Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006159**

ID профиля: **805266**

Вариант 9

Чистовик ①

2\. $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$

$-x^2+2x+24=-(x+4)(x-6)=(x+4)(6-x)$

$D=4+4\cdot24=100 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm10}{-2}=-4,6$

ОДЗ: $\cancel{\sqrt{6-x}}$ $\begin{cases}6-x\geq0\\ x+4\geq0\end{cases} \Rightarrow x\in[-4;6]$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

Пусть $t=\sqrt{x+4}$ $\quad \sqrt{6-x}=\sqrt{10-t^2} \Rightarrow t\in[0;\sqrt{10}]$

$t-\sqrt{10-t^2}+4=2t\sqrt{10-t^2}$

$t+4=(2t+1)\sqrt{10-t^2}$

$t^2+8t+16=(4t^2+4t+1)(10-t^2)$

$t^2+8t+16=40t^2+40t+10-4t^4-4t^3-t^2$

$4t^4+4t^3-38t^2-32t+6=0$

$2t^4+2t^3-19t^2-16t+3=0$

Заметим $t_1=-1$ - корень. (не подх.)

$$\begin{array}{l|l} 2t^4+2t^3-19t^2-16t+3 & t+1 \\ \underline{2t^4+2t^3} & 2t^3-19t+3 \\ \quad -19t^2-16t & \\ \quad \underline{-19t^2-19t} & \\ \qquad 3t+3 & \\ \qquad \underline{3t+3} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$2t^3-19t+3=0$

$t_2=3$ - реш. (подх.)

$$\begin{array}{l|l} 2t^3-19t+3 & t-3 \\ \underline{2t^3-6t^2} & 2t^2+6t-1 \\ \quad 6t^2-19t & \\ \quad \underline{6t^2-18t} & \\ \qquad -t+3 & \\ \qquad \underline{-t+3} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$2t^2+6t-1=0$

$t_3=\frac{-6+\sqrt{36+8}}{4}=\frac{-6+2\sqrt{11}}{4}=\frac{\sqrt{11}-3}{2}$ ~~подх.~~ - возможно подх.

$t_4=\frac{-6-\sqrt{36+8}}{4}<0$ - не подх.

$\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\frac{\sqrt{11}-3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+4}=3 \\ \sqrt{x+4}=\frac{\sqrt{11}-3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=5 \\ \cancel{x=} \; x_2=\frac{20-6\sqrt{11}}{4}-4=\frac{4-6\sqrt{11}}{4}=\frac{2-3\sqrt{11}}{2}\end{array}\right.$

~~Оба корня подходят. Ответ: $x=5$; $x=\frac{2-3\sqrt{}}{}$~~

Чистовик 2

2. (Продолжение)

$\frac{2-3\sqrt{11}}{2} \wedge -5$ $\frac{3\sqrt{11}-2}{2} \vee 5$ $3\sqrt{11}-2 \vee 10$

$99+4-6\sqrt{11} \vee 100$ $-6\sqrt{11} \vee -3$ $-6\sqrt{11} < -3 \Rightarrow \frac{2-3\sqrt{11}}{2} > -5 \Rightarrow$

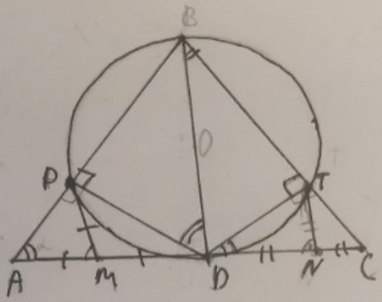
$\Rightarrow x_2$ - подх.

Ответ: ~~$x_1 = 5; x$~~ $x_1 = 5$; $x_2 = \frac{2-3\sqrt{11}}{2}$

Чистовик ③

1. Дано:

AM=MD
CN=ND
PM ∥ TN



Найти: а) ∠ABC

б) $MP=\frac{1}{2}$; $NT=\frac{5}{2}$; BD=2. S_{ABC}-?

Решение: а) ~~Т.к. D~~ Точка D - точка касания окружности прямой AC ⇒

⇒ BD - высота. ~~∠BTD=90 ⇒ ∠~~ ∠BTD = 90 (т.к. опирается на диаметр) ⇒

⇒ ∠DTC=90° ⇒ TN - медиана прямоуг. Δ. ⇒ TN = CN.

Аналогично PM = AM

Δ APM ~ Δ DTN (по 2 сторонам и углу между ними)

$\frac{AP}{DT}=\frac{AM}{DN}=\frac{PM}{TN}$

Аналогично Δ PMD ~ TNC

$\frac{PD}{TC}=\frac{PM}{TN}=\frac{MD}{CN}$

$\frac{AP}{DT}=\frac{PD}{TC}$ ⇒ AP·TC=PD·DT

Пусть ∠A=α BD=2R

~~$AD=\frac{2R}{\sin\alpha}$~~ $AD=\frac{2R}{tg\alpha}$ PD = 2R·cosα DT= 2R·sinα

$DC=\frac{2R}{tg(\frac{\pi}{2}-\alpha)}=\frac{2R}{ctg\alpha}=2R\,tg\alpha$

$AP=AD\cdot\cos\alpha=\frac{2R\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$ $TC=DC\cdot\sin\alpha=2R\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$

~~$AP\cdot TC=4R^2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha$~~

~~PD·DT=~~

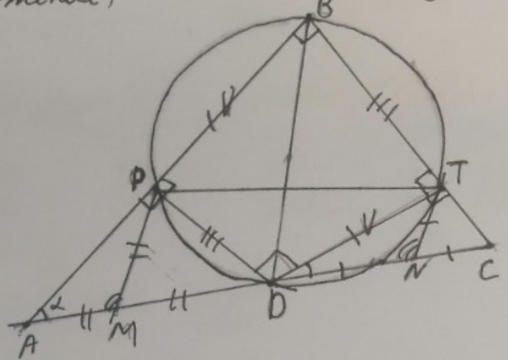
$AP^2=AD^2+PD^2$

$\frac{4R^2\cdot\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{4R^2\cdot\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+4R^2\cdot\cos^2\alpha$

211006159 (U805266 M1277802)

Чистовик (4)

1. (Продолжение)



$\angle BPD = 90$ (т.к. опирается на диаметр) $= \angle BTD$

$\triangle APM \sim \triangle DNT$ (по 2 сторонам и углу). $\triangle PMD \sim \triangle TNC$ — аналогично.

~~Пусть $\angle PAD = \alpha \Rightarrow$~~

$\angle APD = 90° \Rightarrow PM = \frac{1}{2} AD = AM$ — как медиана прямоуг. треуг.

$\angle PAD = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PDA = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad \angle TDC = \alpha \Rightarrow \angle PDT = \pi - \angle PDA - \angle TDC = \pi - \frac{\pi}{2} + \alpha - \alpha = \frac{\pi}{2}$

Т.к. BPDT вписан в окр. то $\angle B + \angle D = \pi \Rightarrow \boxed{\angle ABC = \pi - \angle PDT = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}}$

б) $MP = \frac{1}{2} \quad NT = \frac{5}{2} \quad BD = 2$

BPDT — прямоуг. $\Rightarrow PT = BD = 2,\ BP = DT,\ PD = BT$

$AD = 2MP = 1 \quad CD = 2NT = 5$

$AC = AD + CD = 6 \qquad S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = BP \cdot BT + \frac{1}{2}(AP \cdot PD + CT \cdot DT)$

$BP = \sqrt{4 - PD^2}$

$BT = PD$

~~$BP \Rightarrow$~~

$\frac{AP}{DT} = \frac{AM}{DN} \Rightarrow AP = DT \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{4 - PD^2}$

~~DB~~

$\frac{TC}{PD} = \frac{NC}{MD} \Rightarrow TC = 5PD$

$CD^2 = CT(CT + BT)$

$25 = 5PD \cdot 6PD \Rightarrow PD^2 = \frac{25}{30} = \frac{5}{6} = BT^2$

$\cancel{1 = \frac{1}{5}\sqrt{4 - PD^2} \cdot \frac{6}{5}\sqrt{4 - PD^2}}$

$\cancel{25 = 6(4 - PB^2)}$

$AP = \frac{1}{5}\sqrt{4 - \frac{25}{30}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{95}{30}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{19}{6}}$

~~$DT = \sqrt{\frac{19}{6}} = PB$~~ $\quad AB = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{95}{30}} + \sqrt{\frac{95}{30}} = \frac{6}{5}\sqrt{\frac{95}{30}}$

$BC = 6\sqrt{\frac{25}{30}}$

$\cancel{AB = AP + PB = \frac{6}{5}\sqrt{\frac{19}{6}} = \frac{\sqrt{114}}{5}}$

$\cancel{S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PD = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \sqrt{\frac{19}{6}} = \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{6}}}$

$\cancel{S_{BCD} = \frac{1}{2}(BT + TC) \cdot DT = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{19}}{2\sqrt{6}}}$

$\cancel{S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{6\sqrt{19}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{114}}{2}}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{36}{5} \cdot \frac{\sqrt{95 \cdot 25}}{30} = \frac{12.5\sqrt{95}}{150} =$

$= \frac{4\sqrt{95}}{10} = \frac{2\sqrt{95}}{5}$ $\cancel{\frac{\sqrt{95}}{5}}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}$ б) $\cancel{\frac{\sqrt{114}}{2}}$ $\cancel{\frac{2\sqrt{95}}{5}}$ б) $\cancel{\frac{\sqrt{19}}{8}}$ $\frac{2\sqrt{95}}{5}$

~~Чистовик~~ (5)
Черновик

~~1. (Продолжение).~~

$\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + 1$ $\quad \cancel{\cos^2\alpha = 1 + \sin^2\alpha}$

$\frac{AP}{DT} = \frac{AM}{DN}$ $\quad \frac{2R\cdot\cos^2\alpha}{\sin\alpha} \cdot \frac{1}{2R\cdot\sin\alpha} = \frac{R}{tg\alpha} \cdot \frac{1}{2R} \cdot \frac{1}{R\cdot tg\alpha}$

$CD^2 = CT \cdot CB$

$4R^2 tg^2\alpha = 2R \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{2R}{\cos\alpha}$

$\triangle ABD \sim \triangle BPD$ (по двум углам)

$\frac{AD}{PD} = \frac{BD}{AB}$ $\quad \frac{2R\cdot\cos\alpha}{2R\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha} = \frac{2R\cdot\sin\alpha}{2R}$ $\quad \sin^2\alpha = 1$

$AB = \frac{2R}{\sin\alpha}$

$\angle PBD = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad \angle DBT = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\angle ABC = \angle PBD + \angle DBT = \frac{\pi}{2}}$

б) $MP = \frac{1}{2}$; $NT = \frac{5}{2}$ $\quad$ ~~DB~~ $BD = 2$

$R = \frac{BD}{2} = 1$

~~MP~~ $AD = 2MP = 1$ $\Rightarrow AC = 6$

$CD = 2NT = 5$

$\boxed{S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC = 6}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}$ $\quad$ б) 6.

Черновик.

Часть 2

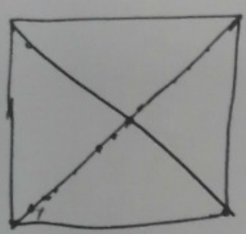
Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

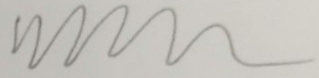
Шифр: **211006159**

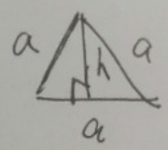
ID профиля: **805266**

Вариант 9

Черновик







$$\begin{array}{r} \times\ 116 \\ 28 \\ \hline 928 \\ 232 \\ \hline 3248 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 3248 \\ 115 \\ \hline 16240 \\ 3248 \\ 3248 \\ \hline 373520 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +\ 373520 \\ 113 \\ \hline \cancel{373633} \end{array}$$

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

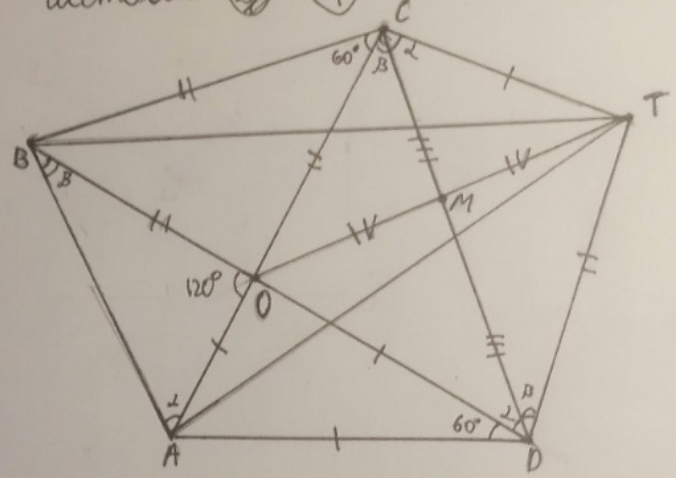
$\cancel{S_\triangle}$ $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$$\begin{array}{r} \times\ 114 \\ 56 \\ \hline 684 \\ 570 \\ \hline 6384 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\ 373520 \\ 6385 \\ \hline 367135 \end{array}$$

Чистовик (4)

6. Дано:
ΔAOD-прав.
ΔBOC-прав.
$OM=MT$
$CM=MD$



Найти:
а) Док-ть что ABT-прав. Δ
б) $BC=3$, $AD=7$, $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$-?

Решение. ~~ΔCOM ≅ ΔMOD (по 3-ем сторонам)~~

а) $\Delta OBA=\Delta COD$ (по 2-ум сторонам и углу между ними).

$AB=CD$

Пусть $\angle BAC=\alpha$, $\angle DBA=\beta$

$\alpha+\beta=60°$

$\Delta COD=\Delta CTD \Rightarrow COD T$ - парал паралелограмм.

Пусть $AD=a$ $CB=b$. Тогда $AT^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos 120°=BT^2$

$\angle COD=\angle CTD=120°$

$CD^2=a^2+b^2-2ab\cos 120°=AT^2=BT^2=AB^2\Rightarrow$

$\Rightarrow AB=AT=BT\Rightarrow\Delta ABC$-прав. ч.т.д.

б) $a=7$ $b=3$

$AB^2=49+9-42\cdot(-\frac{1}{2})=58+21=79$

$AB=\sqrt{79}$

$S_{COB}=\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$ $S_{AOD}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{49\sqrt{3}}{4}$

$S_{AOB}=S_{COD}=\frac{21\sqrt{3}}{4}$ $S_{ABCD}=S_{COB}+S_{AOD}+2S_{AOB}=\frac{58\sqrt{3}+42\sqrt{3}}{4}=25\sqrt{3}$

$S_{ABT}=\frac{79\sqrt{3}}{4}$ $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{79\sqrt{3}}{100\sqrt{3}}=\frac{79}{100}$

Ответ: а) см. пункт а) б) $\frac{79}{100}$.

211006159 (U805266 M1277803)

Чистовик 3

5. (Продолжение)

Итого: $115 \cdot 116 \cdot 28 + 115 - 114 \cdot 112 - 57$

Тогда вообще подходящих случаев:

$\cancel{115 \cdot 57 -}$

$115 \cdot 56 - 1 + 115 \cdot 116 \cdot 28 + 115 - 114 \cdot 112 - 57 =$

$= 114 \cdot 56 - 1 + 115 \cdot 116 \cdot 28 + 115 - 114 \cdot 112 - 1 =$

$= 115 \cdot 116 \cdot 28 - 114 \cdot 56 + 114 - 1 = 115 \cdot 116 \cdot 28 - 114 \cdot 55 - 1 =$

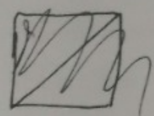
$= 373520 - 6385 = 367135$

Ответ: 367135 случая.

Чистовик ②

5. Заметим, что ~~названные~~ прямые $y=x$ и $y=59-x$ есть диагонали данного квадрата.

Каждая прямая содержит 58 узлов, причем один узел будет общим - точка их пересечения. Итого узлов на этих прямых: $2\cdot58-1=115$ штук.



1) Оба узла лежат на этих прямых

Тогда возможных случаев: $\cancel{115}\ C_{115}^2 = \frac{115\cdot114}{2} = 115\cdot57$

Но через в ~~каждые~~ 2 узла ~~можно провести одну 2 пару прямые, параллельные осям координат~~ прямые, параллельные осям включают. То есть этих прямых столько же, сколько и узлов, то есть 115 штук, т.к учитываем и гор. и верт. прямые.

Значит итого: ~~115·57 - 116 116~~ $115\cdot57-115=115\cdot56 - 1$

2) 1 узел на прямых, другой нет.

Точек вне диагоналей ~~узлов~~, но, внутри квадрата: $58^2-115 = 116\cdot29-115=116\cdot28+1$

Тогда возможных случаев: $115\cdot116\cdot28+115$

~~Но через каждую точек лежащих на одной~~

Случаев когда прямые ~~Прямых~~ проходят через данные точки и параллельные осям, кроме случая когда 1-я точка лежит на пересечении диагоналей: ~~$2\cdot57^2=114\cdot57$~~ $2\cdot2\cdot56\cdot57=114\cdot56\cdot2=114\cdot112$

Случаев когда 1-я точка лежит на пересечении диагоналей, и прямые проведенная через узлы ~~парал~~ параллельна осям: $1\cdot57=57$

~~Итого: $115\cdot116\cdot28+115-114\cdot56-57=115\cdot116\cdot28+115-114\cdot57-1=$~~

~~$=115\cdot116\cdot28-114\cdot55-56$~~ Итого:

~~Тогда всех возможных подходящих случаев:~~

$115\cdot56-1+115\cdot116\cdot28-114\cdot55-56=114\cdot56-1+115\cdot116\cdot28-114\cdot55=$

$=114-1+115\cdot116\cdot28=113+115\cdot116\cdot28=\cancel{373634}\ 373633$

Ответ: ~~373634 способов~~

373633 способа.

Чистовик (1)

4. $\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$

$a = x^2+y^2 \quad b = x^2y^2 \quad \cancel{a,b>0}$

ОДЗ: $a \neq 0, a > 0, b > 0$

$\begin{cases} \frac{2}{a} + b = 2 \\ a^2 + b = 5 \end{cases} \Rightarrow b = 5 - a^2$

$\frac{2}{a} + 5 - a^2 = 2$

$a^2 - 3 - \frac{2}{a} = 0$

$a^3 - 3a - 2 = 0$

$a_1 = -1$ (не подх.)

$$\begin{array}{r|l} a^3-3a-2 & a+1 \\ \hline a^3+a^2 & a^2-a-2 \\ -a^2-3a & \\ -a^2-a & \\ -2a-2 & \\ -2a-2 & \\ 0 & \end{array}$$

$a^2 - a - 2 = 0$

$a_2 = -1$ - не подх

$a_3 = 2 \Rightarrow b = 1$

$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2 \cdot y^2 = 1 \end{cases}$ Пусть $c = x^2 \quad d = y^2$, $c > 0, d > 0$

$\begin{cases} c+d=2 \\ c \cdot d = 1 \end{cases} \Rightarrow d = 2 - c$

$2c - c^2 = 1 \Leftrightarrow c^2 - 2c + 1 = 0$

$c_1 = 1 \quad c_2 = 1$

$\begin{cases} c=1 \\ d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y^2=1 \end{cases} \Rightarrow (1;1), (1;-1), (-1;-1), (-1;1)$

Ответ: $(1;1), (1;-1), (-1;-1), (-1;1)$.

211006159 (U805266 M1277803)