, сколько всего ~~шт~~ узлов на этих 2 главных диагоналях.

Они пересекаются в (29,5 ; 29,5), это не является узлом сетки ⇒ все узлы при сложении количеств на 2ух диагоналях посчитаны ровно 1 раз.

$x=59-x$
$x=29,5$
$y=29,5$

На $y=x$ считая (0;0) и (59;59) находится 60 узлов, значит, подходящих нам − 58.

Аналогично и с диагональю $y=59-x$, там тоже 58 узлов. Т.е. всего 116 узлов на этих 2 диагоналях

(узел (0;0) остался сам по себе, потом каждому узлу с главной диагонали ставим в соответствие проекцию, а там числа от 1 до 59 − 59 штук + (0;0) − всего 60 узлов на диагонали каждой)

← как мы считали узлы на диагоналях.

Всего узлов, которые можно рассматривать − $58\cdot 58 =$ **3364** (58 строк по 58 узлов)

←(так же как тут подсчет ведется по проекциям)

Но когда мы выбрали первый узел на какой-то из диагоналей, мы можем взять в качестве второго узла все остальные, кроме него самого и узлов из его строчки / столбца. В строчке и в столбце по 58 узлов ⇒ нельзя брать $57+57+1=115$ узлов. Остальные $3249=3364-115$ узлов брать можно, т.к. ни ордината, ни абсцисса не совпадают, и эта прямая не параллельна осям. Сейчас посчитаем варианты, когда второй узел ~~тоже~~ не лежит на диагоналях. Тогда выпадает еще $(58+57=115)$ вариантов и остается 2934 узла. Всего $2934\cdot 116$ вариантов.

Теперь рассмотрим случай, когда 2 узла лежат на одной и той же диагонали. Тогда эта прямая никогда не будет параллельна осям, т.к это сама диагональ. Вариантов выбрать 2 узла из 58 $57\cdot 58$ вариантов. Т.к. их 2, то суммарно $\frac{57\cdot 58}{2}=29\cdot 57$ вариантов.

И последний случай, когда они лежат на разных диагоналях, тогда из 58 точек на 2ой диагонали нельзя брать только 2 (где совпадает абсцисса и ордината, сразу обе не совпадут, т.к. пересечение не в узле). Тогда мы сосчитаем сразу $58\cdot 56$ вариантов (считая 1ый узел на $y=x$, а 2ой на $y=59-x$), в таком случае все прямые будут все варианты, или можно $\frac{58\cdot 56\cdot 2}{2}$, т.к. посчитали дважды).

Итого: $116\cdot 2934+58\cdot 57+58\cdot 56=58(56+57+5868)=58\cdot 5981=346698$ вариантов

Ответ: 346698.

3

211006394 (U900907 M1277113)

$\frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2$ $\quad x^2+y^2=a$, $a>0$

$\quad x^2y^2=b$, $b\geq 0$

$x^4+y^4+3x^2y^2=5$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$$+\begin{cases}\frac{2}{a}+b=2\\ a^2+b=5\end{cases}$$

$a^2+?$

$$-\begin{cases}a^2+b=5\\ \frac{2}{a}+b=2\end{cases}$$

$a^2-\frac{2}{a}=3$

$a^3-2=3a$

$a^3-3a-2=0$

$a^3+2a^2-2a^2-2a-$

Черновик ②

$a^3+2a^2-2a^2-4a+a-2=0$

$a^3-2a^2+2a^2-4a+a-2=0$

~~a^3-3a-2~~

$a^2(a-2)+2a(a-2)+1(a-2)=0$

$(a+1)^2(a-2)=0$

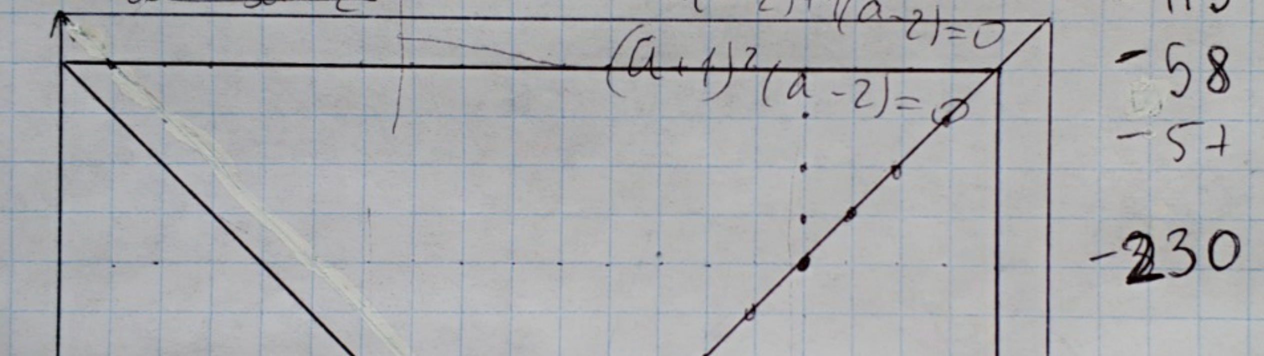
−115

−58

−57

−230

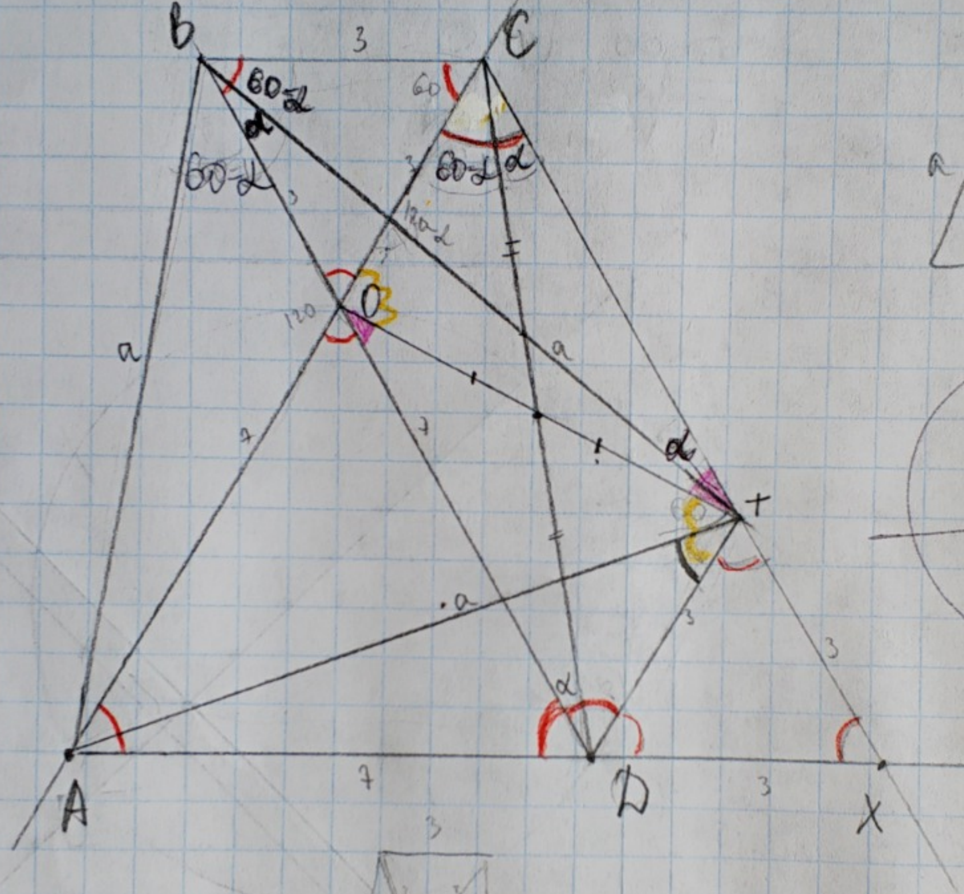
$$\begin{array}{r}3364\\ -\ 230\\ \hline 2934\end{array}$$

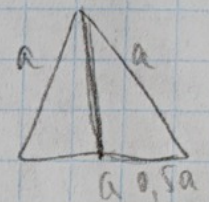


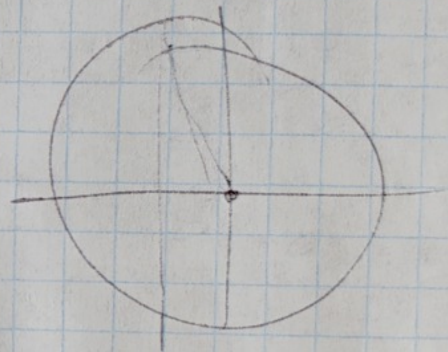
6. И. п. – стоя, постави... левой руки левый глаз на 3-5 сек, убрать ладонь,
глаз, прикрыть ладонью левой руки ... Поставить палец левой руки по средней линии ...
... 3-5 сек, убрать ладонь,

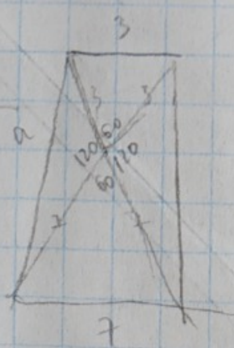
∠ABT = 60°

$$\frac{0{,}5a\sqrt{3}\cdot a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$





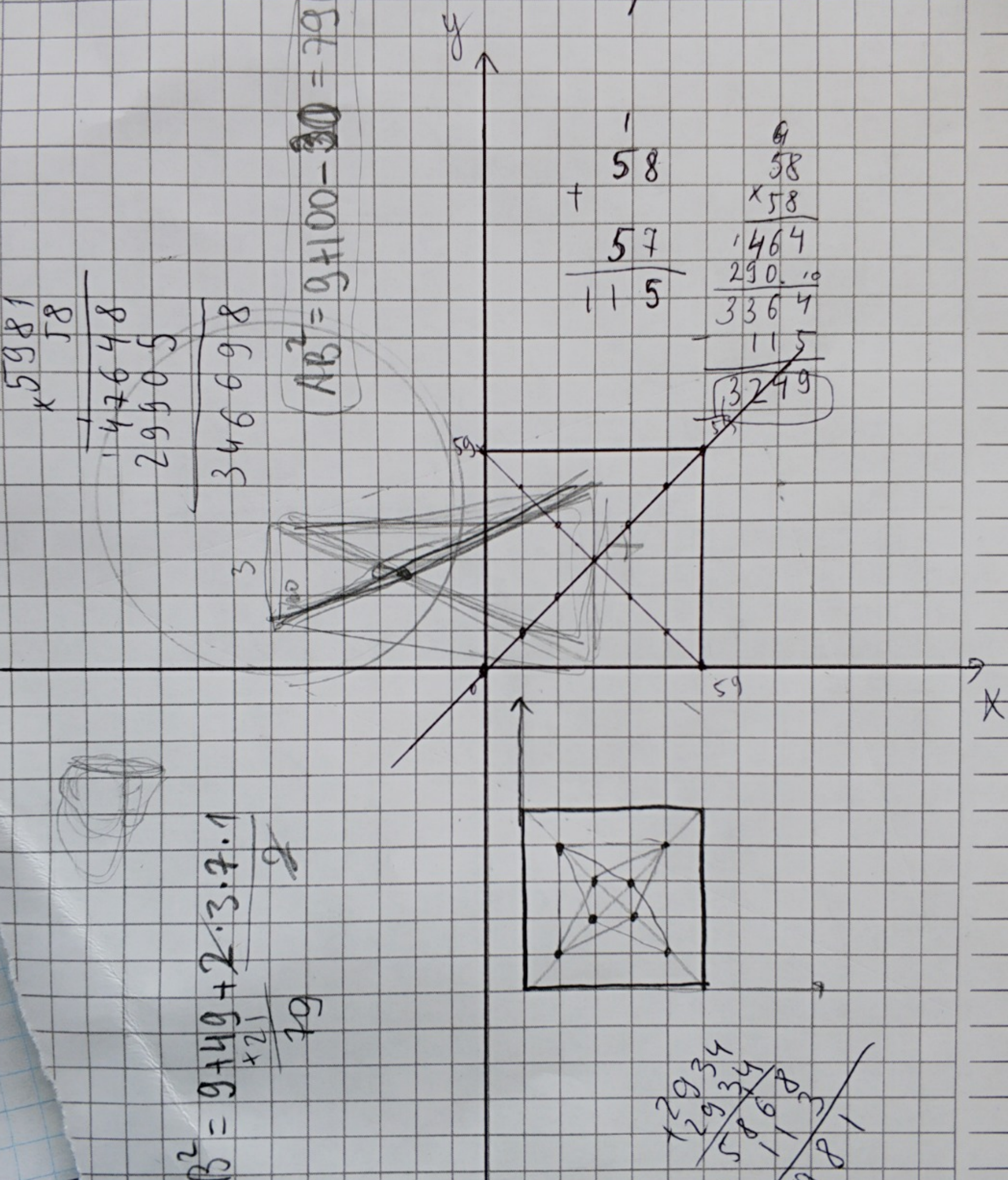




Черновик

6. И. п. – стоя, поставить ... ладонью левой руки левый глаз на ... палец левой руки по средней лини... 2-5 сек. убрать ладо...

Черновик



$$58 + 57 = 115$$

$$58 \times 58 = 3364$$

$$3364 - 115 = \boxed{3249}$$

$$5981 \times 58 = 346898$$

$$\boxed{AB^2 = 9 + 100 - 30 = 79}$$

$$AB^2 = 9 + 49 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 1}{2} = 79$$

$$2934 \times 2 = 5868$$

$$5868 + 113 = 5981$$

распо

пор, по

расстс

5

Повтори

6.

глаз, прик

конец пальца 3-5 сек. Поставить ... лый глаз на 3-5 сек, убрать ла-