Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006233**

ID профиля: **369347**

Вариант 9

черновик

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -3$

$\sqrt{6-x} - \sqrt{x+4} = 3$

$\cancel{10-2}$

$\sqrt{5-\frac{\sqrt{99}}{2}} - \sqrt{5+\frac{\sqrt{99}}{2}}$

$\frac{9}{4}(6-x)(x+4)$

$1 = 4(24+2x-x^2)$

$1 = 96+8x-4x^2$

$x+4 = 5-\frac{\sqrt{99}}{2}$

$4x^2-8x-95=0$

$x = 1-\frac{\sqrt{99}}{2}$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+4\cdot 95 \; 4\cdot 99}}{8} =$

$\sqrt{6-1+\frac{\sqrt{99}}{2}} - \sqrt{5-\sqrt{}}$

$x^2-2x-\frac{95}{4}=0$

$\cancel{1 \pm \sqrt{1+}}$

$\sqrt{5+\frac{\sqrt{99}}{2}} - \sqrt{5-\frac{\sqrt{99}}{2}} = 3$

$\frac{4 \pm 2\sqrt{99}}{4}$

$10-2(25-\frac{99}{2}) = 9$

$1 = 2(25-\frac{99}{4})$

$-4 \le x \le 6$

$1 \pm \frac{\sqrt{99}}{2}$

$\sqrt{\cancel{\frac{55-99}{2}}}$

$2\sqrt{25-\frac{99}{4}}$

$9{,}9 < \sqrt{99} < 10$

$\sqrt{100-99}=1$

$4{,}5 < \frac{\sqrt{99}}{2} < 5$

$4{,}95 < \frac{\sqrt{99}}{2} < 5$

$5{,}95 < 1+\frac{\sqrt{99}}{2} < 6$

$-5 \le -\frac{\sqrt{99}}{2} \le -4{,}95$

$10-2\sqrt{(\ )(\ )} = 4$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2$

$10-2\sqrt{\quad} = 4$

$\cancel{6=2}$

$3 = \sqrt{(\ )(\ )}\ 5\pm$

$\boxed{1 \pm \frac{\sqrt{99}}{2}}$

$9 = 24+2x-x^2$

$9 = \frac{8 \pm \sqrt{64+16\cdot 95}}{8} =$

$= \frac{8 \pm 4\sqrt{4+95}}{8} =$

$1 \pm \frac{\sqrt{99}}{2}$

$x^2-2x-15=0$

$1 \pm \sqrt{1+15}$

$-4 \quad -3 \quad \boxed{5} \quad 6$

1 ± 4

$\sqrt{6-1-\frac{\sqrt{99}}{2}} - \sqrt{}$

$9{,}9^2 = (10-0{,}1)^2 =$

$= 100 - 2\cdot 10\cdot 0{,}1 + 0{,}01 =$

$= 98{,}01 < 99$

$\frac{9{,}9}{2} = 4{,}95$

$-4 < 1-\frac{\sqrt{99}}{2} < -3{,}95$

211006233 (U369347 M1276144)

Черновик

$a \neq 0$, иначе $1=0$

$y = x^2 + 2ax + \left(a^2 + \frac{1}{a}\right)$

$y = 3x - 4$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y_B > \cancel{y} \; 3x_B - 4 \\ y_A < 3x_A - 4 \end{cases} \\ \begin{cases} y_B < 3x_B - 4 \\ y_A > 3x_A - 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\cancel{-2a}$

$-\frac{2a}{2} = \boxed{-a} = x_B$

$a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{1}{a}$

$x_A = a$ $\quad \cancel{4a^2 + \frac{1}{a}}$ $\quad \frac{1}{a} > -3a - 4$

$x_B = -a$ $\quad a > 0 \Rightarrow 1 > -3a^2 - 4a \Rightarrow 3a^2 + 4a + 1 > 0$

$y_A = 2a$ $\quad \Rightarrow (a+1)(3a+1) > 0$

$y_B = \frac{1}{a}$ $\quad \Rightarrow (a+1)\left(a + \frac{1}{3}\right) > 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{1}{a} > 3a - 4 \\ 2a < 3a - 4 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{a} < 3a - 4 \\ 2a > 3a - 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

$-1 \quad -\frac{1}{3} \quad 0$

$\Rightarrow a > 0$

$a < 0 \Rightarrow -1 < a < -\frac{1}{3}$

$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$4y^2 + (8x - 20a)y + 5x^2 - 22ax + 26a^2 = 0$

$y_{1,2} = \frac{10a - 4x \pm \sqrt{(10a - 4x)^2 - 4(5x^2 - 22ax + 26a^2)}}{4} =$

$= \frac{5a - x}{2} \pm \frac{\sqrt{100a^2 - 80ax + 16x^2 - 20x^2 + 88ax - 104a^2}}{4} =$

$= \frac{5a - x}{2} \pm \frac{\sqrt{-4x^2 + 8ax - 4a^2}}{4} =$

$= \frac{5a - x}{2} \pm \frac{2\sqrt{-(x^2 - 2ax + a^2)}}{4} = \frac{5a - x}{2} \pm \frac{\sqrt{-(x-a)^2}}{2}$

$\Rightarrow -(x-a)^2 \geq 0 \qquad -(x-a)^2 \leq 0$

$\Downarrow$

$\Rightarrow \qquad -(x-a)^2 = 0 \Rightarrow x_A = a$

Черновик

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{1}{a} > -3a-4\\ 2a < 3a-4\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{1}{a} < -3a-4\\ 2a > 3a-4\end{cases}\end{array}\right.$$

1) $\begin{cases}\frac{1}{a} > -3a-4 \Rightarrow 1 > -3a^2-4a \Rightarrow 3a^2+4a+1>0 \Rightarrow (a+1)(a+\frac{1}{3})>0\\ a>4 \Rightarrow a>0\end{cases}$

$\boxed{\Rightarrow a>0}$

2) $\begin{cases}\frac{1}{a} < -3a-4\\ a<4\end{cases}$

$a>0$:

$0<a<4$

$1 < \underset{0}{\underset{\wedge}{-3a^2}} \underset{0}{\underset{\wedge}{-4a}} \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow a>0 \Rightarrow a \notin R$

$\Rightarrow a<0$:

$\frac{1}{a}$ $1 > -3a^2-4a \Rightarrow (a+1)(a+\frac{1}{3})>0$

$\Rightarrow a \in (-\infty;-1) \cup (-\frac{1}{3};0) \cup (0;+\infty)$

211006233 (U369347 M1276144)

Чистовик

№ 2

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$ $\quad -4 \le x \le 6$

$\Rightarrow \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} - 2\sqrt{24+2x-x^2} + 4 = 0$

$24+2x-x^2 = (x+4)(6-x)$

$\Rightarrow \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + (\sqrt{x+4})^2 + (\sqrt{6-x})^2 - 2\sqrt{(4+x)(6-x)} + 4 -$

$- (\sqrt{x+4})^2 - (\sqrt{6-x})^2 = 0$

$\Rightarrow \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + (\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x})^2 + 4 - 10 = 0$

Пусть $t = \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x}$

$\Rightarrow t + t^2 - 6 = 0$

$\Rightarrow (t+3)(t-2) = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = 2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -3 \Rightarrow \sqrt{6-x} > \sqrt{x+4} \Rightarrow x < 1 \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2 \Rightarrow \sqrt{x+4} > \sqrt{6-x} \Rightarrow x > -1 \end{array}\right.$

$\Rightarrow 1)\ 10 - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} = 9 \Rightarrow 1 = 2\sqrt{(x+4)(6-x)} \Rightarrow 1 = 4(24+2x-x^2)$

$\Rightarrow 4x^2 - 8x - 95 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16+4\cdot 95}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{99}}{2} < 1$

$\Rightarrow x = 1 - \frac{\sqrt{99}}{2}$

$2)\ 10 - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} = 4 \Rightarrow (x+4)(6-x) = 9$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+15}}{1} = 1 \pm 4 > -1$

$\Rightarrow x = 5$

Ответ: $1 - \frac{\sqrt{99}}{2}$; 5

Чистовик

№ 3

$$26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$$

$$\Rightarrow 4y^2+(8x-20a)y+5x^2-22ax+26a^2=0$$

$$\Rightarrow y_{1,2}=\frac{10a-4x\pm\sqrt{(10a-4x)^2-4(5x^2-22ax+26a^2)}}{4}=$$

$$=\frac{5a-2x}{2}\pm\frac{\sqrt{100a^2-80ax+16x^2-20x^2+88ax-104a^2}}{4}=$$

$$=\frac{5a-2x}{2}\pm\frac{\sqrt{-4x^2+8ax-4a^2}}{4}=\frac{5a-2x}{2}\pm\frac{\sqrt{-(x-a)^2}}{2}$$

$$\Rightarrow -(x-a)^2\geqslant 0\Rightarrow (x-a)^2=0\Rightarrow x=a$$

$$\Rightarrow x_A=a$$

$$\Rightarrow y_A=\frac{5a-2a}{2}=\frac{3a}{2}$$

$a\neq 0$, иначе $1=0$

$$\Rightarrow y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow x_B=\frac{-2a}{2}=-a$$

$$\Rightarrow y_B=a^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y_B>3x_B-4\\ y_A<3x_A-4\end{cases}\\ \begin{cases}y_B<3x_B-4\\ y_A>3x_A-4\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{1}{a}>-3a-4\\ \frac{3a}{2}<3a-4\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{1}{a}<-3a-4\\ \frac{3a}{2}>3a-4\end{cases}\end{array}\right.$$

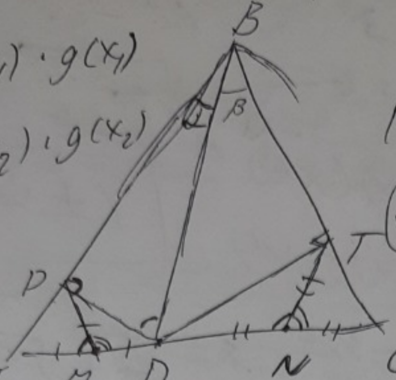
211006233 (U369347 M1276144)

Черновик

$x_1 < x_2$

$f(x_1)\cdot g(x_1)$

$f(x_2)\cdot g(x_2)$



$x_1 < x_2;$

$f(x_1) < f(x_2)$

$g(x_1) > g(x_2)$ $\sqrt{x+4}\uparrow$ $\sqrt{6-x}\downarrow$

$(\sqrt{x+4})^2$ ~~$2 + 2\sqrt{x+4}$~~

$x+4$ $4\cdot 6 + 2x - x^2$

$10 - 2\sqrt{x+4}\sqrt{6-x}$

$(x+4)(6-x) = =$

$(\sqrt{x+4})^2 - 2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x} + (\sqrt{6-x})^2$

$= -x^2 + 2x + 24$

$x+4+6-x = 10$ $x = 6-t$ $t = 6-x$

$C\uparrow$ $(\uparrow\sqrt{x+4} + \sqrt{6-x}\uparrow + 4) = 2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x}$

a b

$\sqrt{6-x} = t,\ t > 0$

$6 \geq x \geq -4$

$36S$ $6-x = t^2$

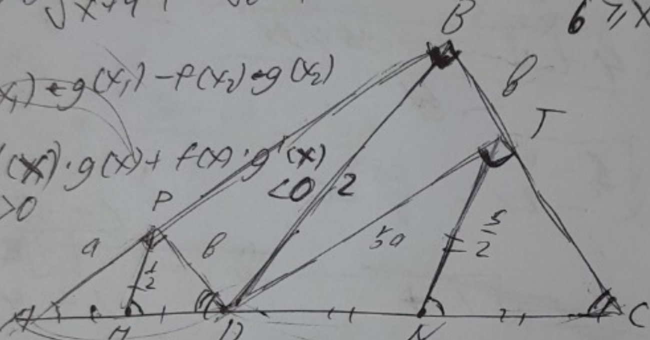
$x = 6 - t^2$

$\sqrt{10-t} - \sqrt{t} + 4 = 2\sqrt{10-t}\sqrt{t}$

$f(x_1)\cdot g(x_1) - f(x_2)\cdot g(x_2)$

$(f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

>0 <0



$a - b + 4 = 2ab$

$a - 2ab - b + 4 = 0$

CX 6 5x

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 10 - 2\sqrt{x+4}$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 10 - 2\sqrt{4+x}\sqrt{6-x} + 4 - 10 = 0$

$AC = 6$

$\frac{abc}{4S} = S = \frac{ab}{2}$

$c = 1$

$a - ab - ab - b$

~~$a(1-b)$~~

$\sqrt{b^2 + 25a^2} = 2$

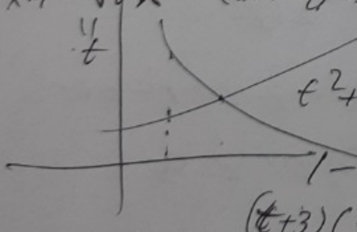
$b^2 + 25a^2 = 4$

$f(x_1) \cdot g(x_1)$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + (\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x})^2 - 6 + 8 = 1$

$b^2 + 25a^2 = 4$

$a(1-b) - b(a+1)$



$24a^2 = 3$

$t^2 + t - 6 = 0$ $a^2 = \frac{1}{8}$

$24a^2 = 3$

$1 - \frac{1}{8}$ $a = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$a^2 = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$(t+3)(t-2) = 0$ $\frac{ab}{2}$

$0 - 2$ -2

$\sqrt{10}$ > 3

$b = \sqrt{\frac{7}{8}}$ $\Rightarrow$ $\frac{ab}{2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{8}}\cdot\sqrt{\frac{7}{8}}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{8\cdot 2} = \boxed{\frac{\sqrt{7}}{16}}$

x_1

$-4 \leq x \leq 6$ $-x_1$ $36\cdot\frac{\sqrt{7}}{16} = \boxed{\frac{9}{4}\sqrt{7}}$

$6-x \geq x+4$

$2 \geq 2x$

$4+5$ $-x_1^2$ $-x_2^2$

a^2

$1 \geq x$

$\left[\begin{array}{l}\uparrow\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -3 \quad \downarrow\sqrt{6-x} - \sqrt{x+4} = 3 \\ \uparrow\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2 \leftarrow \boxed{x=5}\end{array}\right.$

$3 - 1 = 2$

$(10 - 2\sqrt{6-x}\sqrt{x+4}) = 9$

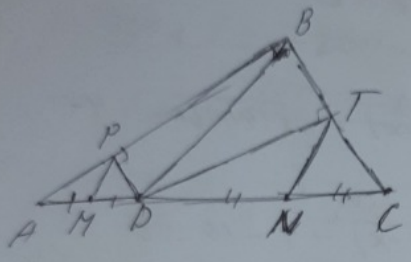
$1 = 2\sqrt{(6-x)(x+4)}$

-3

$1 = 4(24 + 2x - x^2$

Чистовик

№1



1) BD - диаметр $\Rightarrow$

$\angle BPD = \angle BTD = \frac{\pi}{2}$;

~~$\angle PMD = \angle$~~ $AM = MD \Rightarrow PM$ - медиана,

~~$\Rightarrow PM =$~~ $\angle APD = \frac{\pi}{2} \Rightarrow PM = \frac{AD}{2} = MD$;

Аналогично, $TN = NC$,

$\angle PMD = \angle TNC$ как соответственные при $PM \parallel TN$, MN - секущей;

$\Rightarrow \angle PDM = \frac{\pi - \angle PMD}{2} = \frac{\pi - \angle TNC}{2} = \angle TCD = \angle BCA$;

$\Rightarrow \angle ABC = \pi - \angle BCA - \angle BAC = \pi - \angle PAD - \angle PDA = \angle APD = \frac{\pi}{2}$;

2) $PM = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 2PM = 1$; Аналогично, $CD = 5$

$\Rightarrow AC = AD + DC = 6$;

$\triangle APD \sim \triangle ABC$ ($\angle BAC$ - общий, $\angle APD = \angle ABC = \frac{\pi}{2}$ по доказанному выше) $k_{\frac{ABC}{APD}} = \frac{AC}{AD} = 6 \Rightarrow S_{ABC} = k^2 S_{APD} = 36 S_{APD}$

$\Rightarrow k = \frac{AB}{AP} = \frac{AP + PB}{AP} \Rightarrow k - 1 = \frac{PB}{AP} \Rightarrow PB = 5AP$;

$\left.\begin{array}{l} BD^2 = PB^2 + PD^2 = 25AP^2 + PD^2 = 4; \\ AP^2 + PD^2 = AD^2 = 1 \end{array}\right\}$ по т. Пифагора

$\Rightarrow 24AP^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow AP^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow AP = \frac{1}{\sqrt{8}}$

$\Rightarrow PD = \sqrt{1 - \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{7}{8}}$

$S_{APD} = \frac{AP \cdot PD}{2} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{8}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{16}$

$\Rightarrow S_{ABC} = 36 \cdot \frac{\sqrt{7}}{16} = \frac{9}{4}\sqrt{7}$

Ответ: 1) $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$; 2) $S_{ABC} = \frac{9}{4}\sqrt{7}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006233**

ID профиля: **369347**

Вариант 9

Черновик

1	1
-1	-1
-1	1
1	-1

$$\frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2$$

$$x^4+y^4+3x^2y^2 = 5$$

$a,\ b \geq 0$

$$\frac{2}{a+b} + ab = 2$$

$$a^2+b^2+3ab=5$$

$$(a+b)^2 = 5-ab$$

$$(a+b)^2 = \frac{2}{a+b} - 3$$

$$\cancel{(a+b)^3+3(a+b)-2=0}$$

$$\cancel{2}(a+b) = -2 \quad \cancel{a+b=1}$$

$$2 + ab(a+b) = 2(a+b)$$

$$\cancel{2+ab}$$

$$2 \mp (2-ab)\sqrt{5-ab}$$

t

$$\frac{t^3-9t^2+24t-16)}{2} = (2-t)\sqrt{5-t} \quad (t-1)(t-4)^2$$

$$(t-1)(t^2-8t+16)\frac{4}{5-t} = 4-4t+t^2$$

$$(t^3-9t^2+24t-16) \quad 4 = 20-20t+5t^2-4t+4t^2-t^3$$

$$0 = 16-24t+9t^2-t^3$$

$$t^3-9t^2+24t-16=0$$

$$t=1 \qquad 1-9+24-16=0$$

$$(a+2\cdot a\cdot\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{a})=0$$

$$(a-\tfrac{1}{a})^2=0$$

$$a+\frac{1}{a}=2 \qquad a=\frac{1}{a}$$

$$b=\frac{1}{a} \Rightarrow a^2=1$$

$a+b=2 \quad a>0$

$ab=1$

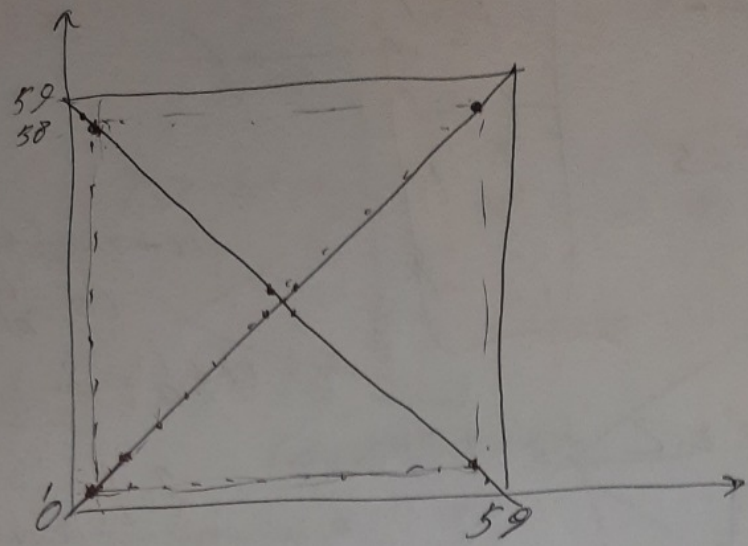
$\Rightarrow a=1$

$\Rightarrow \cancel{a} \qquad \Rightarrow b=1$

$ab=4$

$\Rightarrow ab=1$

$$\left[\begin{aligned} ab&=1 \\ ab&=4 \end{aligned}\right.$$



$58 \cdot 58$

$58 \cdot 58 - 1 - 2 \cdot 57 - 3 \cdot 57 - 56$

$2 \cdot 58 \cdot (58 \cdot 58 - 1 - 3 \cdot 57 - 56)$

$2 \cdot 58 \cdot (58 \cdot 58 - 4 \cdot 57)$

$\times \begin{array}{r} 6385 \\ 58 \\ \hline 51080 \\ 31925 \\ \hline 370330 \end{array}$

$+ \frac{8 \cdot 58 \cdot (2 \cdot 58 - 3)}{8}$

$58(2 \cdot 58^2$

$\times \begin{array}{r} 6385 \\ 58 \\ \hline 51080 \\ 31925 \\ \hline 370330 \end{array}$

$2 \cdot 58 - 8 \cdot 57 \quad + 58 \cdot (2 \cdot 58 - 3)$

$\times \begin{array}{r} 638 \\ 58 \\ \hline 5104 \\ 3190 \\ \hline 37004 \end{array}$

$\boxed{36999}$

$\times \begin{array}{r} 58 \\ 58 \\ \hline \end{array}$

1004
108

$58 \cdot (2 \cdot 58^2 - 8 \cdot 57 + 2 \cdot 58 - 3)$

$638 : 11 = 58$
55
88

$C^2_{58^2}$ $\frac{58^2 \cdot (58^2 - 1)}{2}$

$2 \cdot 58^2 - 8(58 - 1) + 2 \cdot 58 - 3)$

$58(2 \cdot 58 - 6)$

$\frac{(58^2)!}{}$

$2 \cdot 58^2 - 6 \cdot 58 + 5$

$(60-2)^2 = 3600 - 240 + 4$

58

$2 \cdot 160$
36

$\frac{57 \cdot 58^2 \cdot 59}{2}$

$3400 - 40 + 4$

3364

$\times \begin{array}{r} 58 \\ 58 \\ \hline 464 \\ 290 \\ \hline 3364 \end{array}$

$\times \begin{array}{r} 638 \\ 58 \\ \hline 5104 \\ 3190 \\ \hline 37004 \end{array}$

Черновик

$$\begin{cases} \frac{1}{a} > -3a-4 \\ \frac{3a}{2} < 3a-4 \end{cases} \Rightarrow 3a^2+4a+1>0 \quad \Rightarrow a > 8 > 0$$

$(a+1)(3a+\frac{1}{3})>0$

$a<0$

$1 > -3a^2-4a$

$$\begin{cases} \frac{1}{a} < -3a-4 \\ \frac{3a}{2} > 3a-4 \end{cases}$$

$a > \frac{8}{3}$

$\frac{8}{3} > a$

$8 > a > 0$

$(-\infty;-1) \cup (-\frac{1}{3};0) \cup (\frac{8}{3};+\infty)$

~~$(0;8) \cup (8;+\infty)$~~

$a<0$

~~$3a^2+4a+1<0$~~

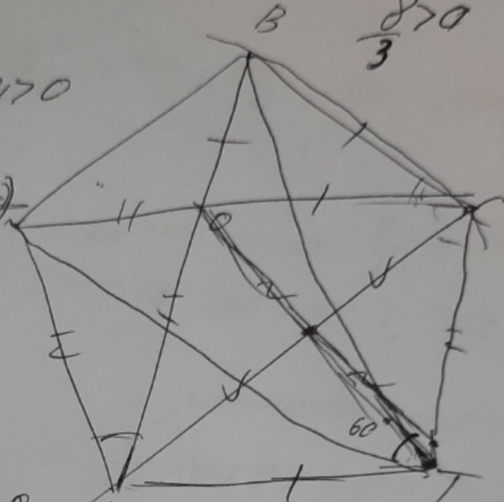
$3a^2+$

$\sqrt{9+49+2\cdot 3\cdot 7\cdot}$

$21+49$

$\sqrt{79}$

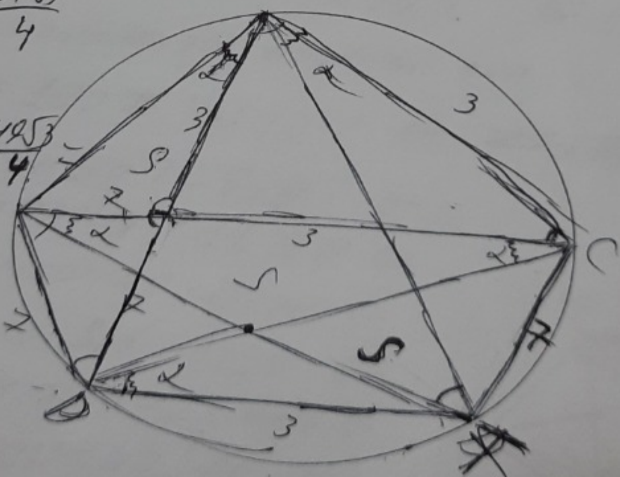
$\frac{AB^3}{4R}$



$S = \frac{3\cdot 7\cdot \sin\frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{3\cdot 7}{2}\cdot \sin\frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{7\sqrt{3}}{13} = \frac{13}{7\sqrt{3}} =$

$S = \frac{79\sqrt{3}}{4}$ $S = \frac{21\sqrt{3}}{4}$



$\frac{13}{14} = \frac{\sqrt{3}}{8}\,ctg\alpha$

$S_{ABCD} = 2S + \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{49\sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{42\sqrt{3}+9\sqrt{3}+49\sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{100\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\frac{20-7}{14}$

$\frac{10}{7} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,ctg\alpha$

$0,79$

$27\ 02\ 2021 =$

$389021 = (1\cdot 8+4+8)(\frac{7}{\sin\alpha})$

$\frac{10}{\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)} = 100$

$\frac{10}{7} = \cos\frac{\pi}{3} + \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{tg\alpha}$

$=$

$18\ 48\ 27 =$

$(27+0-2)(2+0+2\cdot 1) = 100$

$4 = 100$

$\frac{\sin\alpha}{\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)}$

$\frac{10}{7} = 2\cos\frac{\pi}{3} + 2$

$2\cdot 7^{0+2} + 2\cdot 0+2$

$27\ 02\ 2021$

$.2\cdot 49 = 98 + 0 + 2 = 100$

$0\ 2\ 2\ 2021 = 28$

2^7

128

211006233 (U369347 M1276145)

Чистовик

№1

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 5 \end{cases}$$ ~~$a = x^2; b = y^2$~~

~~Аргх~~ Заметим, что если пара $(x_0; y_0)$ являетется решением, то и пара $(y_0; x_0)$ также является решением

Пусть $x=0$. Тогда $\frac{2}{y^2} = 2 \Rightarrow y^2 = 1$

$\Rightarrow y^4 = 1 = 5$ не может быть $\Rightarrow x \neq 0$

Аналогично, $y \neq 0$

Пусть $x^2 = a$; $y^2 = b$; $a, b > 0$ ($a, b \neq 0$ по доказанному выше)

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{a+b} + ab = 2 \\ a^2+b^2+3ab = 5 \Rightarrow (a+b)^2 = 5-ab \end{cases}$$

$a+b > 0 \Rightarrow a+b = \sqrt{5-ab}$

$\Rightarrow 2 = (2-ab)\sqrt{5-ab}$

$\sqrt{5-ab} > 0 \Rightarrow 2-ab > 0 \Rightarrow 2 > ab = t$

$2 = (2-t)\sqrt{5-t} \Rightarrow \frac{4}{5-t} = 4-4t+t^2$

$\Rightarrow 4 = 20-20t+5t^2-4t+4t^2-t^3$

$\Rightarrow t^3-9t^2+24t-16 = 0$

$t=1$: $1-9+24-16=0$

$\Rightarrow t^3-9t^2+24t-16 = (t-1)(t^2-8t+16) = (t-1)(t-4)^2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=4 \end{array}\right. \\ t<2 \end{cases} \Rightarrow t=1 \Rightarrow a+b = \sqrt{5-1} = 2;\ ab=1$$

$\Rightarrow a - 2\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{a} = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow b = 1$

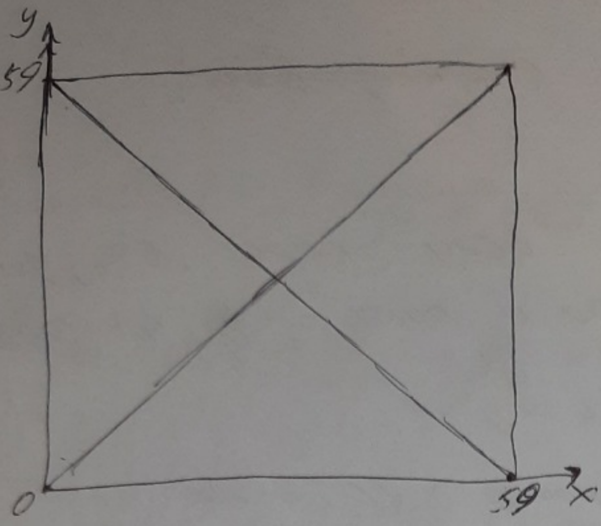
$\Rightarrow (x;y) \in \{(1;1); (-1;1); (1;-1); (-1;-1)\}$

Ответ: $(1;1)$; $(-1;1)$; $(1;-1)$; $(-1;-1)$

211006233 (U369347 M1276145)

Чистовик

№2



Заметим, что так как сторона квадрата равна $59 \not\vdots 2$, центральная точка имеет нецелые координаты. ~~Значит,~~ Подсчитаем количество выборов, когда ровно одна из точек лежит на диагонали:

$$n_1 = (58\cdot 58 - 1 - 2\cdot 57 - (57+56))\cdot 58$$

всего точек; выбранная первая точка на диагонали; запрет на точки в той же строке или столбце; запрет на точки на диагоналях; способы выбора первой точки

$$\Rightarrow n_1 = 2\cdot 58\cdot(58^2 - 4\cdot 57)$$

Теперь подсчитаем количество выборов, когда обе точки на диагоналях:

способов выбора первой точки; выбранная первая точка

$$n_2 = \frac{2\cdot 58\,(2\cdot 58 - 1 - 2)}{2}$$

запрет на точки в той же строке или столбце (2, т.к. центральной нет)

каждая пара посчитана дважды

$$\Rightarrow n = n_1 + n_2 = 2\cdot 58(58^2 - 4\cdot 57) + 58\cdot(2\cdot 58 - 3) =$$

$$= 58(2\cdot 58^2 - 8\cdot(58-1) + 2\cdot 58 - 3) = 58\cdot(2\cdot 58^2 - 6\cdot 58 + 5) =$$

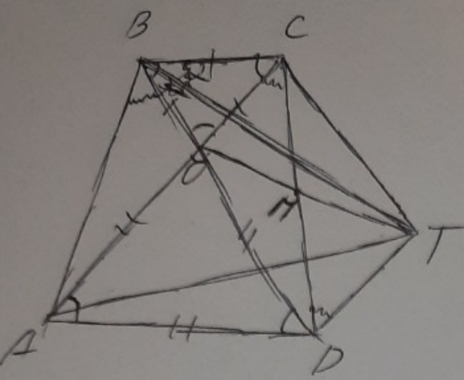
$$= 58(2\cdot 58\cdot(58-3) + 5) = 58\cdot(2\cdot 58\cdot 55 + 5) = 58(58\cdot 110 + 5) =$$

$$= 58\cdot(6380 + 5) = 58\cdot 6385 = 370330$$

Ответ: ~~370330~~ 370330

Чистовик

№3



а) $\angle BCA = \angle BDA = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow ABCD$ - вписанный;

$OM = MT$, $CM = MD \Rightarrow OCTD$ - параллелограмм

$\Rightarrow \cancel{OD=}\ CT = OD = AD$, $AC \parallel DT$

$\Rightarrow ACTD$ - р/б трапеция

$\Rightarrow ACTD$ - вписанный

$\Rightarrow ABCTD$ - вписанный

$\Rightarrow \angle ATB = \angle BCA = \frac{\pi}{3}$ как вписанные

~~Пусть $\angle CBT = \alpha$~~ $\Rightarrow \angle CDT = \angle CBT$ как вписанные

$\angle CDT = \angle ACD$ как накрест лежащие для $AC \parallel DT$, CD-секущей; $\angle ACD = \angle ABD$ как вписанные

$\Rightarrow \angle CBT = \angle ABD \Rightarrow \angle ABT = \angle ABD + \angle DBT = \angle CBT + \angle DBT = \angle DBC = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \triangle ABT$: $\angle ABT = \angle ATB = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \angle BAT = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABT$ - равносторонний

ч.т.д.

б) $\triangle AOB = \triangle DOC$ ($AO = OD$; $BO = OC$; $\angle AOB = \angle DOC$ как вертикальные)

$\Rightarrow S_{AOB} = S_{DOC} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot AO \cdot \sin\angle AOB = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot AO \cdot \sin\angle AOD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{21\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{DOC} + S_{BOC} + S_{AOD} = \frac{42\sqrt{3}}{4} + \frac{3^2\sqrt{3}}{4} + \frac{7^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(42+9+49)\sqrt{3}}{4} = \frac{100\sqrt{3}}{4}$

$AB = \sqrt{OB^2 + OA^2 - 2 \cdot OB \cdot OC \cdot \cos\angle AOB} = \sqrt{9+49+2\cdot 3\cdot 7\cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{79}$

$S_{ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow k = \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79}{100} = 0{,}79$

Ответ: $k = 0{,}79$

211006233 (U369347 M1276145)