# Часть 1

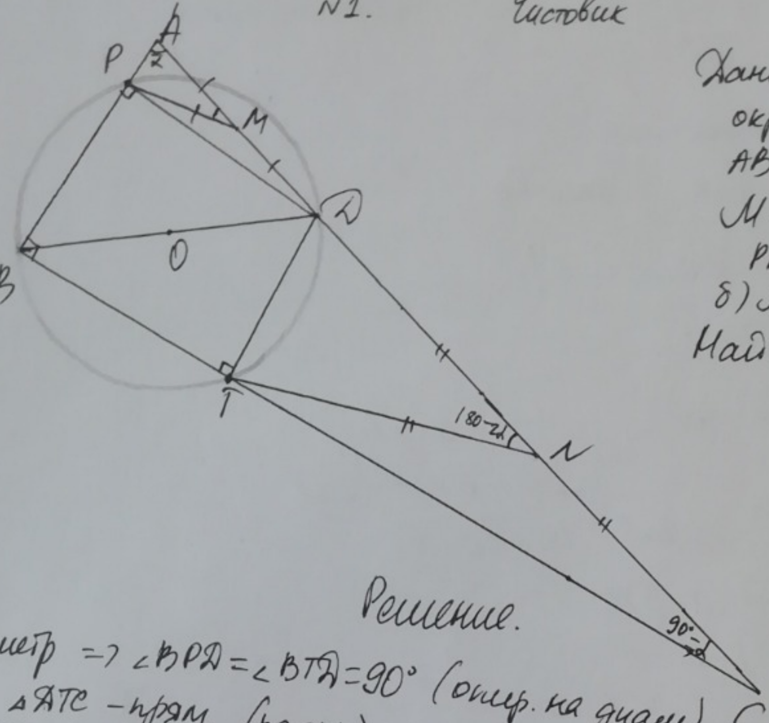
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005925**

ID профиля: **205624**

Вариант 9

Вариант 9. N1. Чистовик



Дано: $\triangle ABC$, $D \in AC$
окр-ть $(O; \frac{BD}{2})$, где $O \in BD$
$AB \cap$ окр-ть $= P$, $BC \cap$ окр-ть $= T$
M-сер. AD, N-сер. CD
$PM \parallel TN$
б) $MP = \frac{1}{2}$, $NT = \frac{5}{2}$, $BD = 2$
Найти: а) $\angle ABC$
б) $S_{ABC}$

## Решение.

а) BD-диаметр $\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90°$ (опир. на диам.)
$\Rightarrow \triangle APD$, $\triangle DTC$ – прям. (по опр.)
M-сер. AD $\Rightarrow$ PM-мед. $\triangle APD$
N-сер. DC $\Rightarrow$ TN-мед. $\triangle DTC$ / $\Rightarrow PM = \frac{1}{2}AD = AM = MD$
$TN = \frac{1}{2}DC = DN = NC$ (по св-ву прям. △)
$PM \parallel TN$, сек. AC $\Rightarrow \angle AMP = \angle ANT$ (как соотв. - по св-ву ∥пр.)
$\frac{AM}{DN} = \frac{PM}{TN}$ / $\Rightarrow \triangle AMP \sim \triangle DNT$ (по 2 ст. и ∠)
Пусть $\angle PAM = \angle APM = \alpha = \angle NDT = \angle NTD$ (по опр. ∾△)
$\angle DTC = 90° \Rightarrow \angle NTC = 90° - \alpha$
$\triangle TNC$ – р/б (по опр) / $\Rightarrow \angle NCT = \angle NTC = 90° - \alpha$
$\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle BCA$ (по т. о $\Sigma \angle$ в △) $= 180° - \alpha - 90° + \alpha = 90°$

б) $MP = \frac{1}{2}AD$ (см. выше) $= \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 1$
$TN = \frac{1}{2}DC$ (см. выше) $= \frac{5}{2} \Rightarrow DC = 5$ / $\Rightarrow AC = 6$
$\angle ABC = 90°$
BPDT – впис. (по опр.) / $\Rightarrow \angle PDT = 180° - 90° = 90°$ (по св-ву)
$\angle BPD = \angle BTD = 90°$ (см. выше) / $\Rightarrow$ BPDT – прям-ик (по опр.) $\Rightarrow BP = DT$
$DT^2 = DN^2 + TN^2 - 2DN \cdot TN \cdot \cos(180 - 2\alpha) = \frac{25}{2} + \frac{25}{2}\cos 2\alpha = \frac{25}{2}(1 + 2\cos^2\alpha - 1) = 25\cos^2\alpha$
$\alpha < 90° \Rightarrow \alpha \in$ I четв. $\Rightarrow DT = 5\cos\alpha$
$PD = AD \cdot \sin\alpha$ (по опр. синуса) $= 2PM \cdot \sin\alpha = \sin\alpha$
$BP = \sqrt{BD^2 - PD^2}$ (по т. Пиф.) $= \sqrt{4 - \sin^2\alpha} = \sqrt{3 + \cos^2\alpha}$
$BP^2 = DT^2 \Rightarrow 3 + \cos^2\alpha = 25\cos^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
$AB = AC \cdot \cos\alpha$ (по опр. кос.) $\Rightarrow AB = 6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$
$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$ (по т. Пиф.) $\Rightarrow BC = \sqrt{36 - \frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{63}{2}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$
$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$

Ответ: а) $\angle ABC = 90°$ б) $S_{ABC} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$

№2. Чистовик

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{-x^2+2x+24}$

~~$y = -x^2+2x+24$ — парабола, ветвями вниз~~

$(x+4)(6-x) = -x^2+2x+24$, тогда достаточно:

ОДЗ: $\begin{cases} x+4 \geqslant 0 \\ 6-x \geqslant 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -4 \\ x \leqslant 6 \end{cases}$ $\Rightarrow x \in [-4; 6]$

Пусть $a = \sqrt{x+4}$, $b = \sqrt{6-x}$

Тогда $a^2+b^2 = x+4+6-x = 10$.

и $a-b+4 = 2ab$ $\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 10 \\ a-b+4 = 2ab \end{cases}$

$(a-b)^2 + 2ab = 10 \Rightarrow 2ab = 10-(a-b)^2$

$(a-b)+4 = 10-(a-b)^2$

$(a-b)^2 + (a-b) - 6 = 0$

$D = 1+24 = 5^2 \Rightarrow a-b = \frac{-1+5}{2} = 2 \Rightarrow a = b+2$

$a-b = \frac{-1-5}{2} = -3 \Rightarrow a = b-3$

1) $a = b+2$

$\underbrace{\sqrt{x+4}}_{\geqslant 0} = \underbrace{\sqrt{6-x}+2}_{\geqslant 2.}$ $\Rightarrow$ возводя в квадрат никакие лишние корни не приобретаем

$x+4 = 6-x+4+4\sqrt{6-x}$

$x-3 = 2\sqrt{6-x}$

$\begin{cases} x^2-6x+9 = 24-4x \\ x-3 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x-15=0 \\ x \geqslant 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-5)(x+3)=0 \\ x \geqslant 3 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-3 \end{array}\right. \\ x \geqslant 3 \end{cases}$ → пост. кор.

$x = 5$

2) $a = b-3$

$\underbrace{\sqrt{x+4}+3}_{\geqslant 3} = \underbrace{\sqrt{6-x}}_{\geqslant 0}$ $\Rightarrow$ аналогично можно возвести в квадрат

$x+4+9+6\sqrt{x+4} = 6-x$

$6\sqrt{x+4} = -7-2x$

$\begin{cases} 36x+144 = 49+28x+4x^2 \\ 7+2x \leqslant 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x^2-8x-95=0 \\ x \leqslant -\frac{7}{2} \end{cases}$

$4x^2-8x-95=0$

$D = 64+1520 = 1584 = 12\sqrt{11}^2$

$x_1 = \frac{8+12\sqrt{11}}{8} = 1+1{,}5\sqrt{11} \nleq -\frac{7}{2} \Rightarrow$ постор. корень

$x_2 = 1-1{,}5\sqrt{11}$

$1-1{,}5\sqrt{11} \vee \frac{-7}{2}$.

$2-3\sqrt{11} \vee -7$.

$9 \vee 3\sqrt{11}$

$3 \vee \sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{11} > 3 \Rightarrow \frac{-7}{2} > 1-1{,}5\sqrt{11}$

$1-1{,}5\sqrt{11} \vee -4$

$5 \vee 1{,}5\sqrt{11}$

$\frac{10}{3} \vee \sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{\frac{100}{9}} \vee \sqrt{11} \Rightarrow \sqrt{11\frac{1}{9}} > \sqrt{11} \Rightarrow 1-\sqrt{11}\cdot 1{,}5 > -4$

Ответ: $x \in \{5; 1-1{,}5\sqrt{11}\}$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$

$\begin{cases} x+4\geq 0 \\ 6-x\geq 0 \\ 24+2x-x^2\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -4 \\ x\leq 6. \\ x^2-2x-24\leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -4 \\ x\leq 6 \\ (x-6)(x+4)\leq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in[-4;6]$

$a=x+4$
$b=6-\cancel{x}$ $\Rightarrow a+b=10$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}+4=2\sqrt{ab}.$

$\sqrt{a}+4=\sqrt{b}(2\sqrt{a}+1)$

$\sqrt{b}=\frac{\sqrt{a}+4}{2\sqrt{a}+1}$

$b=\frac{a+8\sqrt{a}+16}{4a+4\sqrt{a}+1}$

$40=$

$\sqrt{x+4}=a$
$\sqrt{6-x}=b.$
$\sqrt{24+2x-x^2}=ab.$

$a-b+4=2ab.$

$a+4=b(2a+1)$ : $a=-\frac{1}{2}$ ; $3,5\neq 0$

$b=\frac{a+4}{2a+1}$

$\sqrt{6-x}=\frac{\sqrt{x+4}+4}{2\sqrt{x+4}+1}$ $\geq 0$

$2\sqrt{6-x}\cdot\sqrt{x+4}+\sqrt{6-x}=\sqrt{x+4}+4.$

~~$x+4+6-x\neq$~~

~~$\sqrt{x+4}$~~

$a(\overset{\geq 1}{1-2b})=b-4.$

$a=\frac{b-4}{1-2b}$

~~$x\geq 4 \Rightarrow x\neq 0$~~

$x\leq 6 \Rightarrow x+4\leq 10.$

~~$x\geq -4 \Rightarrow 6$~~

$\sqrt{x+4}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}+\sqrt{6-x}$

$x+4+16+8\sqrt{x+4}=4(24+2x-x^2)+6-x+2(6-x)\sqrt{x+4}.$

$\begin{cases} x+4=a^2 \\ 6-x=b. \end{cases}$

$a^2+b^2=10$
$b=\sqrt{10-a^2}$

$x+20+8\sqrt{x+4}=96+8x-4x^2+6-x+12\sqrt{x+4}-2x\sqrt{x+4}.$

$a^2=x+4$
$b=36-x.$

$2x\sqrt{x+4}-4\sqrt{x+4}=-4x^2+6x+82.$

$\sqrt{x+4}(x-2)=-2x^2+3x+41.$

$(x+4)(x-2)^2=(-2x^2+3x+41)^2$

$8\times 41$
$328$

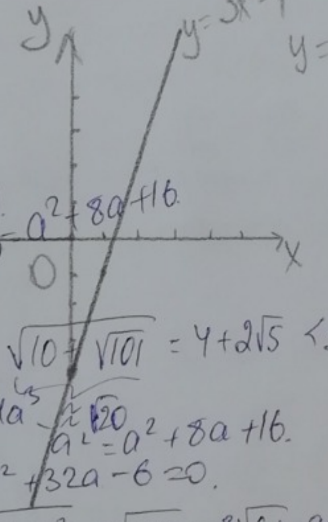
$-2x^2+3x+41\geq 0.$ $2x^2-3x-41\leq 0.$

$D=9+328=337.$ $\approx 18.$

$x_1=\frac{3+\sqrt{337}}{4}<6.$

$x_2=\frac{3-\sqrt{337}}{4}>-4$

$a=\sqrt{x+4}$
$b=\sqrt{6-x}$



$y=3x-4$ $\frac{3+\sqrt{337}}{4}\vee 6.$

$3+\sqrt{337}\vee 24.$

$\sqrt{337}<21.$

$a-b+4=2ab.$

$a+4=b(2a+1)$

$b=\frac{a+4}{2a+1}$

$\sqrt{10-a^2}(2a+1)=a+4.$ $a^2+8a+16.$

$(10-a^2)(4a^2+4a+1)$

$\sqrt{x+4}+\sqrt{6-x}+4\leq 4+\sqrt{10+\sqrt{101}}=4+2\sqrt{5}<9.$

$\sqrt{20}$

$40a^2+40a+10-4a^4+4a^3-a^2=a^2+8a+16.$

$-4a^4+4a^3+38a^2+32a-6=0.$

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0.$

$\frac{ax^2+2a^2x+a^3+1}{a}=y.$

$\begin{array}{r} 672 \\ -64 \\ \hline 32 \end{array}$ $\begin{array}{|l} 16 \\ \hline 42 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 16 \\ 22 \\ \hline 32 \\ 32 \\ \hline 352 \end{array}$ $\begin{array}{r} \times 16 \\ 26 \\ \hline 96 \\ 32 \\ \hline 416 \end{array}$

$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$

$x_0=\frac{-2a}{2}=-a$

$y_0=a^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}.$

$B(-a;\frac{1}{a})$

$26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0.$

$x+4+6-x+16-2\sqrt{24+2x-x^2}+8\sqrt{x+4}-8\sqrt{6-x}=96+8x-4x^2$ $4y^2+y(8x-20a)+(5x^2-22ax+26a^2)=0.$

$13-\sqrt{24+2x-x^2}+4(\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x})=48+4x-2x^2$ $\frac{D}{4}=$ $64x^2-320ax+400a^2-80x^2-352ax-416a^2$

$=-16x^2-672ax-16a^2=$

$=-16(x^2+42ax+a^2)$

$x=-3$

$1-3+4=2.$
$\sqrt{24-6-9}=3.$

$a^2\in[0;10+\sqrt{101}]$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=2\sqrt{ab}-4.$

~~$a+b-2\sqrt{ab}=4ab.-16\sqrt{ab}+16$~~ $a\leq\sqrt{10+\sqrt{101}}$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4\leq 4+\sqrt{10}<8.$

$x_0=\frac{-2}{-2}=1\Rightarrow y_0=24+2-1=25.$

$2\sqrt{24+2x-x^2}\geq 10$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=a.$ , $a\geq 0.$

$\sqrt{x+4}=a+\sqrt{6-x}.$

$x+4=a^2+2a\sqrt{6-x}+6-x.$

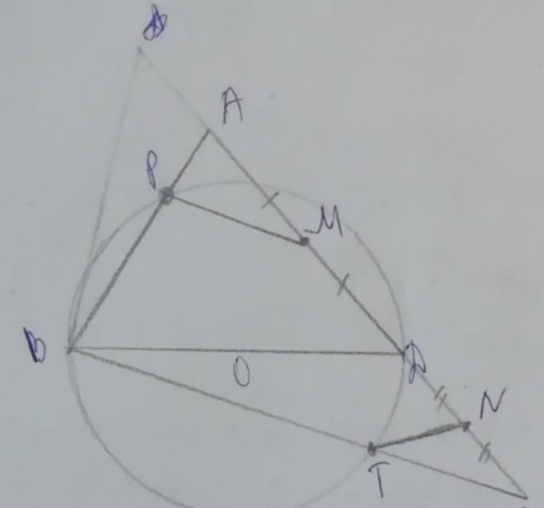
$2x-2-a^2=2a\sqrt{6-x}.$

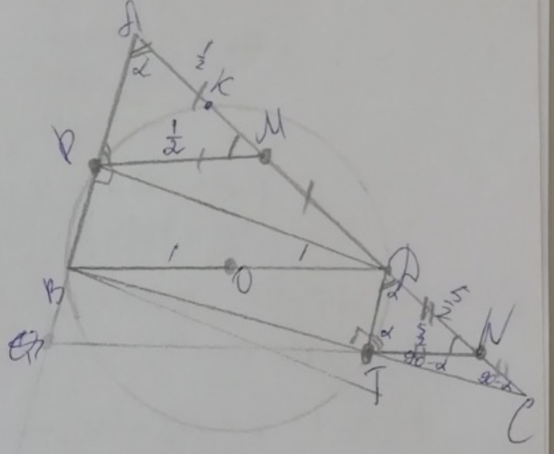
$4x^2+4+a^4-8x-\cancel{4a^2x}+4a^2=24a^2-\cancel{4a^2x}$

$a^4-20a^2+4x^2-8x+4=0.$

$-a^4+20a^2+1\geq 0$ $a^4-20a^2-1\leq 0.$

$D=4004$ $a\in[$ $\frac{D}{4}=64-64(a^4-20a^2)=64-64a^4+1280a^2\geq 0.$





a) $TN \cap AB = Q \Rightarrow PM \parallel QN \Rightarrow \frac{AP}{PQ} = \frac{AM}{MN}$

BD - диам. $\Rightarrow \angle BTD = 90° = \angle BPD \Rightarrow \triangle DTC$ - прям, TN - мед / $\Rightarrow TN = DN = NC$

~~$\frac{AN}{AC} \cdot \frac{CT}{TB} \cdot \frac{BQ}{QA} = 1$~~   $CT \cdot CB = CD$.   $\angle DCT = \frac{\breve{BK} - \breve{DT}}{2} = \angle BDK - \angle DBT$

$\triangle APD$ - прям, PM - мед / $\Rightarrow PM = AM = MD$

$PM \parallel TN$, сек. AN $\Rightarrow \angle AMP = \angle DNT$, $\frac{AM}{DN} = \frac{PN}{TN}$ / $\Rightarrow \triangle AMP \sim \triangle DNT$ (по 2 ст. и ∠)

$\Rightarrow \angle NDT = \angle DTN = \alpha = \angle PAM$

~~$\angle ATC$~~ $= \angle NCT = 90 - \alpha$ / $\Rightarrow \angle ABC = 90° \Rightarrow$ PT - диам.

б) $MP = \frac{1}{2}$, $NT = \frac{5}{2}$, $BD = 2$.

$R = 1$.   BT

$MP = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 1$

$NT = \frac{1}{2} DC = \frac{5}{2} \Rightarrow DC = 5$ / $\Rightarrow AC = 6$.   $\frac{AB}{AC} = \cos\alpha$

~~$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$~~ $\wedge$ $\frac{AB \cdot BC}{2} = S_{ABC}$.

$PD = AD \sin\alpha = \sin\alpha$ ; $AP^2 = 2AM^2 + 2AM^2 \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$

$PB = \sqrt{4 - AD^2 \cdot \sin^2\alpha} = \sqrt{4 - \sin^2\alpha} = \sqrt{\cos^2\alpha + 3}$   $AP = \cos\alpha$   $2DN^2(1 + 2\cos^2\alpha - 1) = 4DN^2 \cos^2\alpha$

$AN = \frac{5}{2} \Rightarrow DN^2 = \frac{25}{4}$   $4DN^2 = 25$.

$AB = $ ~~$4z \sin^2\alpha$~~ $\sqrt{\cos^2\alpha + 3} + \cos\alpha$

~~$DC^2 = 2CN^2 + 2CN^2 \cos 2\alpha = \frac{25}{2} + \frac{25}{2} - 25\sin^2\alpha = 25 \cdot \cos^2\alpha \Rightarrow TC = 5\cos\alpha$~~

$TC^2 = 2CN^2 - 2CN^2 \cdot \cos 2\alpha = \frac{25}{2} - \frac{25}{2} + 25\sin^2\alpha \Rightarrow TC = 5\sin\alpha$

$DT^2 = 2DN^2 + 2DN^2 \cdot \cos 2\alpha \Rightarrow DT = 5\cos\alpha$.

$BT = \sqrt{4 - 25\cos^2\alpha} \Rightarrow BC =$ ~~$\sqrt{4 - 25\cos^2\alpha}$~~ ~~$4\sin^2\alpha$~~ $\sqrt{25\sin^2\alpha - 21} + 5\sin\alpha$

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

~~$\cos^2\alpha + 3 + \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sqrt{\cos^2\alpha + 3} + 4 - 25\cos^2\alpha + 25\sin^2\alpha + 10\sin\alpha\sqrt{4 - 25\cos^2\alpha} = 36$.~~

~~$\frac{1}{2} PD \cdot DB = \frac{PD \cdot BD \cdot 2}{8}$~~   $DT = BP$ (прям-ик) $\Rightarrow 5\cos\alpha = \sqrt{\cos^2\alpha + 3}$

$25\cos^2\alpha = \cos^2\alpha + 3$

$24\cos^2\alpha = 3 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

$AB = \sqrt{\frac{25}{8}} +$ ~~$\frac{\sqrt{2}}{4}$~~ $\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 6/2\sqrt{2} = 3/\sqrt{2}$.

$BC^2 = AC^2 - AB^2 = 36 - \frac{9}{2} = \frac{63}{2} \Rightarrow BC = 3\sqrt{\frac{7}{2}} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AB = \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{9\sqrt{7}}{4}}$

$$\begin{cases} a^2+b^2=10. \\ a-b+4=2ab. \end{cases}$$

$a=\sqrt{x+4}$
$b=\sqrt{6-x}.$

$(a-b)^2+2ab=10. \Rightarrow 2ab=$ ~~$(a+b)^2-10$~~ $10-(a-b)^2$
$(a-b)+4=10-(a-b)^2$
$(a-b)^2+(a-b)-6=0.$
Д $=1+24=5^2$
$a-b=\frac{-1+5}{2}=2. \Rightarrow a=b+2$
$a-b=\frac{-1-5}{2}=-3. \Rightarrow a=b-3$

$\sqrt{x+4}=\sqrt{6-x}+2.$
$x+4=6-x+4+4\sqrt{6-x}.$
$x-3=2\sqrt{6-x}.$
$x^2-6x+9=24-4x.$
$x^2+2x-15=0.$
$(x-5)(x+3)=0$
$x=5;\ x=-3$

$\times\frac{16}{22}$
$32$
$32$
$352$

$\times\frac{16}{26}$
$96$
$32$
$416$

$1584=12\sqrt{11}$
$1440$
$144$

$1584 \mid 4$
$396 \mid 4$
$99 \mid 9$
$11$

$816 \mid 2$
$408 \mid 2$
$204 \mid 2$
$102 \mid 2$
$51$

$\times\frac{3{,}4}{2{,}5}$ $170$ $34$ $4{,}10$

$\times\frac{95}{16}$ $570$ $95$ $1520$

$\sqrt{11}<3{,}5.$
$1{,}5\sqrt{11}<5{,}25.$

$\times\frac{3{,}5}{3{,}5}$ $175$ $105$ $12{,}25$

$\times\frac{3{,}3}{3{,}3}$ $99$ $99$ $10{,}89$

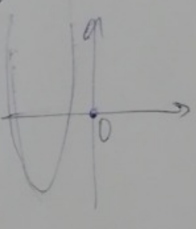
$\times\frac{3{,}4}{3{,}4}$ $136$ $102$ $11{,}56$

$26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0.$ 6
16
$4y^2+y(8x-20a)+(5x^2-22ax+26a^2)=0$
Д $=64x^2-320ax+400a^2-80x^2-352ax+416a^2$
$=-16x^2-672ax+816a^2=$
$=-16(x^2+42ax-51a^2)$

1) $a=0$ $5x^2+8xy+4y^2=0$
Д $=64x^2-80x^2<0.$
[illegible]

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0.$
$ax^2+2a^2$ парабола $\Rightarrow a\neq0.$
$x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}=y.$
$x_0=\frac{-2a}{2}=-a$
$y_0=a^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$
В $(-a;\frac{1}{a})$

$x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$



1) т.В ниже прямой
$x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}<3x-4.$
$x^2+x(2a-3)+a^2+\frac{1}{a}+4<0.$
Д $=4a^2-12a+9-4a^2-\frac{4}{a}-16=-12a-\frac{4}{a}-7>0$
$12a+\frac{4}{a}+7<0.$
$\frac{12a^2+7a+4}{a}<0.$
$x_1=\frac{3-2a\pm\sqrt{-12a-\frac{4}{a}-7}}{2}$

$x\in\left(\frac{3-2a-\sqrt{-12a-\frac{4}{a}-7}}{2};\frac{3-2a+\sqrt{-12a-\frac{4}{a}-7}}{2}\right)$

Д $=49-16\cdot12<0 \Rightarrow 12a^2+7a+4>0\ \forall a.$
$\frac{12a^2+7a+4}{a}<0 \Rightarrow \underline{a<0}.$

$\sqrt{5}x-[(kx-a)^2+(y\cdot m\cdot y-b^2)^2<R^2$
$\sqrt{5}x-26a^2+8xy=22ax+20ay-5x^2-4y^2.$

№3.

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$ - парабола с вершиной в точке B

$ay=ax^2+2a^2x+a^3+1$

т.к. это парабола, старший коэффициент не равен 0 $\Rightarrow a\neq 0$ и можно поделить на него.

$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$

$x_0=\frac{-2a}{2}=-a \Rightarrow y_0=a^2+2a^2+a^2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$

$B\left(-a;\frac{1}{a}\right)$

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005925**

ID профиля: **205624**

Вариант 9

№4. Чистовик

$$\begin{cases}\frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2\\ x^4+y^4+3x^2y^2=5\end{cases}$$

Пусть $a=x^2+y^2$, $b=x^2y^2$

Тогда $a^2=x^4+2x^2y^2+y^4$

$$\begin{cases}\frac{2}{a}+b=2\\ a^2+b=5\end{cases}\quad \begin{array}{l}\to b=2-\frac{2}{a}\\ \to b=5-a^2\end{array}\Bigg| \Rightarrow 2-\frac{2}{a}=5-a^2 \Rightarrow a^2-\frac{2}{a}-3=0.$$

$$\frac{a^3-3a-2}{a}=0 \Rightarrow \begin{cases}a^3-3a-2=0\\ a\neq0\end{cases}$$

Можно заметить, что $a=-1$ является корнем данного ур-ния

$$\begin{array}{l|l} a^3+0\cdot a^2-3a-2 & a+1 \\ \hline -\underline{a^3+a^2} & a^2-a-2 \\ \quad -a^2-3a & \\ \quad -\underline{a^2-a} & \\ \qquad -2a-2 & \\ \qquad -\underline{2a-2} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$a^2-a-2=(a-2)(a+1)$

$\shortparallel$

$a^3-3a-2=(a+1)^2(a-2)=0$

$a=-1$ → постор. корень, т.к. $a=x^2+y^2\geqslant0$

$a=2 \Rightarrow b=2-\frac{2}{2}=1$

$$\begin{cases}x^2+y^2=2\\ x^2y^2=1\end{cases}\quad \begin{array}{l}\to y^2=2-x^2\\ \to 2x^2-x^4=1\end{array} \Rightarrow x^4-2x^2+1=0 \Rightarrow (x^2-1)^2=0 \Rightarrow x^2-1=0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}x=1 & y=\pm1\\ x=-1 & y=\pm1\end{array}\right.$$ (т.к. $y^2=1 \Rightarrow (y-1)(y+1)=0$)

Ответ: $(1;1),(1;-1),(-1;1),(-1;-1)$

№5. Чистовик

Дан квадрат 59×59.

Выбрать 2 узла сетки нужно из внутри квадрата, поэтому у нас образуется квадрат, длина и ширина которого на 2 клеточки меньше исходного, но при этом, соответственно, число узловых точек на одной стороне на один больше длины стороны, т.е. в данном случае узловых точек (59-2+1) = 58 на каждой стороне квадрата 57×57, т.е. всего их $58^2$

Мы выбираем хотя бы одну из точек на диагонали квадрата. (т.к. прямые $y = 59-x$ и $y = x$ именно они)

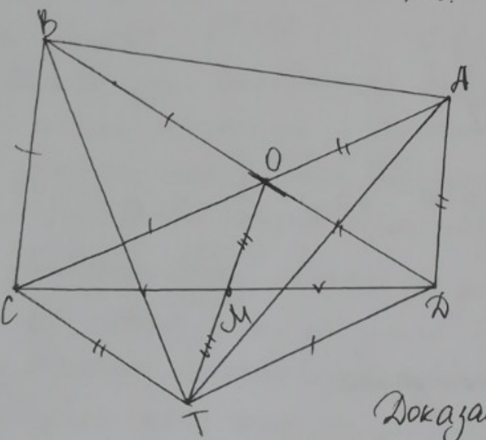
Т.к. 59 - нечёт. число, то у нас будет центральная клетка (а не точка, как если бы было у квадрата с чётной стороной), в которой пересекутся диагонали. Поэтому сначала мы выбираем одну точку из 58·2 – она лежит на одной из нужных прямых.

Теперь необходимо взять любую другую точку, кроме тех, что вместе с выбранной точкой образуют прямую, параллельную одной из осей координат. Т.е. эти точки имеют либо ту же ординату, либо ту же абсциссу, что и выбранная точка. Таких точек (58-1) по вертикали и (58-1) по горизонтали, но мы также не можем выбрать ту же, что и сначала, поэтому таких точек будет $2\cdot(58-1)-1 = 2\cdot57-1 = 113$. Тогда число способов выбрать 1 точку из оставшихся будет: $C^1_{58^2-113} = C^1_{3251} = 3251$

Т.к. мы выбираем 2 точки одновременно, то итоговый ответ будет $116\cdot3251 = 377\,116$

Ответ: 377 116 способов.

№6. Чистовик



Дано: ABCД – выпуклый
$AC \cap BД = O$
$\triangle BOC$, $\triangle AOД$ – р/с
М – сер. СД
О симм. Т относ. М
б) $BC = 3$, $AД = 7$
Д-ть: $\triangle ABT$ – р/с
Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCД}}$

Доказательства

О симм. Т относ. М $\Rightarrow OM = MT$ (по св-ву симм.)
$CM = MД$ (по усл.) $\Big/ \Rightarrow$ СОДТ – пар-м (по призн.) $\Rightarrow OД = CT$, $OC = ДT$ (по св-ву)

$O = BД \cap AC$
$\angle BOC = 60°$ (по св-ву р/с $\triangle$) $\Big/ \Rightarrow \angle BOA = 180° - 60°$ (по св-ву смеж. углов) $= 120° = \angle COД$ (по св-ву верт. $\angle$)

СОДТ – пар-м $\Rightarrow OД \parallel CT$ (по опр) $\Rightarrow \angle OCT + \angle COД = 180°$ (внутр. одностор. при $OД \parallel CT$, сек. OC $\angle$ по св-ву)
$\Rightarrow \angle OCT = 180° - 120° = 60° \Rightarrow \angle BCT = 120°$
$\angle OCT = \angle OДT$ (по св-ву пар-ма) $= 60° \Rightarrow \angle AДT = 120°$

$\angle BOA = \angle BCT = \angle AДT = 120°$
$CT = AД = OA$
$BC = TД = OB$
$\Big/ \Rightarrow \triangle BCT = \triangle TДA = \triangle BOA$ (по 2 ст. и $\angle$) $\Rightarrow BT = AT = AB$ (по опр. равн. $\triangle$)

$\Rightarrow \triangle ABT$ – р/с (по опр)

б) $BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2BC \cdot CT \cdot \cos 120°$ (по т. кос.) 2тд
$BT^2 = 9 + 49 + 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 79$
$S_{ABT} = \frac{1}{2} BT \cdot AT \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} BT^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$
$S_{ABCД} = S_{ABO} + S_{COД} + S_{AOД} + S_{BOC} = \frac{1}{2}(BO \cdot OA \cdot \sin 120° + CO \cdot OД \cdot \sin 120° + OA \cdot OД \cdot \sin 60° + BO \cdot OC \cdot \sin 60°) = \frac{1}{2} \sin 60° (21 + 21 + 49 + 9) = 50 \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCД}} = \frac{79\sqrt{3}}{4 \cdot 25\sqrt{3}} = 0{,}79$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCД}} = 0{,}79$

$$\begin{cases}\frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2\\ x^4+y^4+3x^2y^2=5\end{cases}$$

$x^2+y^2=a$

~~$x^2y^2=b$~~ $b=x^2y^2$.

$x^4+2x^2y^2+y^4$ ~~$=2x^2y^2=$~~

1) $a=-1 \to$ пост. кор.

2) $a=\frac{1-\sqrt5}{2}<0 \Rightarrow$ пост. кор.

3) $a=\frac{1+\sqrt5}{2}$

~~$a+2b=\frac{1+\sqrt5+7-\sqrt5}{2}=4.$~~

~~$x^2+x^2y^2+x^2y^2+y^2=4.$~~

~~$x^2(y^2+4)+0$~~

$$\begin{cases}\frac{2}{a}+b=2\\ a^2+b=5\\ b=5-a^2\end{cases}$$

$b=2-\frac{2}{a}$

$2-\frac{2}{a}=5-a^2$

$a^2-\frac{2}{a}-3=0$

$\frac{a^3-3a-2}{a}=0$

$\frac{(a+1)(a^2-a-1)}{a}=0$

$-a^3+0a^2-3a-2 \,|\, a+1$

$a^3+a^2 \quad\quad a^2+a-2$

$-a^2-3a$

$-a^2+a$

$-2a-2$

$-2a-2$

$D=1+4=\sqrt5^2$

$a_1=\frac{1+\sqrt5}{2}$ $a_2=\frac{1-\sqrt5}{2}$

$a=\frac{1\pm\sqrt5}{2}$; $-1$

$a^2=\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2=\frac{6+2\sqrt5}{4}=\frac{3+\sqrt5}{2}$

$b=5-a^2=5-\frac{3+\sqrt5}{2}=\frac{10-3-\sqrt5}{2}=\frac{7-\sqrt5}{2}$

$x^2=a-y^2$

$b=ay^2-y^4$

$y^4-ay^2+b=0$

$x^2+y^2=a.$ $b=x^2y^2$

$a^2=x^4+2x^2y^2+y^4$

$t=y^2 \Rightarrow t^2-at+b=0$

$D=a^2-4b=\frac{3+\sqrt5}{2}-14+2\sqrt5=\frac{-25+5\sqrt5}{2}<0.$

$$\begin{cases}a^2+b=5.\\ \frac{2}{a}+b=2\end{cases}$$

$2+ab=2a.$

$2=a(2-b) \Rightarrow a=\frac{2}{2-b}$ $a^2=\frac{4}{4-4b+b^2}$

$a^2+b=\frac{4+4b-4b^2+b^3-20+20b-5b^2}{4-4b+b^2}=0.$

$b^3-9b^2+24b-16=0.$

$-b^3-9b^2+24b-16 \,|\, b-1$

$b^3-b^2 \quad\quad b^2-8b+1$

$-8b^2+24b$

$-8b^2+8b$

$16b-16$

$D=64-4=2\sqrt{15}^2$

$b_1=\frac{8+2\sqrt5}{2}=4+\sqrt5$

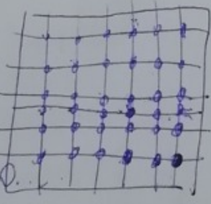
$b_2=4-\sqrt5.$

1) $b=1 \Rightarrow a=2.$

$(x+y)^2-2\sqrt{x^2y^2}=a.$

$(x+y)^2-2=2.$

$(x+y-2)(x+y+2)=0.$



$y=2-x$ $\quad$ $y=-2-x$

$2x-x^2=1.$ $\quad$ $-2x-x^2=1$

$x^2-2x+1=0$ $\quad$ $x^2+2x+1=0$

$x=1$, $y=1$ $\quad$ $x=-1$, $y=-1$

$t=4$

$a^2-\frac{2}{a}=3.$

$\frac{a^3-3a-2}{a}=0.$

$a=-1$

$a^3+0a^2-3a-2 \,|\, a+1$

$-a^3+a^2 \quad\quad a^2-a-2.$

$-a^2-3a$

$-a^2-a$

$-2a-2$

$-2a-2$

$0.$

$(a-2)(a+1)$

$(a+1)^2(a-2)$

1) $a=2.$

$b=5-a^2=1$

$$\begin{cases}x^2+y^2=2\\ x^2y^2=1\end{cases}$$

$y^2=2-x^2$

$2x^2-x^4=1 \Rightarrow x^4-2x^2+1=0.$

$(x^2-1)^2=0$

$(x-1)(x+1)$

$58 \times 58$

$464$

$290$

$3364$

$3251 \times 116$

$19506$

$3251$

$3251$

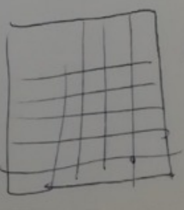
$377116$

$C_{58^2}+C_{58^2-113}$

1) $C^1_{2n-2}+C^1_{(n-2)^2}$

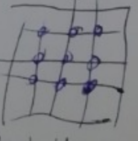
$=2n-2+n^2-4n+4$

$=n^2-2n+2$

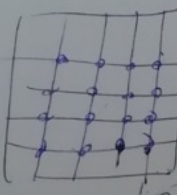


$(n-1)^2$

~~узлов всего~~



$n-1+n-2=(2n-3)$, n-нечет.



n-нечет.

2n-2 узлов на диагонали.

$C^1_{2n-2}=2n-2$

~~$2(n-2)2(n-1-1)=2n-4$~~

$2\cdot(n-1)-1=2n-3.$

нельзя выбрать

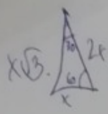
~~2n-1~~

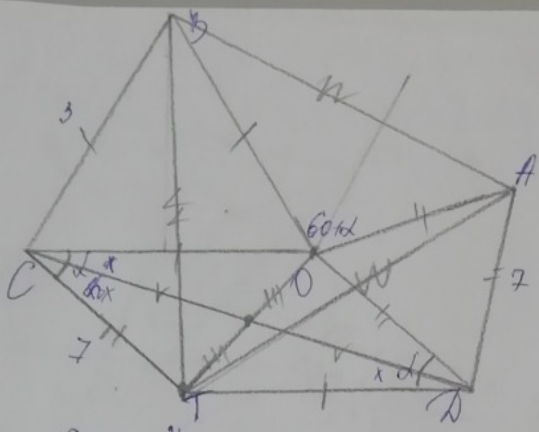
$(n-2)^2=n^2-4n+4$

$n^2-2n+1-2n+3=$

5 5
6 5
6 7

(34)





а) CODT - пар-м (по призн.)

$\Rightarrow \angle OCT = \angle ODT = \alpha$

$OD = CT,\ CO = TD$

$\angle BCT = 60° + \alpha$

$\angle ADT = 60° + \alpha$

$AD = CT,\ BC = DT$ $\Rightarrow \triangle BCT = \triangle TDA$ (по 2 ст. и ∠)

$\Rightarrow TB = TA$ (по опр.)

$\angle COD = 180 - \alpha$

$\angle BOA = 360 - 180 + \alpha - 60 - 60 = 60 + \alpha$

$\Rightarrow \triangle BOA = \triangle BCT$ (по 2 ст. и ∠) $\Rightarrow$

$AB = BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ - р/с

б) $BC = 3,\ AD = 7.$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

$S_{AOB} = \frac{21}{2} \cdot \sin(60° + \alpha)$

$S_{BOC} = \frac{9}{2} \sin 60° = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

$S_{AOD} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$S_{COD} = \frac{21}{2} \sin\alpha$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{29\sqrt{3}}{2} + \frac{21}{2}(\sin 60° \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos 60° + \sin\alpha)$

$S_{ABCD} = \frac{29\sqrt{3}}{2} + \frac{21\sqrt{3}}{2}(\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}(29 + \frac{21}{2}$

$S_{ABCD} = \frac{29\sqrt{3}}{2} + \frac{21}{2}(\sin(60° + \alpha) + \sin\alpha)$

$\cancel{S_{ABT}} = BT^2 = 9 + 49 - 42\cos(60° + \alpha)$

$S_{ABT} = \frac{1}{2}BT^2 \cdot \cos 60° = \frac{1}{4}BT^2 = \frac{29}{2} - \frac{21}{2}\cos(60° + \alpha) = \frac{29}{2} - \frac{21}{2}(\cos 60° \cdot \cos\alpha - \sin 60° \cdot \sin\alpha)$

$= \frac{29}{2} - \frac{21}{2}(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha) = \frac{29}{2} - \frac{21}{4}(\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha)$

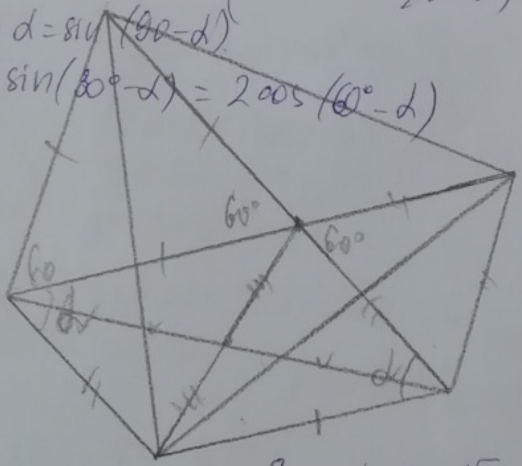
$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{29 - \frac{21}{2}(\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha)}{29\sqrt{3} - \frac{21\sqrt{3}}{2}(\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha)} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha = 2(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha) = 2(\sin 30° \cdot \cos\alpha - \cos 30° \cdot \sin\alpha) = 2\sin(30° - \alpha)$

$\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = 2(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha) = 2(\cos 60° \cdot \cos\alpha + \sin 60° \sin\alpha) = 2\cos(60° - \alpha)$

$\cos\alpha = \sin(90 - \alpha)$

$2\sin(30° - \alpha) = 2\cos(60° - \alpha)$



$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin 60° \ 25\sqrt{3}$

$BT = \sqrt{9 + 49 + 21} = \sqrt{79}$

$S_{BTA} = \frac{79}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{79\sqrt{3}}{4}.$

$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

$29 + \frac{21}{2} = \frac{79}{2}$

$S_{BOA} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{4}.$

$S_{COD} = \frac{21\sqrt{3}}{4}$

$S_{BOC} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

$S_{AOD} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{50\sqrt{3}}{2} = \boxed{25\sqrt{3}}$

$\frac{79\sqrt{3}}{100\sqrt{3}} = \boxed{0,79}$