Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

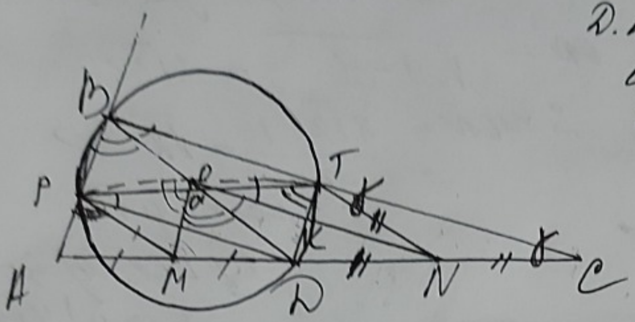
Шифр: **211006314**

ID профиля: **102181**

Вариант 9

Чистовик №1.

Решение: а) PBTD — вписанный 4х-ник => $BD \cap PT = O'$ => $\angle DBT = \angle DPT = \alpha$, $\angle DBP = \angle PTD = \beta$ по св-ву впис. 4х-ника



Д.п. MO и NO, где O — сер. BD <=> $MO \parallel AB$, $ON \parallel BC$, по св-ву ср. линии

$\Downarrow$

$\angle DON = \angle DBC = \alpha$
$\angle MOD = \angle ABD = \beta$.

$\Downarrow$

Имеем: $\angle DON = \angle DPT = \alpha$, причем они оба проходят через т. D => т.к. $\angle DOT$ — центр. угол и он соотв. впис. $\angle DPT$ => $\angle DOT = 2\alpha$ => ON — бис-са $\angle DOT$ => $\angle DON = \angle NOT = \alpha$, аналогично OM — бис-са $\angle POD$ => $\angle MOD = \angle POM = \beta$.

~~Т.к.~~ ΔDOT — р/б ($DO = OT$) и ON — бис-са => ON — медиана и высота => ΔDTN — р/б по пр-ку (т.к. $DK = KT$ и NK — высота) => $DN = TN = NC$ => ΔDTC — прямоуг. => $\angle NTC = NCT = \gamma$ по св-ву прямоуг. тр-ка => $\angle TDC = 90 - \gamma$ и $\angle PMD = 180 - 2\gamma = \angle TNC$ (т.к. $PM \parallel TN$)

Т.к. ΔPMD — р/б аналогично => $\angle PMD = \angle MDP = \gamma$ => $\angle PDT = 180° - \gamma - (90 - \gamma) = 90°$ => во впис. 4х-нике DPBT: $\angle B = 180° - 90° = 90°$ по св-ву впис. 4х-ника.

б) $MP = \frac{1}{2}$, $NT = \frac{5}{2}$, $BD = 2$. ~~Из п. а) $\angle B = \angle T = \angle D = 90°$ в 4х-нике~~ DPBT => DPBT — прям-ник

$\angle MON = \angle ABC = 90°$ и $\Delta ABC \sim \Delta MON$ по I пр-ку ($\angle MON = \angle ABC = 90°$ и $\angle ONM = \angle TCN = \gamma$) =>

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MON}} = \left(\frac{AC}{MN}\right)^2 = 4.$$

211006314 (U102181 M1274748)

Чистовик.

№2 Ответ: $5; -3$.
(продолж.)

№3.

Ур-ие для т. B: $y = x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$.

$y=(x+a)^2+\frac{1}{a} \Rightarrow$

Вершина параболы имеет координаты $B(-a; \frac{1}{a})$.

Ур-ие для т. A: $26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$.

$4(x+y)^2+x^2-20a(x+y)-2ax+26a^2=0$.

$4((x+y)-\frac{5}{2}a)^2=-a^2+2ax-x^2$.

$4(x+y-\frac{5}{2}a)^2=-(x-a)^2 \Rightarrow$

Т.к. $-(x-a)^2 \le 0$, то $x-a=0 \Rightarrow x=a$.

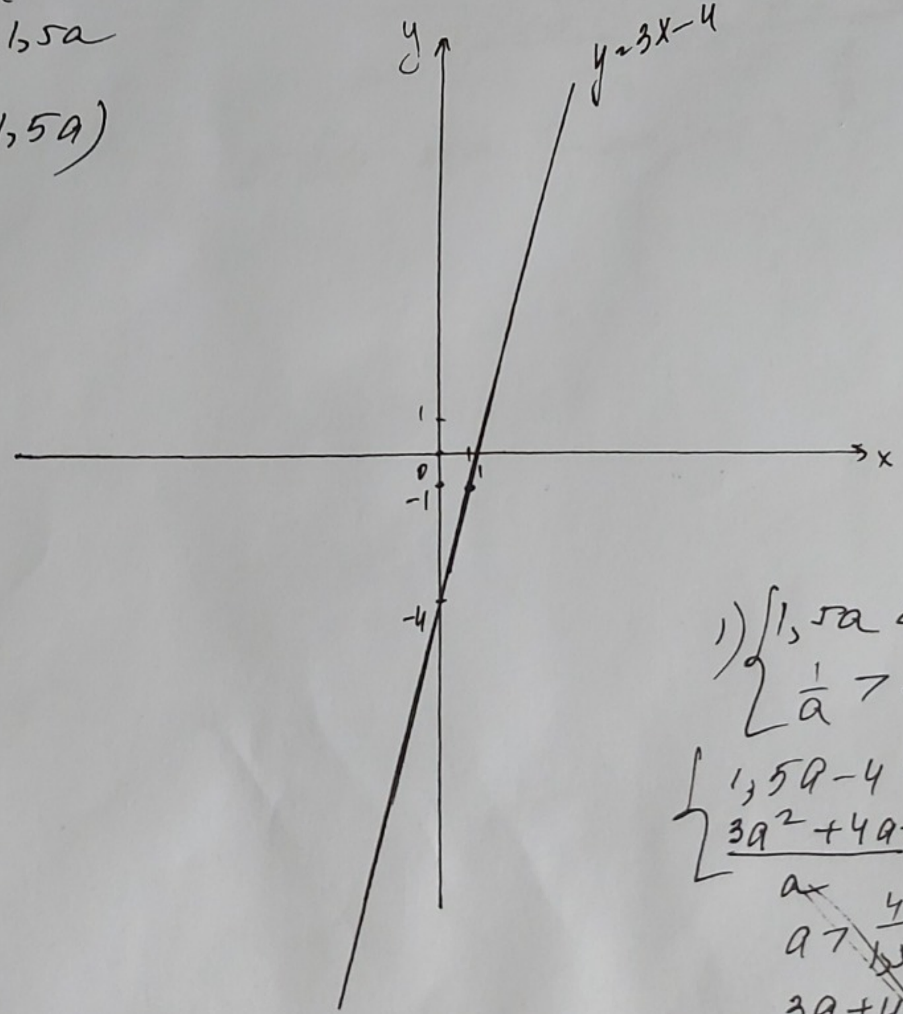
$(a+y-\frac{5}{2}a)^2=0$.

$y-1{,}5a=0 \Rightarrow$

$y=1{,}5a$

$\Downarrow$

$A(a; 1{,}5a)$



1) $\begin{cases} 1{,}5a < 3a-4 \\ \frac{1}{a} > -3a-4. \end{cases}$

$\begin{cases} 1{,}5a-4 > 0. \\ \frac{3a^2+4a+1}{a} > 0. \end{cases}$

$a > \frac{4}{1{,}5} = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$.

$3a+4 > 0 \Rightarrow a > -\frac{4}{3}$

$\Downarrow$

$a > \frac{8}{3}$.

211006314 (U102181 M1274748)

Чистовик

2) $\left[\begin{array}{l} 1,5a > 3a-4 \\ \frac{1}{a} < -3a-4. \end{array}\right.$ (продолж.) №3. $a > \frac{8}{3}$.

$1,5a - 4 < 0.$

$3a$

$D_1 = 4 - 3 = 1 > 0$

$a = \frac{-2+1}{3} = -\frac{1}{3}$

$a = \frac{-2-1}{3} = -1$

$-1 \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{8}{3}$

1) $a > \frac{8}{3}$.

2) $\left[\begin{array}{l} 1,5a > 3a-4 \\ \frac{1}{a} < -3a-4 \end{array}\right.$

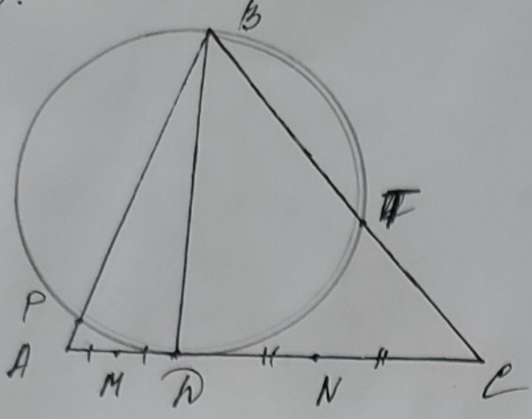
$\left\{\begin{array}{l} 1,5a - 4 < 0. \\ \frac{1+3a^2+4a}{a} < 0. \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} a < \frac{8}{3} \\ \frac{(a+1)(a+\frac{1}{3})}{a} < 0 \end{array}\right.$

$-1 \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{8}{3}$

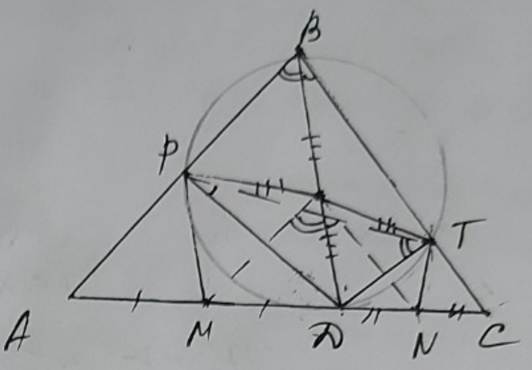
Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; 0) \cup$
$\cup (\frac{8}{3}; +\infty)$.

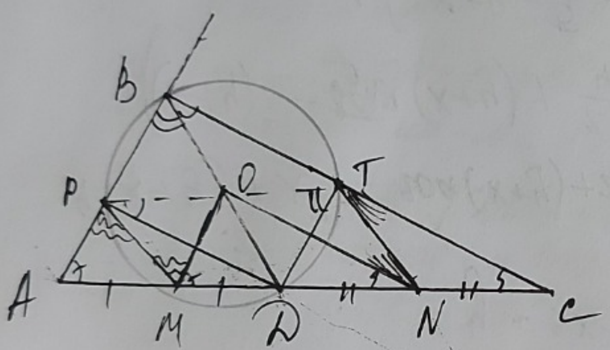
Черновик 1 ч.

№1.



PM ∥ TN





$$\begin{array}{r} \times\, 23 \\ 4 \\ \hline 92 \\ +\;3 \\ \hline 95 \end{array} \quad 1 \qquad \begin{array}{r} \times\, 95 \\ 4 \\ \hline 380 \end{array} \quad 2 \qquad \begin{array}{r} \times\, 36 \\ 36 \\ \hline 216 \\ 8 \end{array} \quad 3$$

$$\begin{array}{r} \times\, 16 \\ 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array} \quad 3$$

№2. $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$

$x\in[-4;6]$.

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$\times\,26$
26

$(x+4)(6-x)=6x-4x+24-x^2$.

$\cancel{\sqrt{a}-\sqrt{b}+4=\sqrt{ab}}$.

$a-b+4=2ab$.

$\frac{a}{b}-1+\frac{4}{b}=2a$.

$\cancel{x}+4+6-\cancel{x}=2\sqrt{(x+4)(6-x)}=4(x+4)(6-x)+16-$
$=16\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$4(x+4)(6-x)+6-16\sqrt{(x+4)(6-x)}=0$.

Черновик

$396 \mid 3$, 66; 36, 36, 36, 0.

$66 \times 9 = 594$ 5

23×23: 69, 46, 529

$121 - 26 = 9.5$

17×17: 119, 17, 289 4

$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0.$ $\mid :2.$

$(x^2 - 22ax + 121a^2) + \cancel{9y^2} +$

$ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0.$

$y = x^2 + 2ax + a^2 + \frac{1}{a}.$

$y = (x+a)^2 + \frac{1}{a}.$

$y = 3x - 4.$

$4(x+y)^2 + x^2 = 20a(x+y) + 2a - 26a^2.$

$4\left((x+y)^2 - 5a(x+y) + \frac{25}{4}a\right) = \cancel{a^2} - x^2 - a^2 + 2a.$

$4\left(x+y-\frac{5}{2}a\right)^2 = -(a-1)^2 - x^2 + 1.$

если $a = 2$ $4(x+y-5)^2 = \cancel{1} - x^2 + \cancel{1}.$

$x = 0.$

y

②

№1 Т. к по док. в п. а: $PM = MD = \frac{1}{2}$ (продолж.) Чистовик

$DN = NT = \frac{5}{2}$

$\Downarrow$

$MN = 3$

$OM = R = \frac{1}{2} BD = 1 \Rightarrow$ по Т. П-ра у $\triangle MON$:

$ON = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2} \Rightarrow$

$S_{MON} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 1}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow$

$S_{ABC} = 4\sqrt{2}$

Ответ: а) $90°$

б) $4\sqrt{2}$

№2.

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

ООУ: $x \in [-4; 6]$.

$\left(\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x}\right)^2 = \left(2\sqrt{(x+4)(6-x)} - 4\right)^2.$

$x+4+6-\cancel{x} - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} = 4(x+4)(6-x) + 16 - 16\sqrt{(x+4)(6-x)} = 0.$

$4(x+4)(6-x) - 14\sqrt{(x+4)(6-x)} + 6 = 0.$

Заменим $\sqrt{(x+4)(6-x)} = t, \; t \geq 0.$

$2t^2 - 7t + 3 = 0.$

$D = 49 - 24 = 25 \Rightarrow t = \frac{7+5}{4} = 3.$

$t = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{(x+4)(6-x)} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{(x+4)(6-x)} = 3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 24+2x-x^2 = \frac{1}{4} \\ 24+2x-x^2 = 9 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 23\frac{3}{4} = 0. \; (2) \\ x^2 - 2x - 15 = 0 \; (1) \end{array}\right.$

(1) $D_1 = 1 + 15 = 16 \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = 1+4 = 5 \\ x = 1-4 = -3. \end{array}\right.$

(2) $4x^2 - 8x - 95 = 0.$

$D_1 = 16 + 4 \cdot 95 = 396. \Rightarrow$

$x = \frac{1+3\sqrt{66}}{4}$ — пост. к-нь

$x = \frac{1-3\sqrt{66}}{4}$ ~~пост. к~~ — пост. к-нь.

Сравним $\frac{1+3\sqrt{66}}{4} \vee 6.$

$3\sqrt{66} \vee 23.$

$9 \cdot 66 \vee 529.$

$\frac{1-3\sqrt{66}}{4} < -4.$

$1 - 3\sqrt{66} < -16.$

$-3\sqrt{66} < -17.$

$594 > 289$

2

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006314**

ID профиля: **102181**

Вариант 9

Чистовик

№4 $\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

Заменим $x^2+y^2=a$, $a \geq 0$.
$x^2y^2=b$, $b \geq 0$.

$\begin{cases} \frac{2}{a}+b=2 \\ a^2-2b+3b=5 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2}{a}+b=2 \\ a^2+b=5 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2-\frac{2}{a}=3. \\ a^2+b=5 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{a^3-3a-2}{a}=0. \\ a^2+b=5 \end{cases}$

1) $a^3-3a-2=0$.
при $a=-1$: $-1+3-2=0$ – верно $\Rightarrow$

$$\begin{array}{r|l} -\;a^3-3a-2 & a+1 \\ a^3+a^2 & \overline{a^2-a-2} \\ \hline -a^2-3a & \\ -a^2-a & \\ \hline -2a-2 & \\ -2a-2 & \\ \hline 0. & \end{array}$$

$D=1+8=9 \Rightarrow a=\frac{1+3}{2}=2$

$a=\frac{1-3}{2}=-1$.

$\Downarrow$

т.к. $a=-1$ – пост. к-нь, то

$a=2 \Rightarrow b=-a^2+5=5-4=1$

$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2=2-y^2 \\ 2y^2-y^4-1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y^4-2y^2+1=0. \\ x^2=2-y^2 \end{cases}$

$\begin{cases} (y^2-1)^2=0. \\ x^2=2-y^2 \end{cases}$ $\begin{cases} y^2=1 \\ x^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\pm 1 \\ x=\pm 1 \end{cases}$

Ответ: $(1;1)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$, $(1;-1)$.

№5.

~~Пусть~~ Рассмотрим сначала диагональ квадрата, сонаправленную с прямой $y=59-x$, на ней есть 60 узловых точек, но т.к. мы не берем ~~вершины~~ границы квадрата, то имеем 58 диагональных узловых точек.
Количество узловых точек, соотв. диагональной точке всегда одно и то же, т.к. всего

1 узловых точек: $60 \cdot 60 - \cancel{55} = 3600$.

Чистовик

№3 б) Найдем S_{ABCD}: 1) з.ч. $CT \cap AD = K$
т.к. $DBCK$ - пар-м ($BC \parallel DK$ и $BD \parallel CK$), то
$S_{BCD} = S_{CDK}$
по св-ву р/б трап: $S_{ABD} = S_{ADC}$ =>
$S_{ABCD} = S_{BDCK} = BD \cdot BC \cdot \sin\angle B$,
$BD = BO + OD = BC + AD = 10$ => $S_{ABCD} = 10 \cdot 3 \cdot \sin 60° =$
$= \frac{30\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$

2) $S_{ABT} = S_{ABCD} + S_{CTD} - S_{BCT} - S_{ADT}$.
$\triangle CTD = \triangle BCT = \triangle ADT$ по I пр-ку
($BC = TD$, $CT = AD$, $\angle BCT = \angle CTD = \angle ADT = 120°$) =>
$S_{CTD} = \frac{1}{2} CT \cdot TD \cdot \sin 120°$
$CT = OD = AD = 7$
$TD = OC = BC = 3$ => $S_{CTD} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{4}$.

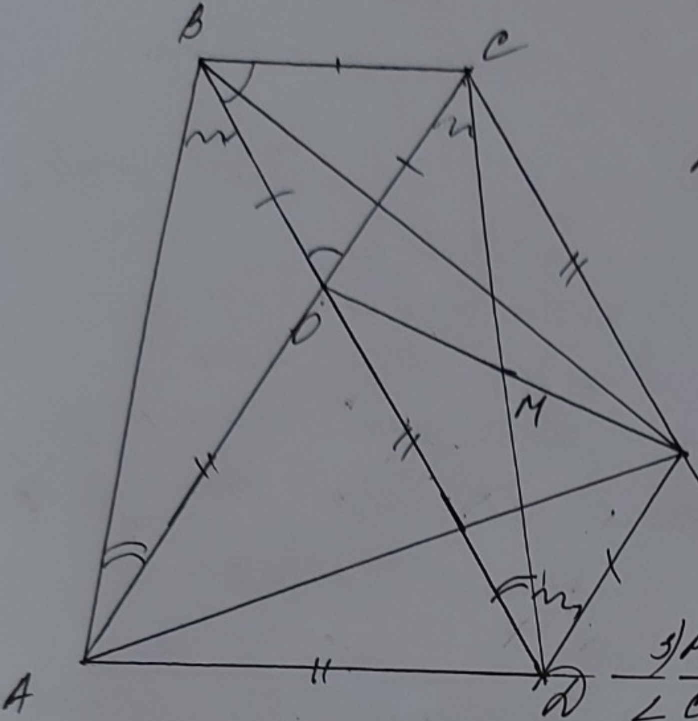
$S_{ABT} = 15\sqrt{3} + \frac{21\sqrt{3}}{4} - 2 \cdot \frac{21\sqrt{3}}{4} =$
$= \frac{60\sqrt{3} - 21\sqrt{3}}{4} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$.

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\cancel{39}^{13}\cancel{\sqrt{3}}}{4 \cdot \cancel{15}_{5}\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{13}{20}$.

Ответ: б) $\frac{13}{20}$.

4

№3. Чистовик



Решение: а)

1) т.к $\angle CBO = \angle ODA = 60^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$, т.к $\angle CBO = \angle OAD = 60^\circ$, то $ABCD$ – впис. $4^х$-ник и $\smile AB = \smile CD \Rightarrow$ $ABCD$ – р/б трап. (справ: $BC \parallel AD$ и $AB = CD$)

2) $OCTD$ – пар-м по пр-ку ($CM = MT$ и $OM = MD$) $\Rightarrow CT \parallel BD$, $TD \parallel AC$.

3) Рассмотрим трап. $BCTD$: $\angle CBD = 60^\circ$, найдём $\angle BDT$:

$\angle BDC = \angle ABC$ (по св-ву впис. $4^х$-ника)

$\angle CDT = \angle ACD$, по св-ву парал. прямых

$\angle ACD = \angle ABD$ по св-ву впис. $4^х$-ника $\Rightarrow$

$\angle BDT = \angle BDC + \angle CDT = \angle OBA + \angle BAO = \angle BOC = 60^\circ \Rightarrow$

трап. $BCTD$ – р/б $\Rightarrow BT = CD$.

Аналог. можно д-ть, что трап $ACTD$ – р/б $\Rightarrow$

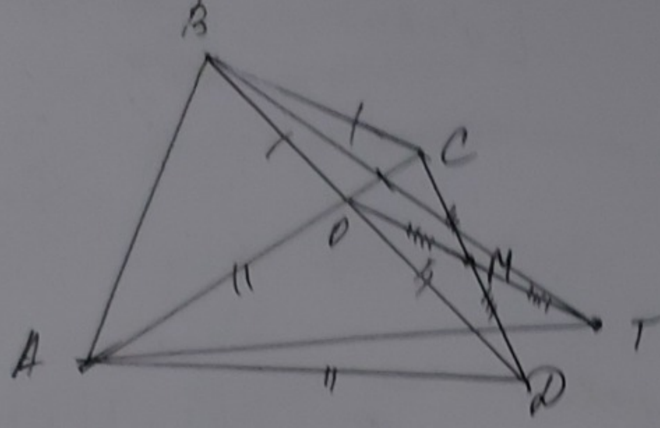
$CD = AT \Rightarrow BT = CD = AT \Rightarrow BT = AT$

3) т.к трап. $BCTD$ – р/б подоб, то она впис $\Rightarrow$ точки B, C, T, D лежат на одноб окр., т.к B, C, D, A лежат на окр. (окр. задаются тремя точками,) то все точки: A, B, C, T, D лежат на одноб окр. $\Rightarrow \angle BTA = \angle BCA = 60^\circ \Rightarrow$ в $\triangle ABT$: $\angle T = 60^\circ$ и $BT = TA \Rightarrow \triangle ABT$ – р/б и $\angle TBA = \angle TAB = \frac{180-60}{2} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный, чтд.

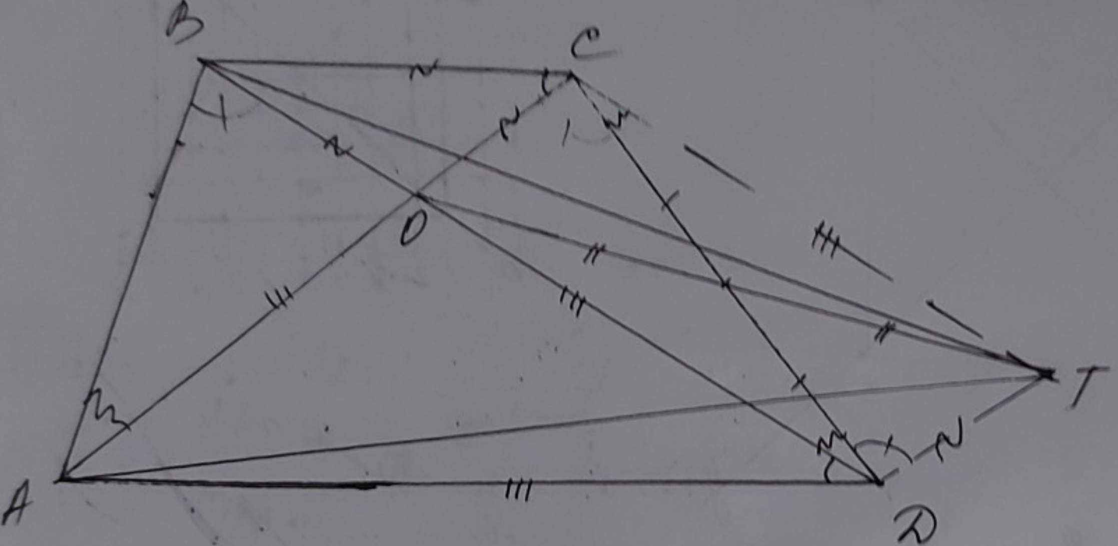
3

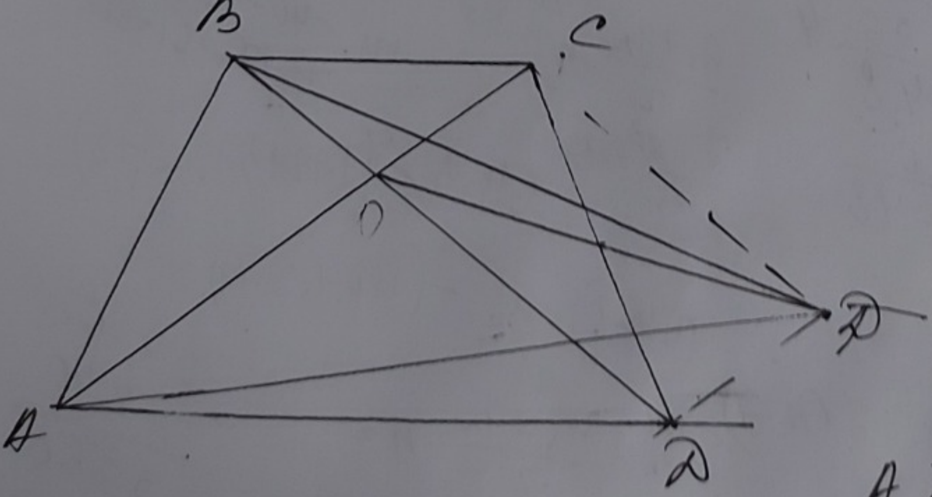
211006314 (U102181 M1274749)

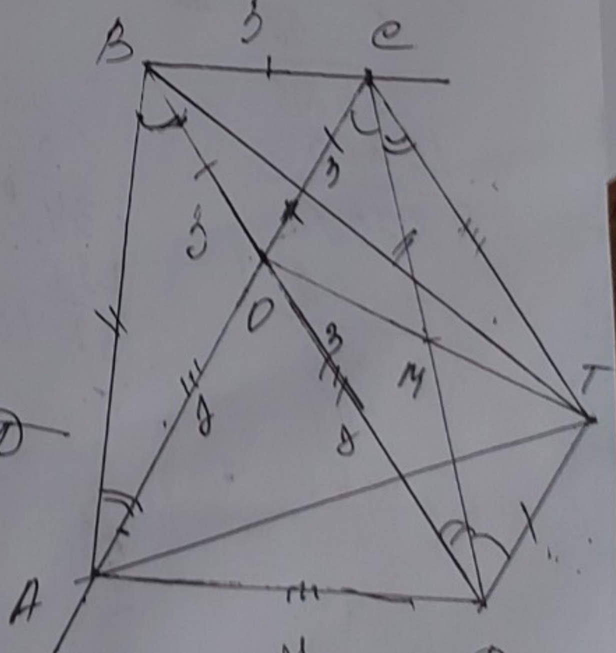
Черновик
№6



ABCD - р/б трап.







2

211006314 (U102181 M1274749)

4.2. черновик

№4

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$$

Замена

$$\begin{cases} \frac{2}{a}+b=2 \\ a^2+b=5 \end{cases}$$

$a^2-\frac{2}{a}=3.$

$\frac{a^3-3a-2}{a}=0.$

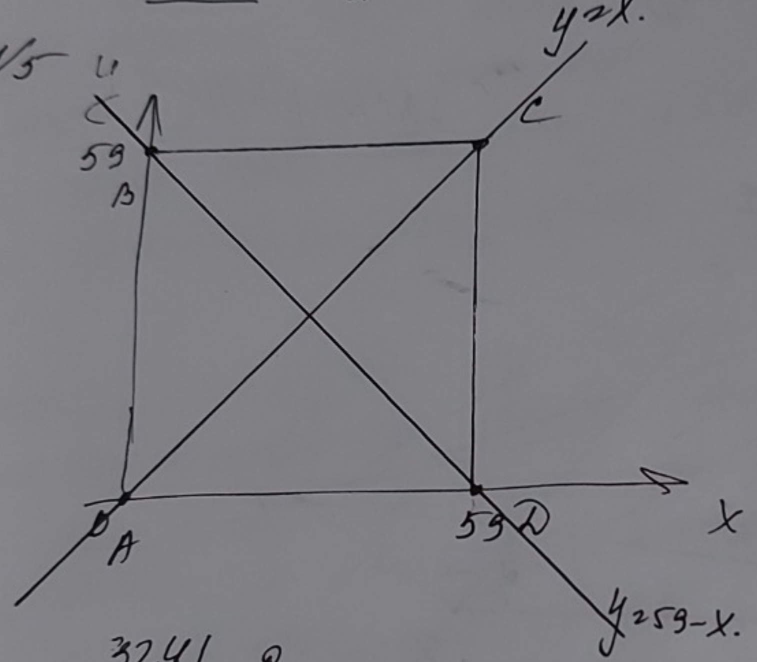
$a \neq 0$

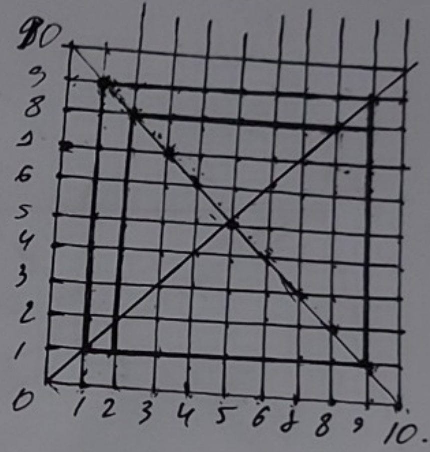
$59 \cdot 4 = 236$

$(a+1)^2 \quad a^3-3a-2 \mid a+1$

$a^3+a^2 \quad\quad a^2$

№5





$9 \cdot 9 = 81.$

$80-16=64.$

$49+17-2=64.$

$1+2+3+4+5+6.$

$11+11+9+9=40.$

$2+4=6$

$\frac{1+5}{2} \cdot 5 = 3.5$

$\frac{a_1+a_n}{2} \cdot n.$

$121-40-\cancel{...}+4=64.$

$=121-61=60.$

$\frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$

$64 \cdot 9-(1+2+3+\ldots+8).$

$(64-8) \cdot 9 - (1+2+\ldots+8).$

$2a_1+d(n-1)$

$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n =$

$= \frac{1+57}{2} \cdot 57 =$

$\frac{58}{2} \cdot 57 =$

3241 × 58 = 25928 + 16205 = 187978

187978 × 2 = 375956

375956 − 3248 = 372708

372708 − 3306 = 369402

58 × 56 = 348 + 290 = 3248

3600 − 240 = 3360

3360 − 119 = 3241

372824 − 3306 = 369518

× 3242

187978 + 58 = 188036

188036 × 2 = 376072

376072 − 3248 = 372824

58 × 57 = 406 + 290 = 3306

1

w's продолж. Чистовик.

Граничных узловых точек: $4 \cdot 59 = 236$.

И точки лежащих на данной на прямых $\parallel Ox$ или Oy: $60+60-2 = 118$ и внут. 4 граничных точки (уже посчитаны) =>

На узл. диаг. точку приход: $3600 - 236 - 118 - 4 =$
$= 3242$.

Т.к. если мы берем узловые точки на диагонали друг за другом, то у нас есть повторяющиеся пары двух узл. точек на диагонали => всего таких повт. пар: $\underbrace{1+2+\ldots+57}$ =>

На одну диагональ приходится: $3242 \cdot 58 - (1+\ldots+57)$ узловых точек.

Аналогично для диаг. $y=x$, но мы опять не допишем учитывая повторяющиеся пары точек из первой диаг., т.к. уже есть соотв. ~~одной~~ каждой ~~[illegible] точки~~ диаг. точки из $y=59-x$ и каждой диаг. точки из $y=x$ => $58 \cdot (3242 - (58-2)) - (1+\ldots+57)$

$\Downarrow$

Всего комбинаций:

$3242 \cdot 58 \cdot 2 - 58 \cdot 56 - 2(1+\ldots+57) =$
$\cancel{= 369402}$. 369518

Ответ: ~~369402~~. 369518