

Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006193**

ID профиля: **120108**

Вариант 9

ЧИСТОВИК

№2.

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{4+2x-x^2}$, Пусть $\sqrt{x+4} = a$;
 $\sqrt{6-x} = b$. Тогда, очевидно, $a \geq 0$ и $b \geq 0$ (так как корни не могут быть < 0). Тогда,

$$\sqrt{4+2x-x^2} = \sqrt{4+bx-4x-x^2} = \sqrt{-x(4+x)+b(4+x)} = \sqrt{(b-x)(4+x)} =$$

$$= \sqrt{6-x} \cdot \sqrt{4+x} = ab. \text{ Значит, ур-е } \overset{\text{группе}}{a-b+4} \text{ имеем вид:}$$

$$a - b + 4 = 2ab.$$

Также, $x+4 \geq 0$ и $6-x \geq 0$ (так можно выбрать корни). Отсюда,
 $a^2 = x+4$; $b^2 = 6-x$. Тогда, ~~$a^2 + b^2 = x+4 + 6-x = 10$~~ Тогда, $b^2 = 6-x =$
 $= -x-4+10 = -(x+4)+10 = -a^2+10$. А значит, $b^2 + a^2 = 10$. Итого:

$$\begin{cases} a \geq 0; b \geq 0 \\ a - b + 4 = 2ab \Leftrightarrow 2ab - a + b = 4 \\ b^2 + a^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0; b \geq 0 \\ 2ab - a + b = 4 \\ b^2 + a^2 = 10 \end{cases}$$

Вместе с $b^2 + a^2 = 10$ ур-е $2ab - a + b = 4$. Группируем:

$$b^2 + a^2 - 2ab + a - b = 6$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-b) = 6$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a-b+1) = 6. \text{ Пусть } t = a-b$$

$$\Leftrightarrow t(t+1) = 6$$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t+3)(t-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -3. \text{ 1) Тогда, } a-b = -3, \text{ и } a = b-3 \text{ - 1 случай} \\ t = 2. \text{ 2) Тогда, } a-b = 2, \text{ и } a = b+2 \text{ - 2 случая} \end{cases}$$

Рассмотрим оба случая; ~~в решении 3-го ур-я найден не все корни, вероятно опечатка.~~

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow a - b + 4 = 2ab, \text{ но } 3+4 = 2(b-3)b \text{ (} a \geq 0, b \geq 0 \text{)}.$$

$$\Leftrightarrow 1 = 2(b-3)b$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 - 6b - 1 = 0 \quad D = 6^2 + 4 \cdot 2 = 36 + 8 = 44.$$

Тогда,
$$\begin{cases} b = \frac{6 - 2\sqrt{44}}{4} \\ b = \frac{6 + 2\sqrt{44}}{4} \end{cases}$$

Справедливо
1.

ЧИ СТОВНИК

№2 (проверка)

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 1,5 - 0,5\sqrt{11} \quad \text{не подходит} \\ b = 1,5 + 0,5\sqrt{11} \quad \text{не подходит} \end{cases}$
 Заменяю $\sqrt{11} > \sqrt{9}$ на $\sqrt{11} > 3$, но $0,5\sqrt{11} > 1,5$ и $1,5 - 0,5\sqrt{11} < 0$.
 Не известно, $\sqrt{11} > 3$,
 Но $b = 1,5 - 0,5\sqrt{11}$ — не решение.

Тогда, если $b = 1,5 + 0,5\sqrt{11}$, то

$a = b - 3 = \underbrace{0,5\sqrt{11}}_{1,5} - 1,5 > 0$ — подходит.

В этом случае, $x + y = a^2 = (0,5\sqrt{11} - 1,5)^2 = 0,25 \cdot 11 + 2,25 -$

$- 1,5 \cdot 0,5 \cdot 2\sqrt{11} = 5 - 1,5\sqrt{11}$. Значит, $x = 1 - 1,5\sqrt{11}$.

$\textcircled{2} \quad a - b + y = 2ab$, но $z + y = 2(b + z)b$ ($a > 0; b > 0$),

$\Leftrightarrow b = 2(b + z)b$

$\Leftrightarrow 3 = (b + z)b$

$\Leftrightarrow b^2 + zb - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (b + 3)(b - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3 < 0 \text{ — не подходит} \\ b = 1 \text{ — подходит} \end{cases}$

Значит, $x + y = a^2 = 3^2 = 9$, и $x = 5$.
 Тогда, $a, b + z = 1 + z = 3$ — подходит.

Ответ: $5; 1 - 1,5\sqrt{11}$.

Проверка: $x = 5$. $\sqrt{5 + y} - \sqrt{b - 5} + y = 1 + y = 6$.

$2\sqrt{y + 2,5} - 2,5 = 2\sqrt{9} = 6$. Оба знака равны.

$x = 1 - 1,5\sqrt{11}$

$\sqrt{1 - 1,5\sqrt{11} + 4} - \sqrt{6 - (1 - 1,5\sqrt{11})} = \sqrt{5 - 1,5\sqrt{11}} - \sqrt{5 + 1,5\sqrt{11}} = \sqrt{2,75 + 2,25 - 1,5\sqrt{11}}$

$= \sqrt{2,75 + 2,25 + 1,5\sqrt{11}} = \sqrt{0,5^2 \cdot (\sqrt{11})^2 + 1,5^2 - 1,5 \cdot 0,5 \cdot 2\sqrt{11}} = \sqrt{(0,5\sqrt{11})^2 + 1,5^2 - 2 \cdot 1,5 \cdot 0,5\sqrt{11}} =$

$= \sqrt{(0,5\sqrt{11} - 1,5)^2} = 0,5\sqrt{11} - 1,5 - 0,5\sqrt{11} - 1,5 = -3$. $-3 + 4 = 1$.

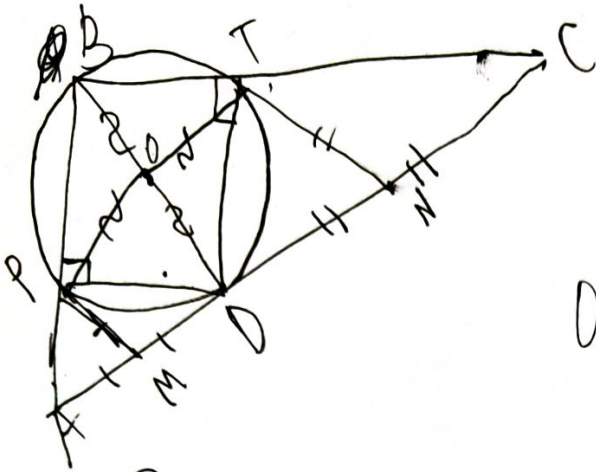
$2\sqrt{24 + 2(1 - 1,5\sqrt{11})} - (1 - 1,5\sqrt{11})^2 = 2\sqrt{24 + 2 - 3\sqrt{11} - 1 - 24,75 + 3\sqrt{11}} =$
 $= 2\sqrt{0,25} = 2 \cdot 0,5 = 1$ Оба знака равны

правой. Значит, оба корня подходят.

Спрямляю
2.

УЧ С Т О В Н И К

№ 1.



O - центр окр. мн

Решение:

① Заметим, что $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$, так BP - диаметр окр. мн. Тогда, $\angle APD = \angle DTC = 90^\circ$.

② PM и TN - диаметры вписанных, значит, мы имеем, что

$$PM = AM = MD; \quad TN = DN = NC;$$

③ ~~Тогда~~ Рассмотрим $\triangle OPM$ и $\triangle ODM$:

$OP = OD$; $PM = DM$; OM - общий, так $\triangle OPM = \triangle ODM$, и поэтому, $\angle OPM = \angle ODM$. Тогда, следовательно, $\angle OPN = \angle OTN$.

④ Тогда, $\angle OTN = \angle OPN = 180 - \angle MPO = 180 - \angle MPO$.
 Из того, что PO го диаметр. $\angle TN$ - Если мы рассмотрим $\triangle TN$ и PM , то $\angle ONN' = 180 - \angle OPM$, так как $\angle ONN' = 180 - \angle OPM$, так как $\angle ONN' = 180 - \angle OPM$, так как $\angle ONN' = 180 - \angle OPM$.

Ум ~~ФВН~~ К

N1 Упр.

Пример, $DT^2 = 13,5 \cdot \frac{13,5 \cdot 10}{13} = 13,5 - \frac{135}{13} =$

$= \frac{27}{2} - \frac{135}{13} = \frac{27 \cdot 13 - 270}{26} =$

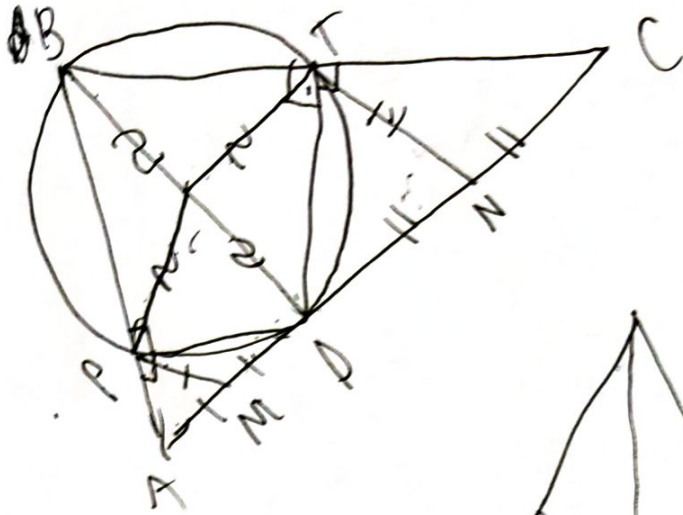
Сумма площадей трапеции AP и PC, $uS(ABCO) =$

$= \frac{AP \cdot AP}{2} + BP \cdot DP + \frac{DT \cdot TC}{2} \dots$

(Справка)

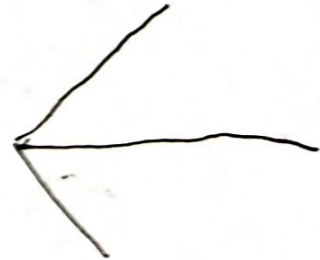
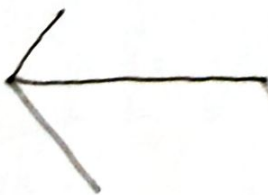
~~Справка~~

4E-PMOBVK

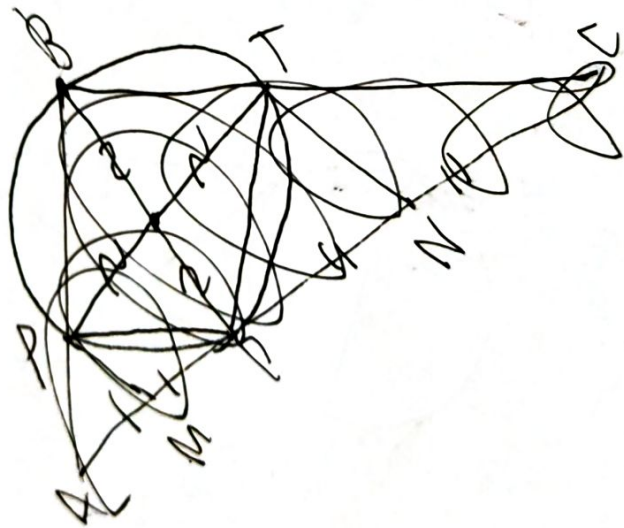
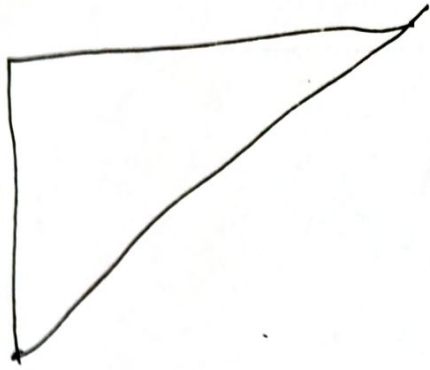
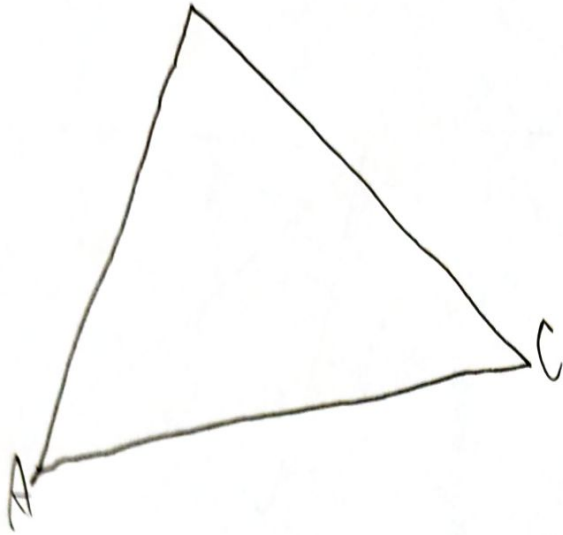


90-a

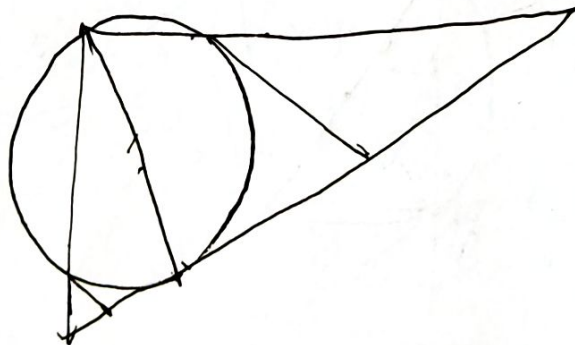
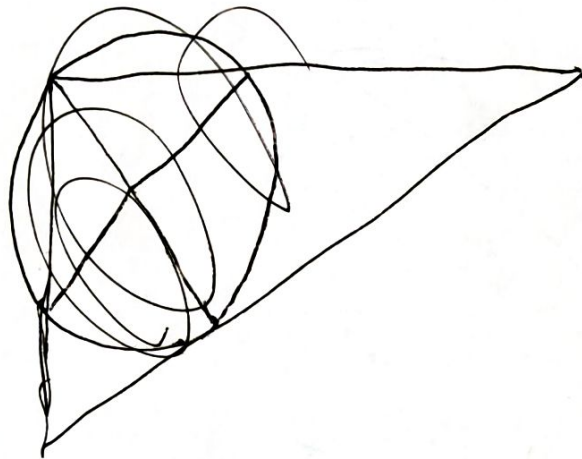
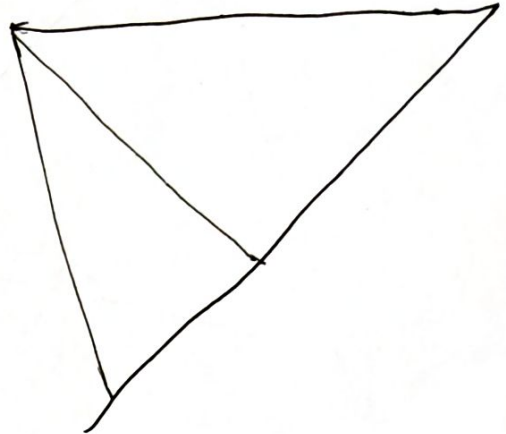
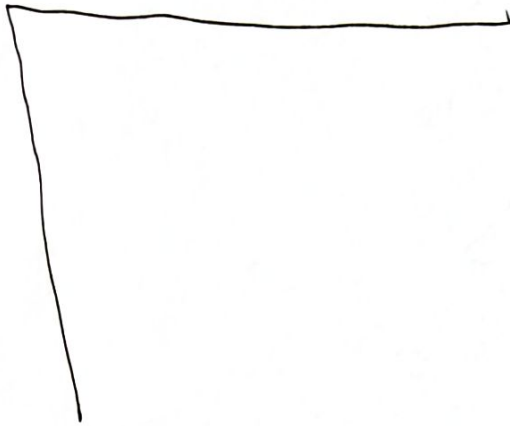
90-30



ЧЕРТОВНИК



4. E-PROBNAK



1)

~~2x+4=1~~
~~6-x=9~~
 УЕРНОВНК

2,25 + 2,75 = 5

~~5 + 1,5√11 = 6 - 2x~~

~~5 - 1,5√11 = 2x + 4~~

1,5√11 = 1 - 2x

2x = 1 - 1,5√11

1 + 29,75 - 3√11

5 - 1,5√11

~~1,5 · 2 · 0,5√11~~

~~2,25~~

2,25

5 + 1,5√11

0,5√11 × 1,5

0,5√11 - 1,5

-3 + 4

1 = 2

~~2x + 4 = 1~~

0,25

24 + 2(1 - 1,5√11) -

24 + 2 - 3√11 - 1 - 29,75 + 3√11

6 - x = 1

2x + 4 = 9

24,75

5

$$\begin{array}{r} 2,25 \\ \times 1,11 \\ \hline 225 \\ + 225 \\ \hline 24,75 \end{array}$$

8

1 + 2,25 · 11

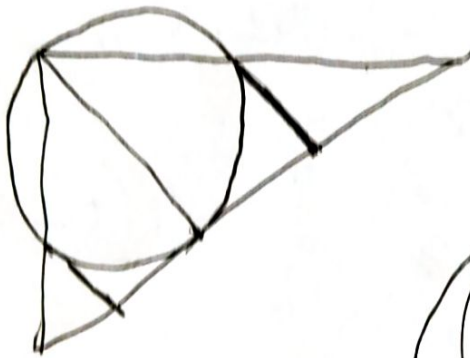
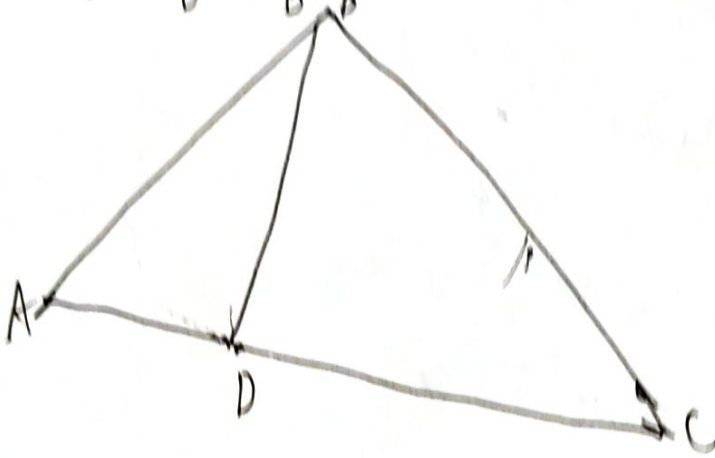
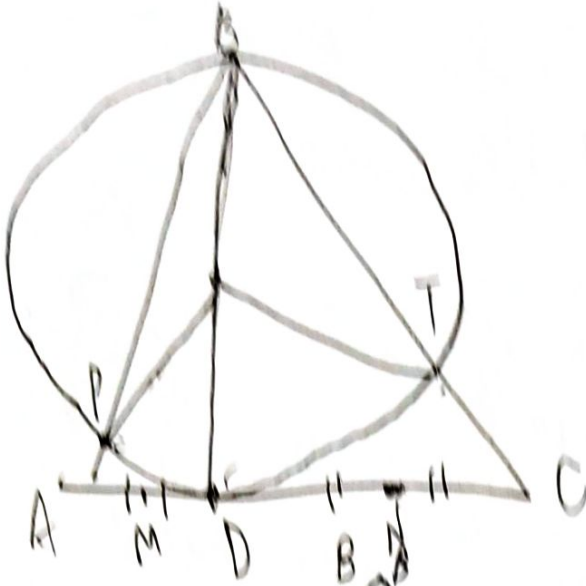
$$\begin{array}{r} 2,25 \\ \times 1,11 \\ \hline 225 \\ + 225 \\ \hline 24,75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,25 \cdot 11,25 \\ \hline 24,75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,75 \\ + 2,25 \\ \hline 5,00 \end{array}$$

~~1,5 + 0,5√11~~

METHOD



$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{4+x} - x^2$$

УФРНО ВНК

Система $\sqrt{x+4} = a, \sqrt{6-x} = b$, тогда, $ab = \sqrt{(x+4)(6-x)} =$

$$= \sqrt{-x^2 + 2x + 24}$$

$$a^2 = x+4$$

$$b^2 = 6-x$$

$$b^2 - a^2 = -x-4+6 =$$

$$= -a^2 + 2$$

$$b^2 - a^2 = 2$$

$$a - b + 4 = 2ab \quad 2ab - a + b = 4$$

$$a^2 + b^2 = 10$$

$$a^2 + b^2 - 2ab + a - b = 4$$

$$a - b = 3$$

$$a = b + 3$$

$$1 = 2(b-3)b$$

$$2b^2 - 6b - 1 = 0$$

$$36 + 8 = 44$$

$$2\sqrt{11}$$

$$\frac{6 + 2\sqrt{11}}{4}$$

$$\frac{6 - 2\sqrt{11}}{4}$$

$$1,5 - 0,5\sqrt{11}$$

$$1,5 + 0,5\sqrt{11}$$

$$1) 1,5 - 0,5\sqrt{11}$$

$$-1,5 - 0,5\sqrt{11}$$

$$4) 1,5 + 0,5\sqrt{11}$$

$$0,5\sqrt{11} - 1,5$$

$$(a-b)^2 + (a-b) = 6$$

$$(a-b)(a-b+1) = 6$$

$$t(t+1) = 6$$

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$t = 3$$

$$t = 2$$

$$2 + 4 = 2ab$$

$$2(b+2)b$$

$$3 = 6b$$

~~ab = 2~~

$$a - b = 3$$

$$a = -3 + b$$

$$a = b - 3$$

$$b = -3$$

$$a = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} 2) b = 1 \\ a = 3 \end{array} \right\}$$

$$b^2 + 2b - 3 = 0$$

$$(b+3)(b-1) = 0$$

$$b = -3$$

$$1 + 2(b-3)b$$

$$1 + 2(-3)(-3)$$

$$2b^2 - 6b - 1 = 0$$

$$2b^2 - 6b - 1 = 0$$

$$2b^2 - 6b - 1 = 0$$

$$2(b - \frac{3}{2})^2 - \frac{17}{2} = 0$$

$$\sqrt{a+4} - \sqrt{b-a+4} = 2\sqrt{a+b-a^2}$$

$$2ab+b-a=4$$

4EPTOBNK

$$a^2+b^2=10$$

$$a-b+4=2ab$$

$$b^2=-a^2+10$$

$$2ab+b-a=4$$

$$b(2a-1)-a=4$$

$$(2+4)(b-a) = -a^2+b \quad -4a+4$$

$$2a+2b-a^2$$

$$a^2+b^2-2ab-b+a=1$$

$$(a+b)^2 + b - a = 11$$

~~scribble~~

~~scribble~~

~~scribble~~

$$a^2+b^2-2ab-b+a=6$$

$$a-b=2$$

$$a=b+2$$

$$(a-b)^2 + (a-b) = 6$$

$$6=2ab$$

$$(a-b)(a-b+1)=6$$

$$6=4b+2b$$

$$t(t+1)=6$$

$$t^2+t-6=0$$

$$a-b=3$$

$$a-b=2$$

$$(t+3)(t-2)=0$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006193**

ID профиля: **120108**

Вариант 9

4/11/10/01K

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 5 \end{cases} \stackrel{N4}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{2}{x^2y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x^2y^2} + x^2y^2 = 2 \\ (x^2 + y^2)^2 + x^2y^2 = 5 \end{cases} \quad \text{Пусть } a = x^2y^2; b = x^2 + y^2.$$

$$\begin{cases} \frac{2}{b} + a = 2 \\ b^2 + a = 5 \end{cases} \quad \text{Пусть, } b \neq 0 \text{ иначе не будет деления на } b^2 \text{ и } b.$$

$$\begin{cases} 2 + ab = 2b \\ a = 5 - b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 + (5 - b^2)b = 2b \\ a = 5 - b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + 5b - b^3 = 2b \\ a = 5 - b^2 \end{cases} \leftarrow \text{Пусть } b \neq 0.$$

$b^3 - 3b - 2 = 0$. Заметим, что $b=2$ - корень ($2^3 - 3 \cdot 2 - 2 = 0$). Пусть,

$$b^3 - 3b - 2 = (b-2)(b^2 + 2b + 1) = (b-2)(b+1)^2.$$

Значит, уравнение имеет

корни: $(b-2)(b+1)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-2=0 \\ b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ b=-1 \end{cases}$$

Значит, перебираем корни:

$$\begin{cases} b=2 \\ a=5-4=1 \\ b=-1 \\ a=4 \end{cases}$$

~~$$b^3 - 3b - 2 = (b-2)(b^2 + 2b + 1)$$~~

$$\begin{array}{r|l} b^3 + 0b^2 - 3b - 2 & b-2 \\ \underline{b^3 - 2b^2} & b^2 + 2b + 1 \\ \hline 2b^2 - 3b - 2 & \\ \underline{-2b^2 + 4b} & \\ \hline -b - 2 & \\ \underline{-b - 2} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Смп. 1

Умножение

Значит, $N(4) = 4$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = -1 \end{cases} \text{ - либо не имеет, так } x^2 \geq 0, y^2 \geq 0, \text{ но } x^2 + y^2 > -1.$$

Решения: $x^2 + y^2 = 2$ ~~Решение~~
 $x^2 + y^2 = -1$, ~~Решение~~, $x \neq 0, y \neq 0$.

~~Решение~~ $x^2 + y^2 = 2$
 Пусть, если $x^2 + y^2 = 1$, то $(xy)^2 = 1$, то $xy = \pm 1$. Значит, $y = \pm \frac{1}{x}$.

$$1) \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 1 = 2x^2 \quad (x \neq 0). \text{ Пусть } t = x^2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2t + 1 = 0 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)^2 = 0 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + \left(\frac{-1}{x}\right)^2 = 2 \\ y = \frac{-1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \\ y = \frac{-1}{x} \end{cases}$$

Решение, решение
 Пусть $y = -\frac{1}{x}$
 $1 + 1 = 2$ (то
 решение в системе
 1). Пусть,

~~Решение~~
 или поочередно подставляем и находим все решения:
 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

Ответ: $(1; 1); (1; -1); (-1; 1); (-1; -1)$.

Смп. 2.

УНСТОВНА
(6 стр.)

Евога, ΔBAT бее право аго BO — ΔBAT — правоаголно,
~~и $AB \perp BO$.~~

② $BC = 3 = BO$. Проложим височина BH , и према $MM_1 \parallel AD$ према O . Евога, $BH \cap MM_1 = H$.

$BH = BO \cdot \cos 30 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. $H'H = \cos 30 \cdot OA = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

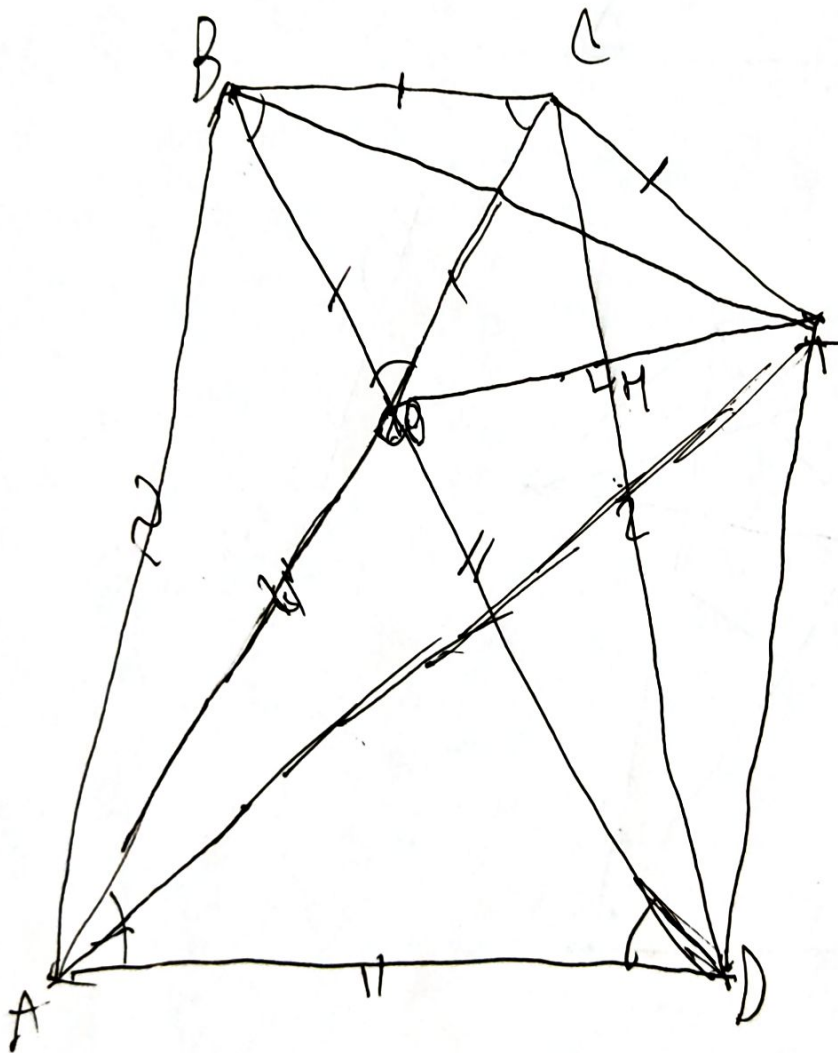
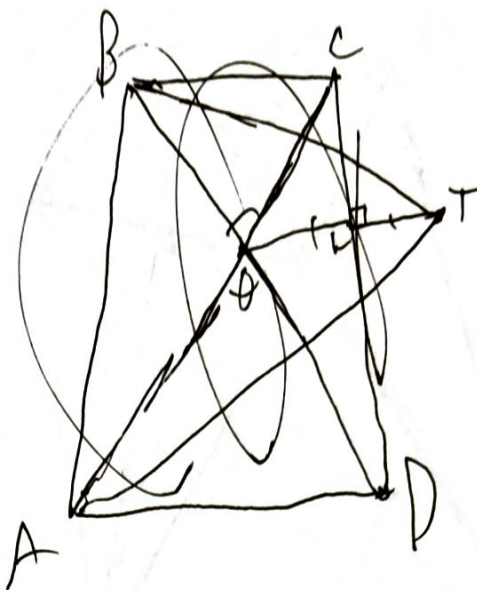
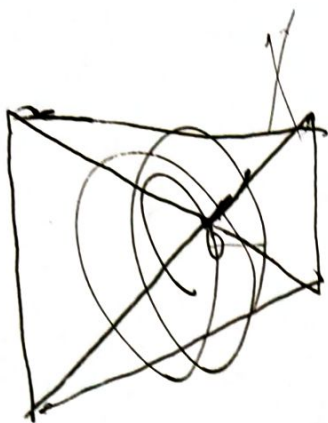
~~Евога~~ $BH = 5\sqrt{3}$. Евога, $S(ABCD) = 5\sqrt{3} \cdot 5 = 25\sqrt{3}$.

③ ~~Евога~~ $AA \rightarrow AH = 2$ (најпремај $AA \perp BC$),
и $\angle ABO = \angle OCD$ ко $AB \parallel CD$ и $AO \parallel CO$. Евога, Евога:

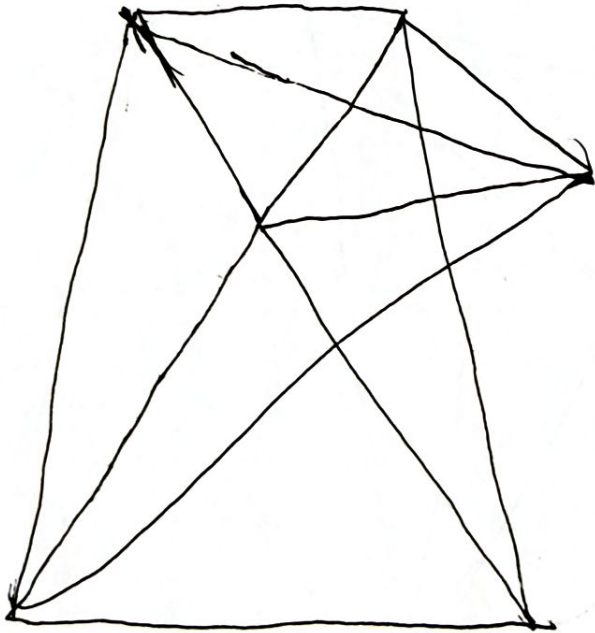
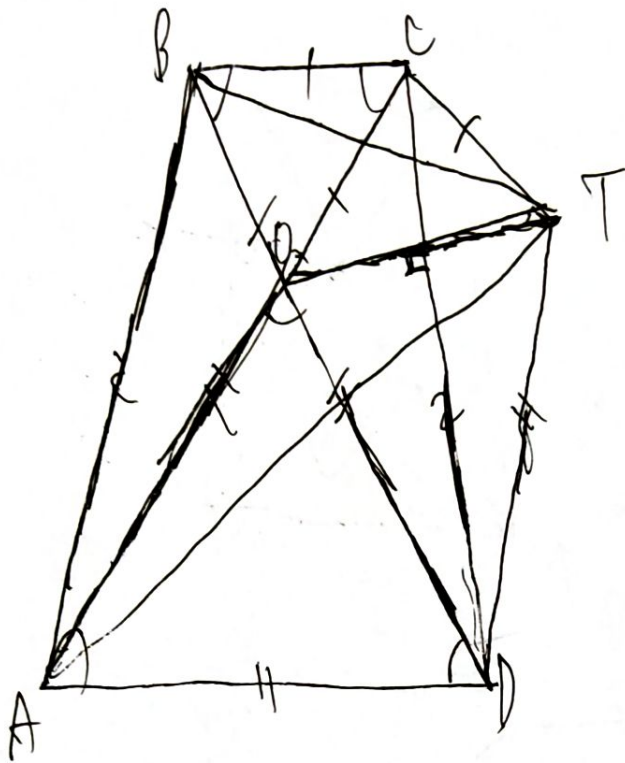
$AB = \sqrt{4 + 75} = \sqrt{79}$, и $S(BAT) = \frac{79}{4} \sqrt{3}$,

и AM_1

УЕ РИЗНИК



У.Е.Р.Н.О.З.Н.К.



~~УПРАЖНЕНИЯ~~

N 4.

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2 y^2} + x^2 y^2 = 2 \\ x^4 + y^4 + 3x^2 y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{b} + a = 2 \\ (x^2 y^2)^2 = 2 \end{cases}$$

Пусть $a = x^2 y^2$; $b = x^2 y^2$

~~Система уравнений~~
 ~~$\frac{2}{a} + a = 2$~~
 ~~$a^2 = 2$~~

УЕП НОБРК

~~Г.А.А.~~

ЧЕРХОВНИК



~~СЕРХОВНИК~~

$$58.58.116 -$$

$$- 115.116 - 116.113 =$$

11

$$6.6 - 11$$

$$(58.58 - 115), 116 -$$

$$(6.6 - 11) \cdot 12 - 12 - 119$$

$$- 116.113$$

$$25 - 12 - 11.9 - 12.11$$

$$= (58.58 - 228) \cdot 118$$

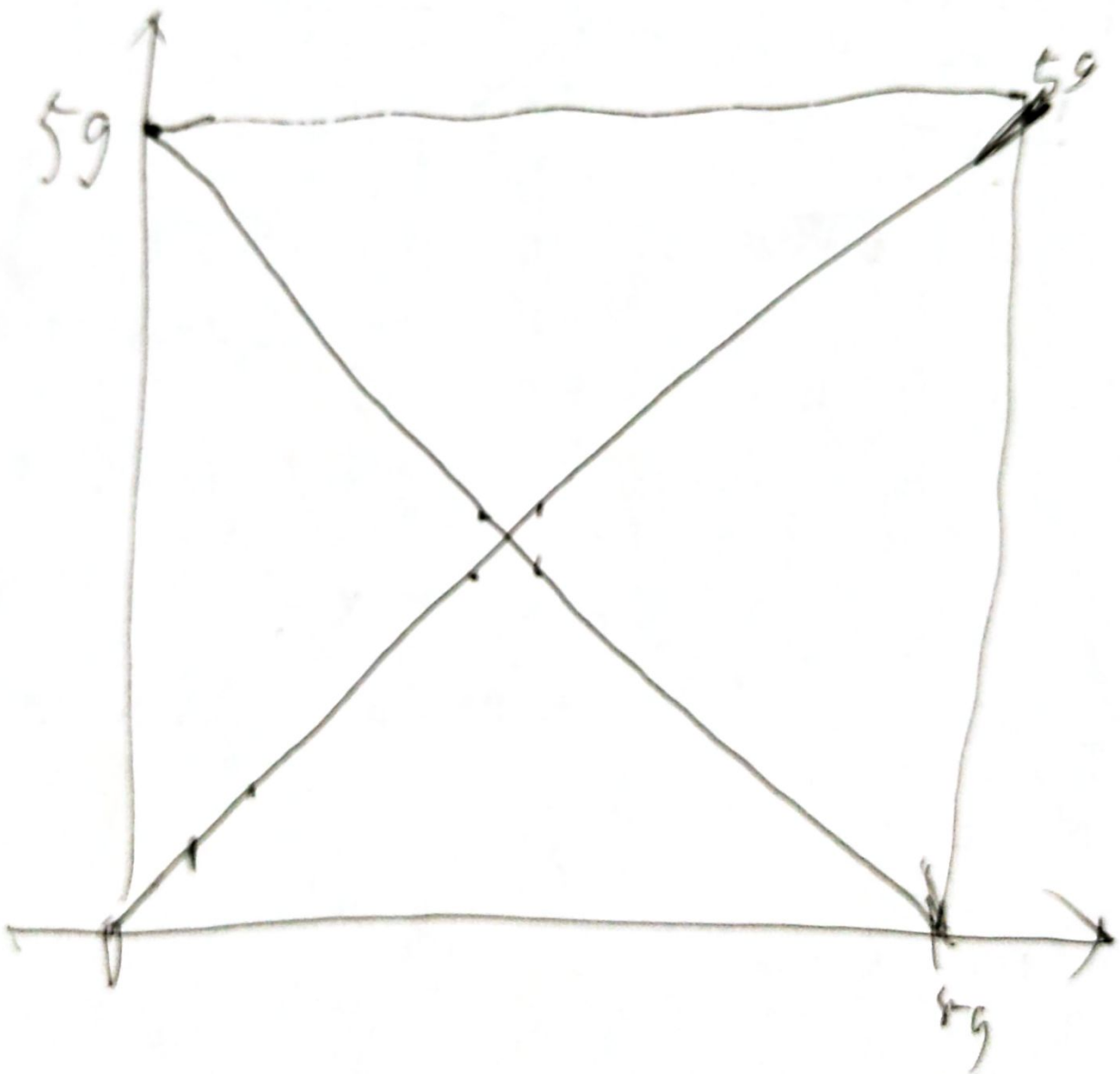
и ЕРМОБНВК

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2$$

①. $2xy^2 = 1$ $xy = -1$ или $xy = 1$ $\frac{1}{2}$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$$

$$x^4 + 1 = 2x^2$$



УФРМ ОБИК

$$\begin{array}{r} 59 \\ \times 58 \\ \hline 464 \\ + 290 \\ \hline 3364 \end{array}$$

$$\frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2$$

$$\begin{aligned} x^2y^2 &= a \\ x^2+y^2 &= b \end{aligned}$$

$$x^2+y^2+3x^2y^2 = 3$$

$$x^2+y^2 = b$$

$$\frac{2}{b} + a = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2+ab = 2b \\ b^2+3a = 3 \end{cases}$$

$$3364 - 220^2 = 3136$$

$$\begin{array}{r} 3364 \\ - 220^2 \\ \hline 3136 \end{array}$$

$$\begin{aligned} b-2y(b^2+y^2) &= \\ b^3+2b^2+yb &= \\ = 2b^2-b & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 + a &= 5 \\ a &= 5 - b^2 \\ b^2 - b - 2 &= 2 + (5 - b^2) \cdot b = 2b \\ b^2 - 2(b+1) &= 0 \\ 2 + 5b - b^3 &= 2b \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} b^3 - 3b - 2 \\ b^3 + b^2 \\ \hline b^2 - 3b - 2 \\ - b^2 - b \\ \hline -2b - 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} b^3 + 2b - 5b - 2 &= 0 \\ b^3 - 3b - 2 &= 0 \\ (b+1) & \end{aligned}$$

$$b = -1 \text{ или } b = 2$$

$$x^2+y^2 = 2 \text{ или } -1$$

$$\begin{aligned} (b^2 - b + 2)(b+1) &= \\ b^3 - b^2 + 2b + b^2 - b - 2 &= \\ b^3 - 3b - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 3136 \\ \times 116 \\ \hline + 18816 \\ 3136 \\ 3136 \\ \hline 363776 \end{array}$$

~~УЧЕБНИК~~

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2, \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a^2 + b = 5 \end{cases}$$

Пусть $a = x^2 + y^2, b = x^2y^2$

УЧЕБНИК

~~УЧЕБНИК~~