Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

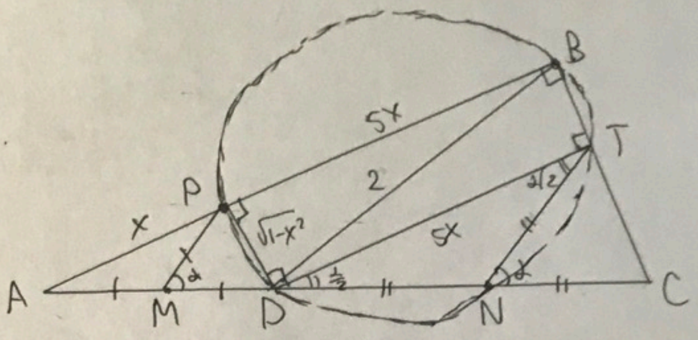
Шифр: **211006206**

ID профиля: **884505**

Вариант 9

Чистовик №1

① Дано: $\triangle ABC$ $PM \parallel TN$
M, N - серед. AD и CD соотв
BD - диаметр окр ω
$MP = \frac{1}{2}$ $NT = \frac{5}{2}$ $BD = 2$
Найти: $\angle ABC$, S_{ABC}



Т.к. BD - диаметр, то $\angle BPD = \angle BDT = 90°$ по св-ву диам.

Тогда $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ являются прямоугольными.
Тогда $AM = MD = MP$ и $DN = NC = NT$ по свойству медианы, опущ. из прямого угла

Пусть $\angle PMD = \angle TNC = \alpha$ (т.к. $MP \parallel NT$) $\Rightarrow$ $\angle MDP = \angle MPD = \frac{180° - \alpha}{2}$

(т.к. $\triangle PMD$ - р/б) и ~~[illegible]~~ $\angle TDN = \angle DTN = \frac{\alpha}{2}$ (по св-ву внешнего угла) $\Rightarrow$ $\angle PDT = 180° - \angle PDM - \angle TDN = 180° - \frac{180° - \alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 90°$ $\Rightarrow$

$\angle ABC = 360° - \angle BPD - \angle BTD - \angle PDT = 360° - 90° - 90° - 90° = 90°$

$AC = 2MP + 2NT = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{5}{2} \cdot 2 = 6$ (следует из равенства отрезков в прям. треуг.), $AD = 2MP = 1$, $DC = 2NT = 5$

$\angle TCD = 90° - \angle TDC = 90° - \frac{\alpha}{2} = \angle PDA$, $\angle APD = \angle DTC = 90°$ $\Rightarrow$ ~~$\triangle APD \sim \triangle$~~

$\Rightarrow$ $\triangle APD \sim \triangle DTC$ по 2 углам $\Rightarrow$ $\frac{AP}{DT} = \frac{PD}{TC} = \frac{AD}{DC} = \frac{1}{5}$ $\Rightarrow$ $AP = x$, $DT = 5x$

По т. Пифагора: $PD = \sqrt{AD^2 - AP^2} = \sqrt{1 - x^2}$
$PD^2 + PB^2 = DB^2 = 4$ т.к. $PB = DT$ ($PBTD$ - прямоуг.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $PD^2 + DT^2 = 4$

$1 - x^2 + (5x)^2 = 4$
$1 - x^2 + 25x^2 = 4$ $24x^2 = 3$ $x^2 = \frac{1}{8}$ $x = \sqrt{\frac{1}{8}}$

211006206 (U884505 M1276362)

Чистовик №2

① Продолжение:

$AB = x + 5x = 6x$ ~~$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \frac{\sqrt{7}}{3}$~~

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle PAD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} \cdot 6 \cdot \sqrt{\frac{7}{8}} = 18 \cdot \frac{\sqrt{7}}{8} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$

$\sin\angle PAD = \frac{PD}{AD} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{8}}}{1} = \sqrt{\frac{7}{8}}$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$

$S_{ABC} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$

211006206 (U884505 M1276362)

Чистовик №3

2) $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

ОДЗ: $x+4 \geq 0$
$6-x \geq 0$
$\Downarrow$
$x \in [-4;6]$

Заметим следующее: $x+4+(6-x)=10$

$(x+4)(6-x) = 6x - x^2 + 24 - 4x = 24 + 2x - x^2$

Пусть $a = x+4$ и $b = 6-x$

Тогда:

$\begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} + 4 = 2\sqrt{ab} \\ a+b=10 \end{cases}$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 2\sqrt{ab} - 4 \quad \uparrow^2$

$a - 2\sqrt{ab} + b = 4ab - 16\sqrt{ab} + 16$

$10 = 4ab - 14\sqrt{ab} + 16$

$4ab - 14\sqrt{ab} + 6 = 0$

$2ab - 7\underset{\geq 0}{\sqrt{ab}} + 3 = 0$

$t^2 = ab \geq 0$

$2t^2 - 7t + 3 = 0$

$D = 49 - 2\cdot 3\cdot 4 = 25 = 5^2$

$t_1 = \frac{7+5}{2\cdot 2} = 3 \quad t_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{ab} = 3 & 1) \\ \sqrt{ab} = \frac{1}{2} & 2) \end{array}\right.$ $\quad (a, b \neq 0)$

При $x = -3$:

$1 - 3 + 4 = 2\sqrt{1\cdot 9}$

$2 \neq 6 \Rightarrow x = -3$ не подход.

При $x = 5$:

$3 - 1 + 4 = 2\sqrt{9\cdot 1}$

$3 = 3$ - верно

1) $\begin{cases} a+b=10 \\ \sqrt{ab} = 3 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{9}{b}$

$\frac{9}{b} + b = 10 \quad b^2 - 10b + 9 = 0 \quad D = 10^2 - 9\cdot 4 = 64 = 8^2$

$b_1 = 1 \quad b_2 = 9$

$a_1 = 9 \quad a_2 = 1$

$6 - x = 1$

$x = 5$

$x + 4 = 9$

$x = 5$ – верно

$6 - x = 9$

$x = -3$

2) $\begin{cases} a+b=10 \\ \sqrt{ab} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad a = \frac{1}{4b}$

$\frac{1}{4b} + b = 10$

$4b^2 + 1 = 40b$

$4b^2 - 40b + 1 = 0$

$D = 40^2 - 4\cdot 4 =$

$= 1600 - 16 = 16\cdot 99 = 16\cdot 9\cdot 11$

211006206 (U884505 M1276362)

Чистовик №4

(2) Продолжение:

$b_1 = \frac{40+\sqrt{16\cdot 9\cdot 11}}{8}$ $\quad b_2 = \frac{40-\sqrt{16\cdot 9\cdot 11}}{8}$

$40 \vee 12\sqrt{11} \quad |^2$

$1600 \vee 144\cdot 11$

$1600 \vee 1584$

$>$

$\times\begin{array}{r} 144 \\ 11 \\ \hline 144 \\ 144 \\ \hline 1584 \end{array}$

$b_1 = \frac{40+12\sqrt{11}}{8} > 0$ $\quad b_2 = \frac{40-12\sqrt{11}}{8} > 0$

$a_1 = 10 - \frac{40+12\sqrt{11}}{8} = \frac{40-12\sqrt{11}}{8}$

$a_2 = \frac{40+12\sqrt{11}}{8}$

$x = 6 - \frac{40+12\sqrt{11}}{8} = \frac{8-12\sqrt{11}}{8}$ $\quad x = 6 - \frac{40-12\sqrt{11}}{8} = \frac{8+12\sqrt{11}}{8}$

Проверка: $\sqrt{ab} = \frac{1}{2}$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 4 = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$ $\quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = -3 < 0 \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b} \Rightarrow a < b \Rightarrow$

случай с a_2 и b_2 не подходит т.к. $b_2 < a_2$, а $b_1 > a_1$ - подходит

~~Проверка: $\sqrt{ab}=$~~

Ответ: $x = 5$, $x = \frac{8-12\sqrt{11}}{8}$

211006206 (U884505 M1276362)

Чистовик №5

3. $26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$

Рассмотрим кв. ур. относ a:

$26a^2-a(22x+20y)+5x^2+8xy+4y^2=0$

$D=(22x+20y)^2-\overset{104}{26\cdot 4}(5x^2+8xy+4y^2)=$

$=484x^2+880xy+400y^2-520x^2-832xy-416y^2=$

$=-36x^2+48xy-16y^2=-((6x)^2+2\cdot6\cdot4xy+(4y)^2)=-(6x+4y)^2\leq 0$

Если решения есть, то $D\geq 0 \Rightarrow -(6x+4y)^2\geq 0 \Rightarrow$

$-(6x+4y)^2=0 \Rightarrow 6x+4y=0 \quad = 3x=-2y$

$a=\dfrac{22x+20y}{52}=\dfrac{22x-30x}{52}=\dfrac{-8x}{52}=\dfrac{-2x}{13}$

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$

$a=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow$

$3\cdot0-0<4$ точка $(0;0)$ лежит вне прямой $3x-y=4$ не подходит

$a\neq 0$

разделим на a

$x^2+2ax-y+a^2+\dfrac{1}{a}=0$

$y=x^2+2ax+a^2+\dfrac{1}{a}$

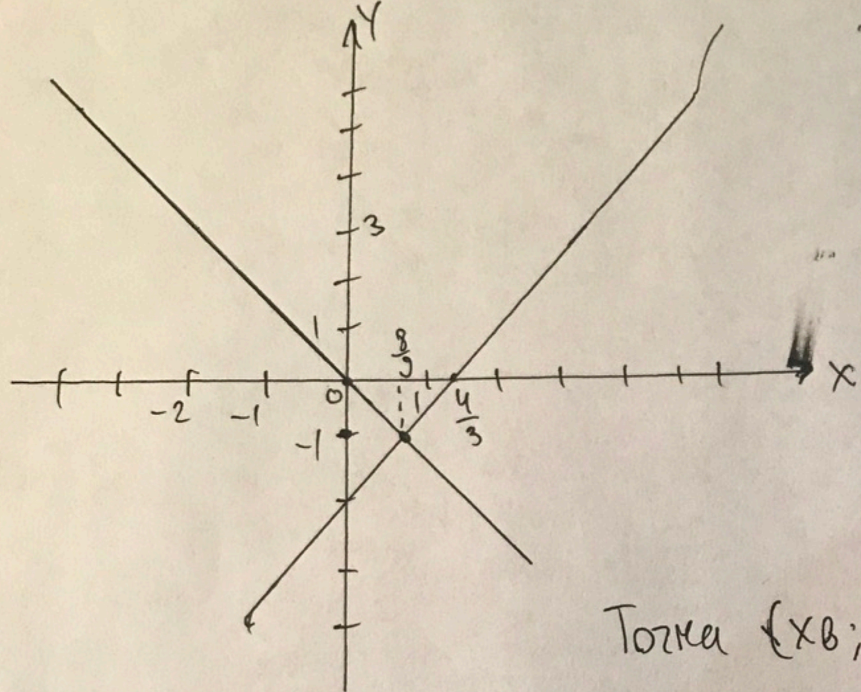
$x_в=\dfrac{-2a}{2}=-a \quad y_в=a^2-2a^2+a^2+\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{a}$

211006206 (U884505 M1276362)

Чистовик №6

③ Продолжение

$$3x - y = 4 \Rightarrow y = 3x - 4$$



$$3x = -2y$$

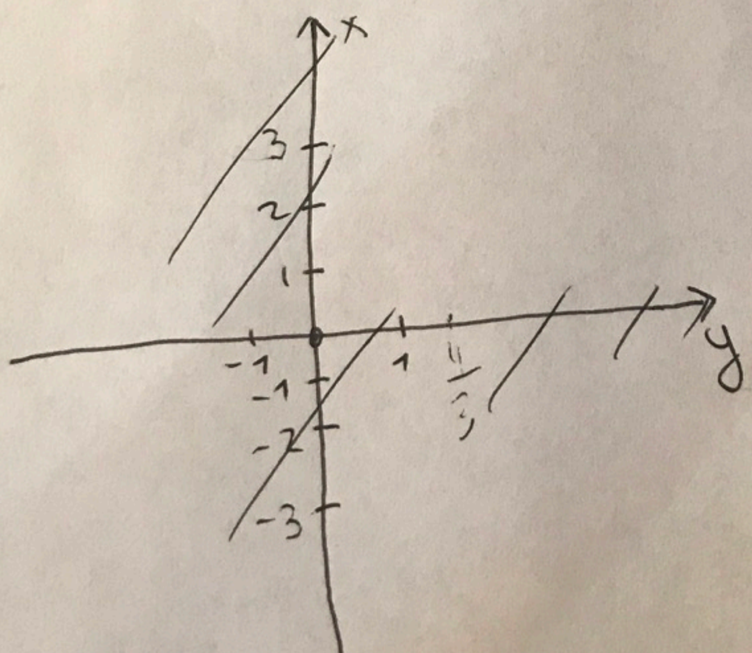
$$y = -\frac{3}{2}x$$

$$-\frac{3}{2}x = 3x - 4$$

$$4 = \frac{3x}{2} + 3x = \frac{9x}{2}$$

$$x = \frac{8}{9}$$

Точка $(x_B; y_B) = \left(-a; \frac{1}{a}\right) = \left(\frac{2x}{13}; \frac{13}{-2x}\right)$



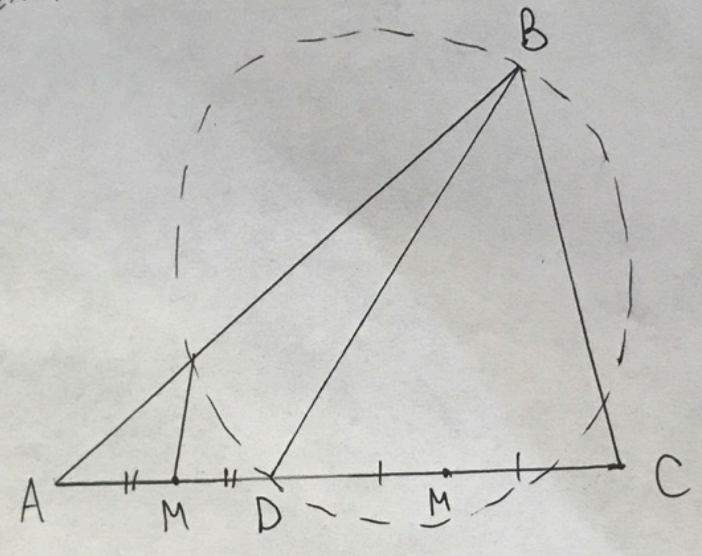
Черновик

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$ $\quad x \in [-4; 6]$

$(x+4)(6-x) = 24+2x-x^2$ $\quad 6x - x^2 + 24 - 4x = 24 + 2x - x^2$

$1-3+4=2$

$1-3+4=2$



$\begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{b} + 4 = 2\sqrt{ab} \\ a+b=10 \end{cases}$ $\uparrow^2$

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = 2\sqrt{ab} - 4$

$a+b-2\sqrt{ab} = 4ab - 16\sqrt{ab} + 16$

10

$6ab - 16\sqrt{ab} + 6 = 0$

$3ab - 8\sqrt{ab} + 3 = 0$

$D = 64 - 3 \cdot 3 \cdot 4 = 28$

$ab = \frac{8 \pm \sqrt{28}}{6}$

$10 = 4ab - 14\sqrt{ab} + 16$

$2ab - 7\sqrt{ab} + 3 = 0$

$D = 49 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 25 = 5^2$

$\sqrt{ab} = \frac{7 \pm 5}{4} = 3; \frac{1}{2}$

$b(10-b) = \frac{1}{4}$

$4b(10-b) = 1$

$40b - 4b^2 = 1$

$4b^2 - 40b + 1 = 0$

$D = 1600 - 16 =$

$b(10-b) = 9$

$b^2 - 10b + 9 = 0$

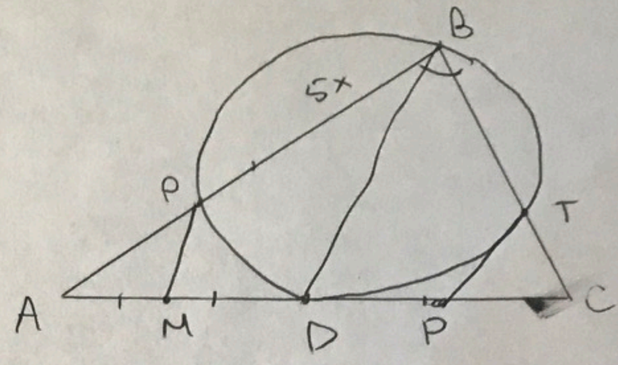
$b=1 \quad b=9$

$a=9 \quad a=1$

①

~~Чистовик~~ ~~①~~

Черновик №1



$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 22 \\ \times 40 \\ \hline 880 \end{array}$$

$$26a^2 - a(22x+20y) + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$$

$$D = (22x+20y)^2 - 104(5x^2+8xy+4y^2) =$$

$$= 484x^2 + 880xy + 400y^2 - 520x^2 - 832xy - 416y^2 =$$

$$= -36x^2 + 48xy - 16y^2 = -\left((6x)^2 + 2\cdot 6\cdot 4xy + (4y)^2\right) =$$

$$= -(6x+4y)^2 \le 0$$

$$a = \frac{22x+20y}{52}$$

$$6x + 4y = 0$$

211006206 (U884505 M1276362)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006206**

ID профиля: **884505**

Вариант 9

Чистовик (11) Вариант #9

(4) $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=5 \end{cases}$

Замена: $x^2+y^2=a>0$

$x^2y^2=b\geq 0$

Заметим также, что если $(x;y)$ - решение, то и $(-x;y)$; $(x;-y)$; $(-x;-y)$ - решение

$\begin{cases} \dfrac{2}{a}+b=2 \\ a^2+b=5 \end{cases}$ $b=2-\dfrac{2}{a}$

$a^2+2-\dfrac{2}{a}=5 \quad | a\neq 0$

$a^3-3a-2=0$

	1	0	-3	-2
2	1	2	1	0

$a=2$ корень

$a^3-3a-2=(a-2)(a^2+2a+1)=(a-2)(a+1)^2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-1<0 \Rightarrow \text{не подходит} \end{cases}$

при $a=2 \Rightarrow b=1$

$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \end{cases}$

Рассмотрим $x\geq 0$ и $y\geq 0$:

$\cancel{\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ xy=1 \end{cases} \Rightarrow 2xy=2 \quad x^2-2xy+y^2=0 \quad (x-y)^2=0 \Rightarrow x=y}$

$\begin{cases} (x^2+y^2)^2=4 \\ 4x^2y^2=4 \end{cases}$ $x^4+2x^2y^2-4x^2y^2+y^4=4-4=0$

$(x^2-y^2)^2=0 \Rightarrow x^2=y^2 \Rightarrow 2x^2=2$

$x^2=1$

Имеем: $x^2=y^2=1$

Тогда из симметрии решений имеем:

$(1;1)$; $(1;-1)$; $(-1;1)$; $(-1;-1)$ Ответ:

~~[illegible]~~ Чистовик (2)

(6) Дано: ABCD - 4хугол.

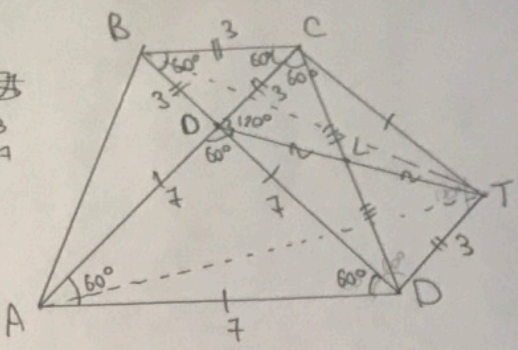
~~$\triangle BOC$ и $\triangle COD$ - р/с~~

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правил. $BC=3$, $AD=7$

T симметрич. относ серед CD

Док-ть: ABT - прав

Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$



Т.к. $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильные, то $\angle BCO = \angle OAD = 60°$ => $BC \parallel AD$ (накр. леж. углы)

$\triangle BOA = \triangle COD$ т.к. $BO=OC$, $AO=OD$, $\angle BOA = \angle COD$ (по углу и 2 сторонам) => $AB=CD$

Тогда ABCD - прав.трапеция ($AD \parallel BC$, $AB=CD$)

$L = OT \cap CD$ т.к. $OL=LT$ и $CL=LD$, то CODT - параллелограмм по св-ву => $OD=CT$, $CO=DT$

$\angle COD = 120°$ => $\angle TDO = 180°-120°=60°$ => $\angle ADT = 60°+60°=120°$

$\angle COD = \angle CTD = 120°$ (по св-ву параллелогр.)

$\triangle ADT = \triangle CTD$ т.к. $AD=OD=CT$, DT - общая ст. $\angle ADT = \angle CTD = 120°$ => => $AT=CD$

~~$\angle DCT = \angle A$~~ $\angle OCT = \angle ADO = 60°$ (т.к. $OD \parallel CT$)

Аналогично $\triangle BCT = \triangle CTD$ (CT - общая ст., $BC=DT$, $\angle BCT = 60°+60° = 120°$) $= \angle CTD$

=> $BT=CD$. Из всего => $BT=AT=AB$ => $\triangle ABT$ - правильный

211006206 (U884505 M1276363)

~~Черновик~~ Чистовик 3

6 Продолжение:

По т. косинусов: $AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2AD\cdot DT\cos 120^\circ =$

$= 7^2+3^2-2\cdot 7\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 49+9-42\left(-\frac{1}{2}\right) = 58+21=79$

$AT=\sqrt{79}$

$S_{ABT} = \frac{1}{2}\cdot AT\cdot AT\cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{79}\cdot\sqrt{79}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = S_{BOC}+S_{AOD}+S_{BOA}+S_{COD} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 7\sin 60^\circ+$

$+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 7\cdot\sin 120^\circ+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 7\cdot\sin 120^\circ = \frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{49}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{21}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 =$

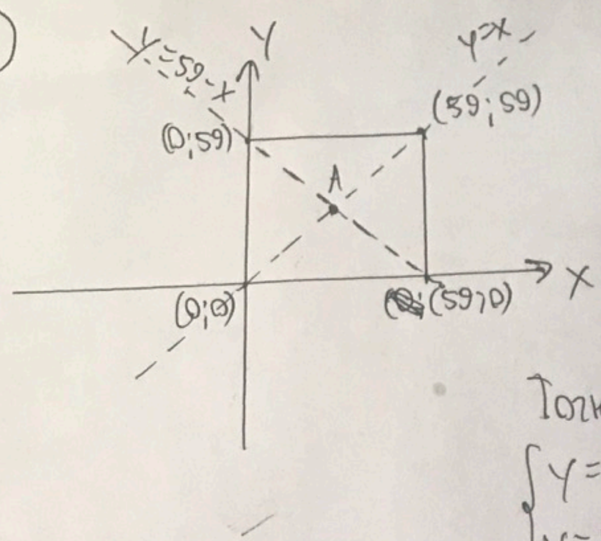
$= 29\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{21}{2}\sqrt{3} = 50\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{79\sqrt{3}}{4}}{25\sqrt{3}} = \frac{79}{100}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79}{100}$

Чистовик ④

5



Заметим, что прямые $y=x$ и $y=59-x$ проходят через вершины квадрата

($0=0$ и $59=59$ и $0=59-59$ и $59=59-0$)

Точка пересечения A:

$$\begin{cases} y=x \\ y=59-x \end{cases} \Rightarrow x=y=\frac{59}{2}$$ и не принадлежит узлам сетки

В квадрате 59×59

~~будет 60·60 = 3600 узлов сетки~~

$58\cdot58$ узлов сетки

На прямой $y=x$ способов выбрать узел $=58$

Аналогично на прямой $y=59-x$ 58 узлов

Заметим, что прямые $y=x$ и $y=59-x$ проходят только через узлы сетки квадрата

Всего прямых, где хотя бы 1 точка лежит на прямой:

$$2\cdot(58\cdot(58\cdot58-58)-1) = \cancel{2(58^3-58^2-1)}\ 114(58^2-58-1)$$

Заметим, что если мы возьмем 2 узла, которые лежат на прямой, параллельной осям координат (или тоже самое сторонам ~~треугольника~~ квадрата) то такая прямая всегда пересечет обе прямые $y=x$ и $y=59-x$.

Тогда из ответа надо вычесть $58+58$

~~Черновик~~

Чистовик 5

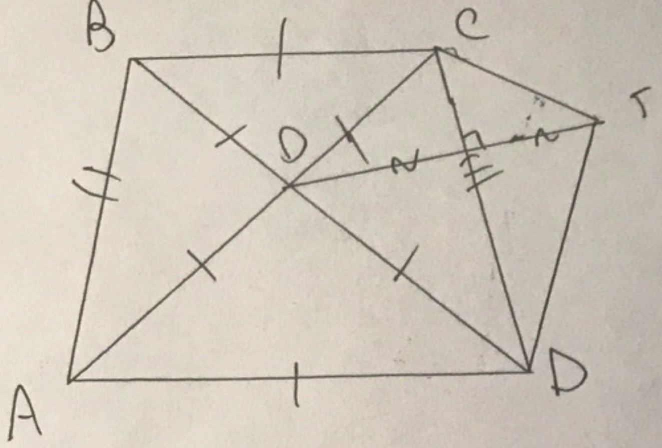
5 Продолжение:

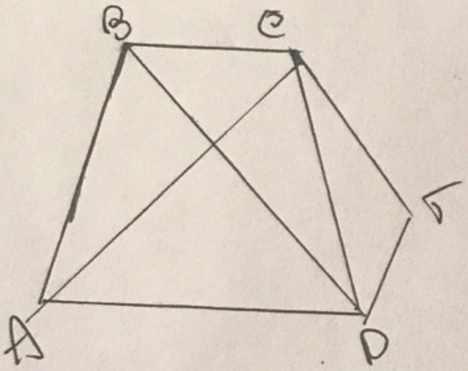
Имеем: $114(58^2-58-1)-114 = 114(58^2-58-114) =$

$= 114 \cdot 3192 = 363888$

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times\ 58 \\ \hline 464 \\ 290 \\ \hline 3364 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3364 \\ -\ 172 \\ \hline 3192 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3192 \\ \times\ 114 \\ \hline 12768 \\ 3192 \\ 3192 \\ \hline 363888 \end{array}$$

Черновик 1





$2x^2y^2$ $\quad$ $x^2y^2 \le 1$

$x^2+y^2 \le 2$

$x^2+y^2 \le 2$

$\frac{2}{a+b}+ab=2$

$\frac{2}{a+b}+ab=2$

$a^2+b^2+3ab=5$

$\frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{49}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{21}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2$

$(a-2)(a+1)^2$

$(a-2)(a+1)^2$