Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006169**

ID профиля: **810600**

Вариант 9

№ 3 Чистовик Математика 10 кл.

(1)

$$\begin{cases} 26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0 \\ ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0 \end{cases}$$

По разные стороны от $3x-y=4$.

Выразим y.

$$4y^2+y(8x-20a)+26a^2-22ax+5x^2=0$$

$$D=(8x-20a)^2-16(26a^2-22ax+5x^2)=$$

$$=16\left((2x-5a)^2-(26a^2-22ax+5x^2)\right)=16(-x^2+2ax-a^2)=$$

$$=-16(x^2-2ax+a^2)=-16(x-a)^2$$

$$D\geq 0 \Rightarrow -16(x-a)^2=0 \Rightarrow x=a$$

$$y=\frac{20a-8x}{8}=\frac{5}{2}a-x=\frac{3}{2}a.$$

$A=\{a;\ \frac{3}{2}a\}$. Теперь ~~выразим~~ найдём ординату вершины параболы. $a\neq 0$, т.к. при $a=0$: $0\cdot x^2+2\cdot 0^2x-0\cdot y+0^3+1=0$

$1=0$

$x,y\in\varnothing$

$$ay=ax^2+2a^2x+a^3+1$$

$$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}=(x+a)^2+\frac{1}{a}$$

$$x_0=\frac{-2a}{2}=-a \Rightarrow y_0=\frac{1}{a},\quad a\neq 0$$

$$B=\{-a;\ \frac{1}{a}\}$$

По разные стороны от. $y=3x-4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y_A>3x_A-4 \\ y_B<3x_B-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}a>3a-4 \\ \frac{1}{a}<-3a-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a>6a-8 \\ \frac{1}{a}+3a+4<0 \end{cases} \\ \begin{cases} y_A<3x_A-4 \\ y_B>3x_B-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a<6a-8 \\ \frac{1}{a}+3a+4>0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$1)\ \begin{cases} 8>3a \\ \frac{1+3a^2+4a}{a}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{3}>a \\ a\in(-\infty;-1)\cup(-\frac{1}{3};0) \end{cases} \Rightarrow a\in(-\infty;-1)\cup(-\frac{1}{3};0)$$

$3a^2+4a+1 \qquad a_2=-1 \qquad$ $-$ -1 $+$ $-\frac{1}{3}$ $-$ 0 $+$

$$D=16-12=4$$

$$a_1=\frac{-4+2}{6}=-\frac{1}{3}$$

2021/2/27 12:00

211006169 (U810600-M1274472)

Чистовик

②

2) $\begin{cases} \frac{8}{3} < a \\ \frac{1+3a^2+4a}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{8}{3} < a \\ a \in (-1; -\frac{1}{3}) \cup (0; +\infty) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in (\frac{8}{3}; +\infty)$

Отв: $a \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; 0) \cup (\frac{8}{3}; +\infty)$

2021/2/27 12:00

...ля Степень родства Подпись ...
45 20 Серия Номер 01.07.2010 Дата выдачи Код
...умент, удостоверяющий личность
...Набережная...

Чистовик (3)

№ 2

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

$24+2x-x^2$

$D = 4+96 = 100$

$x_1 = \frac{-2+10}{-2} = -4$

$x_2 = 6$

$\Rightarrow 24+2x-x^2 = -(x+4)(x-6) = (x+4)(6-x)$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

ОДЗ: $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ (x+4)(6-x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-4; 6]$

$\sqrt{x+4} = a \geq 0$

$\sqrt{6-x} = b \geq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} a-b+4 = 2ab \\ b^2 = -a^2+10 \end{cases}$

$+\begin{cases} a-b+4-2ab=0 \\ a^2+b^2-10=0 \end{cases}$

$a^2+b^2-2ab+a-b-6=0$

$(a-b)^2+a-b-6=0$

$a-b=t$

$t^2+t-6=0$

~~D=1+24=25~~

$t_1 t_2 = -6$

$t_1+t_2 = -1$

$\Rightarrow t_1 = -3, \quad t_2 = 2$

1) $t=2$

$a-b=2$

$a=2+b$

~~$2+b-b+4-2ab=0$~~

$(2+b)-b+4-2(2+b)b=0$

$6-2(2b+b^2)=0$

$3-2b-b^2=0$

$b^2+2b-3=0$

$b_1 b_2 = -3$

$b_1+b_2 = -2$

$\Rightarrow b_1 = -3, \quad b_2 = 1$

$b \geq 0$, не подходит

$b=1$

$\sqrt{6-x} = 1$

$6-x=1$

$x=5$

Проверка: $\sqrt{6-5} = 1$ — ✓

5 входит в ОДЗ.

2) $t=-3$

$a=b-3$

$b-3-b+4-2(b-3)b=0$

$1-2(b^2-3b)=0$

$1-2b^2+6b=0$

$2b^2-6b-1=0$

$D=36+8=44$

$b_1 = \frac{6+2\sqrt{11}}{4}$

$b_2 = \frac{6-2\sqrt{11}}{4} < 0 \Rightarrow$ не подходит

$b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{11}$

$\sqrt{6-x} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{11}$

$6-x = \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{11} + \frac{11}{4}$

211006169 (U810600 M1274472)

2021/2/27 12:00

Чистовик 4

$6 - x = \frac{9}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{11} + \frac{11}{4}$

$24 - 4x = 9 + 6\sqrt{11} + 11$

$4 - 4x = 6\sqrt{11}$

$x = \frac{4 - 6\sqrt{11}}{4} = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{11}$

$1 - \frac{3}{2}\sqrt{11} \vee -4$

$-\frac{3}{2}\sqrt{11} \vee -5$

$-3\sqrt{11} \vee -10$

$99 < 100 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3\sqrt{11} > -10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \frac{3}{2}\sqrt{11}$ входит в ОДЗ.

Ответ:

$x_1 = 5$

$x_2 = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{11}$

2021/2/27 12:01

черновик

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=$
$=2\sqrt{24+2x-x^2}=$
$=2\sqrt{(x+4)(x-6)}=$
$=2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$-x^2+2x+24$
$D=4+96=100$
$x_1=\frac{-2+10}{-2}=-4$
$x_2=\frac{-12}{-2}=6$

$6-x\geq 0$
$x\leq 6$

$\begin{cases} x+4<0 \\ 6-x<0 \end{cases}$
$x<4$
$x>6$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}+4=2\sqrt{ab}$
$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a+b-2\sqrt{a}\sqrt{b}=(2\sqrt{ab}-4)^2$

$\sqrt{x+4}$
$\sqrt{6-x}$

$\begin{cases} x-y+4=2xy \\ y^2=-x^2+10 \end{cases}$

$x-y=-3$
2) $x=y-3$

$x+4$ и $6-x$
x^2

$y-3-y+4=2(y-3)y$
$1=2(y-3)y$
$1=2(y^2-3y)$
$1=2y^2-6y$
$2y^2-6y-1=0$
$D=36+8=44$
$y_1=\frac{6+2\sqrt{11}}{4}$ $y_2=\frac{6-2\sqrt{11}}{4}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{11}<0$

$-x^2=-x-4$
$-x^2+10=6-x$

$-3\sqrt{11}\vee-10$
$99<100$
$-\frac{3}{2}\sqrt{11}\vee-10$
$1-\frac{3}{2}\sqrt{11}\vee-4$
$-\frac{3}{2}\sqrt{11}\vee-5$

$81+240$
321

$19 \times 19 = 171 + 19 = 361$
$18 \cdot 18 = 144 + 18 = 324$

$x^2+y^2=10$
$x-y+4-2xy=0$
$x^2-2xy+y^2+x-y+4=10$
$(x-y)^2+(x-y)=6$
$t^2+t-6=0$
$D=1+24=25$
$t_1=\frac{-1+5}{2}=2$
$t_2=-3$

1) $x-y=2$
$x=2+y$
$1.5+\frac{1}{2}\sqrt{11}$
$2+y-y+4=2(2+y)y$
$6=2(2+y)y$
$3=2y+y^2$
y^2+2y-3
$D=4+12=16$
$y_1=\frac{-2+4}{2}=1$
y_2 $x\in\varnothing$

$\frac{1}{2}\sqrt{11}\wedge\frac{3}{2}$
$\sqrt{11}\wedge 3$

$\sqrt{x+4}=2+\sqrt{6-x}$
$x+4=4+4\sqrt{6-x}+6-x$
$2x-6=4\sqrt{6-x}$
$4x^2-24x+36=16(6-x)$
$4x^2-24x+36=96-16x$
$4x^2-8x-60=0$
$2x^2-9x-30=0$
$D=9^2+2\cdot30\cdot4$
$x-3=2\sqrt{6-x}$
$x^2-6x+9=4(6-x)$
$x^2-6x+9=24-4x$
$x^2-2x-15$

$\sqrt{6-x}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{11}$
$6-x=\frac{9}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{11}+\frac{11}{4}$
$24-4x=9+6\sqrt{11}+11$
$4-4x=6\sqrt{11}$
$4-6\sqrt{11}=4x$
$2-3\sqrt{11}=2x$
$1-\frac{3}{2}\sqrt{11}=x$

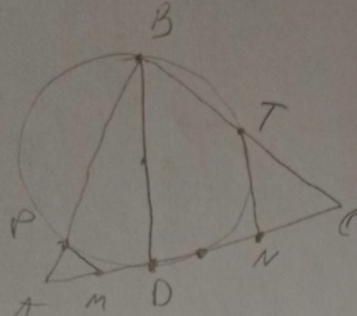
$\sqrt{6-x}=1$
$6-x=1$
$x=5$
~~$x=4$~~
$\boxed{x=5}$

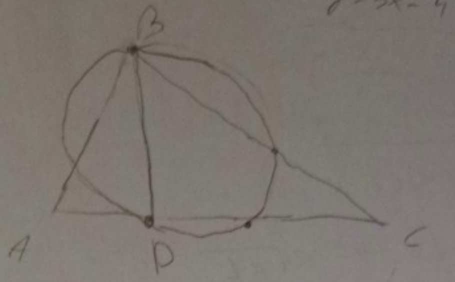
2021/2/27 12:02

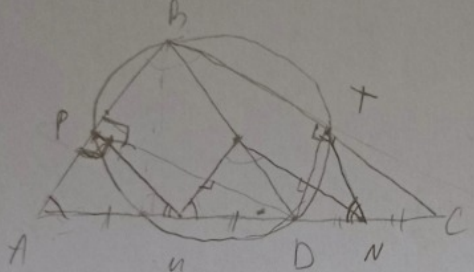
№1

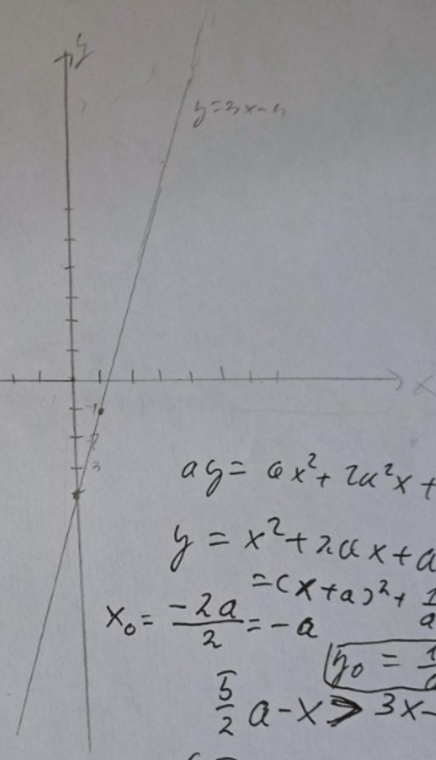
Черновик

$y = 3x - 4$









1) $\begin{cases} \frac{3}{2}a > 3a-4 \\ \frac{1}{a} < 3a-4 \end{cases}$ $\rightarrow$ $3a > 8a-8$

$8 > 3a$

$a < \frac{3}{8}$

$\frac{1}{a} - (3a-4) < 0$ $\quad \frac{1-3a^2+4a}{a} < 0$

$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

$D = 16 + 12 = 28$ $\quad x^2 + (2x+2y)^2$

$a_1 = \frac{-4+2\sqrt{7}}{-6} =$

$D =$

$ay = ax^2 + 2a^2x + a^3 + 1$

$y = x^2 + 2ax + a^2 + \frac{1}{a} = (x+a)^2 + \frac{1}{a} =$

$x_0 = \frac{-2a}{2} = -a$

$\boxed{y_0 = \frac{1}{a}}$

$\frac{5}{2}a - x > 3x - 4$

$\frac{5}{2}a - a > 3a - 4$

$\frac{1}{a} <$

$4y^2 + y(8x - 20a) + 26a^2 - 22ax + 5x^2$

$D = (8x - 20a)^2 - 16(26a^2 - 22ax + 5x^2)$

$D = -16(x-a)^2$

$16\left((2x-5a)^2 - (26a^2 - 22ax + 5x^2)\right)$

$\begin{cases} \boxed{x = a} \\ y = \frac{20a - 8x}{8} = \frac{5a - 2x}{2} = \frac{5}{2}a - x \end{cases}$

$4x^2 - 20ax + 25a^2 - 26a^2 + 22ax - 5x^2$

$-x^2 + 2ax - a^2$

2021/2/27 12:02

211006169 (U810600 M1274472)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

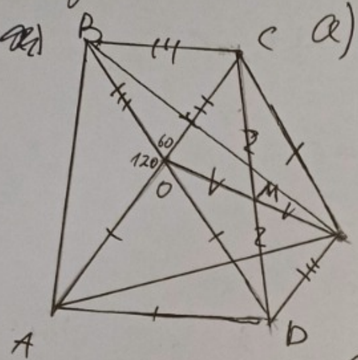
Шифр: **211006169**

ID профиля: **810600**

Вариант 9

Чистовик

№ 6 (1)



а) Док-ть: ABT — прав. △.

Решение: $\angle BCA = \angle CAD = 60° \Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow$ $ABCD$ — трап.

$\angle BOA = \angle COD$, $BO = OC$, $AO = OD \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AOB = \triangle DOC \Rightarrow AB = DC \Rightarrow$

$\Rightarrow ABCD$ — равнобокая трап.

$CM = MD$. $OM = MT \Rightarrow OCTD$ — паралл-грам (по признаку). $\angle COD = 120° \Rightarrow \angle OCT = 60°$, $\angle ODT = 60°$. $\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60° + 60° = 120°$.

Аналог. $\angle ADT = 120°$. $BC = DT$, $CT = AD$ (т.к. противопол. стороны в параллелограмме равны), $\angle BCT = \angle ADT \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BCT = \triangle ADT \Rightarrow AT = BT$. $\angle TAD = \angle BTC$. $\angle TAD + \angle DTA = (180° - \angle ADT) = 60°$. $\angle TAD = \angle BTC \Rightarrow \angle BTC + \angle DTA = 60°$.

$\angle BTA = \angle CTD - (\angle BTC + \angle DTA)$. $\angle CTD = 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BTA = 120 - 60 = 60°$.

$\angle TBA = \angle TAB = \frac{180-60}{2} = 60° \Rightarrow \triangle ABT$ — равност. ч.т.д.

б) $BC = 3$, $AD = 7$. $\Rightarrow BO = 3$, $AO = 7$. Т. Косинусов: $BA^2 = BO^2 + AO^2 - 2BO \cdot OA \cos(120°) =$

$= 9 + 49 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \cos 120° = 58 - 42 \cdot (-\frac{1}{2}) = 58 + 21 = 79$

$BA = \sqrt{79} = BT = AT$.

$BH \perp AD$, $H \in AD$. $AH = \frac{7-3}{2} = 2$.

Т. Пифагора: $AB^2 = AH^2 + BH^2$.

$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 79 - 4 = 75$

$BH = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BH(BC + AD) = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 10 = 25\sqrt{3}$

$S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AT \cdot \sin 60°$.

$S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot 79 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{79\sqrt{3}}{4}}{25\sqrt{3}} = \frac{79}{100} = 0{,}79$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79}{100}$

Чистовик

№ 4 ②

ОДЗ: $x^2+y^2 \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2 \cdot y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{a+b} + ab = 2 \\ (a+b)^2 + ab = 5 \end{cases} \quad a+b \neq 0$$

$x^2 = a \geq 0$

$y^2 = b \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{2}{a+b} + ab = 2 \\ a^2+b^2+3ab = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab = 2 - \frac{2}{a+b} \\ (a+b)^2 + ab = 5 \end{cases}$$

$(a+b)^2 + 2 - \frac{2}{a+b} = 5$

$a+b = t \Rightarrow t^2 + 2 - \frac{2}{t} = 5$

$t^3 + 2t - 2 = 5t$

$t^3 - 3t - 2 = 0$

Схема Горнера:

	1	0	-3	-2
2	1	2	1	0

$\Rightarrow$

$\Rightarrow t^3 - 3t - 2 = (t-2)(t^2+2t+1) = (t-2)(t+1)^2 = 0.$

$t_1 = 2$

$t_2 = -1$

1) $t = 2$

$a+b = 2$

$\frac{2}{2} + (2-b)b = 2$

$2b - b^2 = 1$

$b^2 - 2b + 1 = 0$

$(b-1)^2 = 0$

$b = 1$

$a = 1$ $\quad x = \pm 1$

$x^2 = 1$ $\quad y = \pm 1$

$y^2 = 1$

2) $t_2 = -1$

$a+b = -1$ — невозможно, т.к. $a, b \geq 0$.

Ответ:

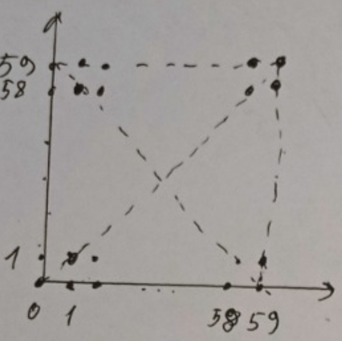
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \end{array} \right.$$

2021/2/27 15:03

211006169 (U810600 M1274473)

Листовки (3)

№5



Рассмотрим несколько ситуаций. $y=x$ и $y=59-x$ – это диагонали квадрата. Будем помечать галочкой если точка лежит на диагонали

$y=x$	$y=-x$	
√√		1
√	√	2
	√√	3
×	√	4
√	×	5

В случае, когда обе точки лежат на одной из диагоналей кол-во способов легко считается т.к. две точки лежащие на диагонали не лежат на прямой ∥ OX и OY. $C_{58}^2 = \frac{58\cdot 57}{2}$ ← это случаи 1 и 3. Рассмотрим теперь 4 и 5. После выбора одной точки из общего кол-ва исключаются обе диагонали, а также две прямые, ∥ OX и OY на которых лежит выбранная точка, но эти прямые дважды пересекают одну из диагоналей, поэтому прибавляем 2. Общее кол-во узлов: 58^2

$58\cdot(58^2-58\cdot 2-57\cdot 2+2)$ ← для каждого из 4 и 5.

Случай 2 прост: $58\cdot 56$ (из второй диагонали исключаются те точки, с которыми получается прямая ∥ OX или OY.

Чистовик

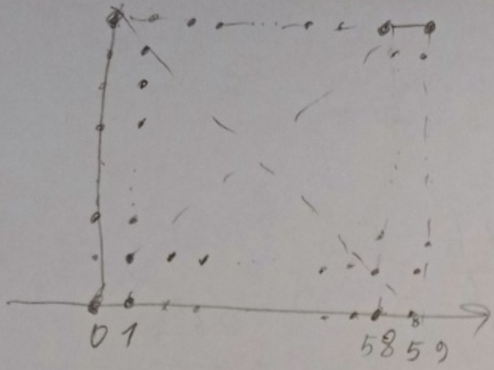
④

В сумме: $58\cdot57+58\cdot56+2\cdot58\cdot(58^2-58\cdot2-57\cdot2+2)$

1 и 3 — 2 — 4 и 5

Отв: 370330.

2021/2/27 15:04



$\boxed{58^2}$ $58(58^2-58\cdot 2-(2\cdot 57-2))$

$aa \to \frac{58\cdot 57}{2}$

$bb \to \frac{58\cdot 57}{2}$

$a-$

$b-$

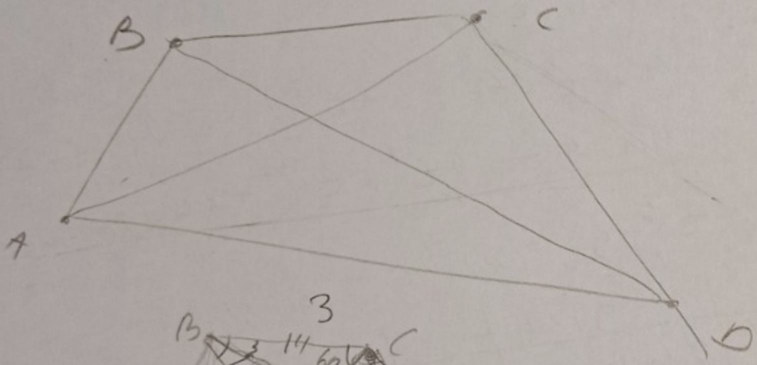
$ab \to 58\cdot 56$

$58\cdot 57+58\cdot 56+2\cdot 58(58^2-58\cdot 2-2\cdot 57+2)$

Черновик. $58(57+56+2(58^2-58\cdot 2-57\cdot 2+2)$

$113+2(58\cdot 56-57\cdot 2+2)$

$58(113+2\cdot 58\cdot 56-4\cdot 57+4)$

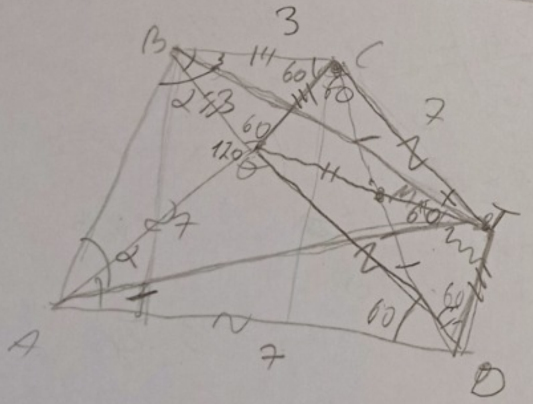


$ab=2-\frac{2}{t}$

$t^2+2-\frac{2}{t}=5$

$t^3+2t-2=5t$

$t^3-3t-2=0$



$$\begin{array}{r} 3248 \\ \times\ 2 \\ \hline 6496 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6496 \\ -\ 228 \\ \hline 6268 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times\ 56 \\ \hline 348 \\ 290\ \\ \hline 3248 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6272 \\ +\ 113 \\ \hline 6385 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6385 \\ \times\ 58 \\ \hline 51080 \\ 31925\ \\ \hline 370330 \end{array}$$

2021/2/27 15:04

Черновик

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4 + y^4 + 3x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{a+b} + ab = 2 \\ a^2+b^2+3ab = 5 \end{cases}$$

$(a+b)^2 + ab = 5$ $\quad D = 9b^2 - 4(b^2-5)$

$\frac{2}{a+b} = 2 - ab$

$a+b = \frac{2}{2-ab}$

$\cancel{(a+b)^2 + \frac{2}{a+b}}$

$(a+b)^2 + 2 - \frac{2}{a+b} = 5$

$\left(\frac{2}{2-t}\right)^2 + t = 5$

$t^2 - \frac{2}{t} - 3 = 0$

$\frac{4}{4-4t+t^2} + t - 5 = 0$

$ab = 1$

$a = \frac{1}{b}$

$b = \frac{1}{a}$

$ab = 4$

$b = \frac{4}{a}$

$a^2 + \frac{1}{a^2} + 3 = 5$

$a^2 + \frac{1}{a^2} = 2$

$a^4 + 1 = 2a^2$

$a^4 - 2a^2 + 1 = 0$

$(a^2-1)^2 = 0$

$a^2 = 1$

$a = \pm 1$

$b = \pm 1 \Rightarrow a = 1,\ b = 1 \Rightarrow x = \pm 1,\ y = \pm 1$

$4 + t(4 - 4t + t^2) - 5(4 - 4t + t^2) = 0$

$4 + 4t - 4t^2 + t^3 - 20 + 20t - 5t^2 = 0$

$t^3 - 9t^2 + 24t - 16 = 0$

	1	-9	24	-16
1	1	-8	16	0

$(t-1)(t^2 - 8t + 16) = 0$

$(t-1)(t-4)^2 = 0$

$t_1 = 1$

$t_2 = 4$

$a^2 + \frac{16}{a^2} + 12 = 5$

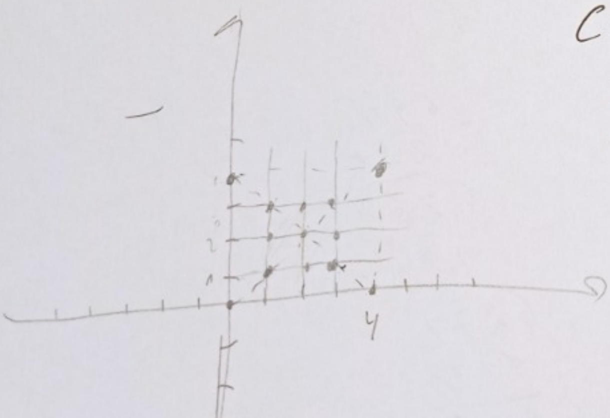
$a^4 + 16 + 7a^2 = 0$

$\varnothing$

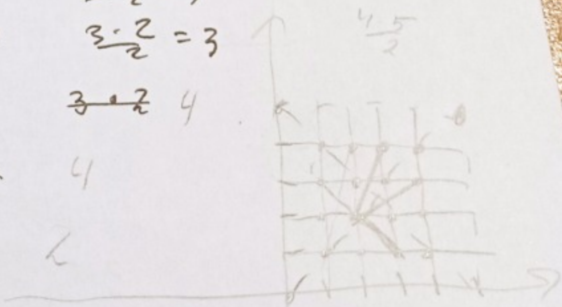
$\frac{2}{\alpha} + \beta = 2$

$\alpha^2 + \beta = 5$

$9 - 3 - 4$



a	a	$\frac{3\cdot 2}{2} = 3$
b	b	$\frac{3\cdot 2}{2} = 3$
a	–	$\cancel{3\cdot 2}$ 4
b	–	4
a	b	2



$y = 5 - x$ $\quad$ a $\quad \frac{3\cdot 4}{2} = 6$

$y = 4 - x$ $\quad$ b b $\quad \frac{3\cdot 2}{2} = 3$

+

$16 - 3\cdot 2 - 2 - 3$ $\quad 16 - 1 - 4 - 4 = 7$

$16 - 8$ $\quad 16 - 6 - 2$

2021/2/27 15:04