Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

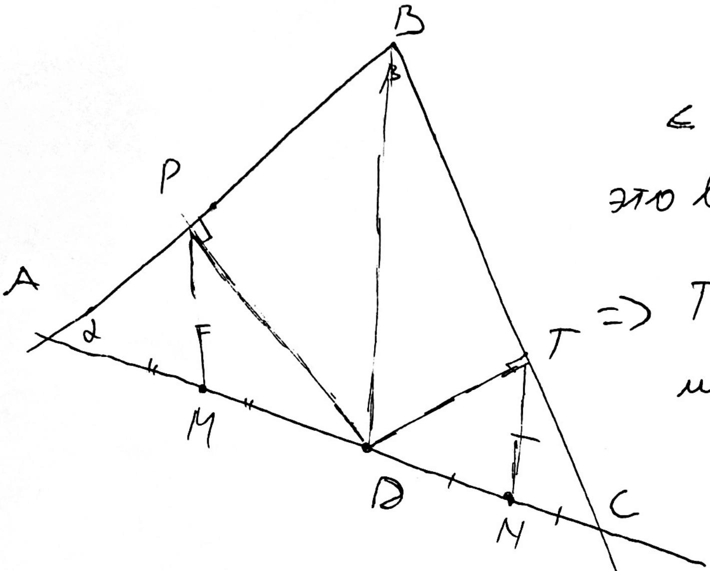
Шифр: **211005820**

ID профиля: **311824**

Вариант 9

Чистовик

Задача №1



$\angle BTD = \angle BPD = 90^\circ$, т.к это впис. углы, опир. на диаметр. $BD \Rightarrow$

$\Rightarrow TN = DN = CN$ и $AM = PM = MD$ как медианы в прямоугол. тр.

а) Пусть $\angle ABC = \beta$, $\angle A = \alpha$ $\Rightarrow$ $\angle C = 180^\circ - \alpha - \beta$

$\angle PDA = 90^\circ - \alpha$; $\angle DNT = \angle NCT + \angle NTC = 360^\circ - 2\alpha - 2\beta$ (из равнобедр. $\triangle NTC$)

$\angle AMP = 180^\circ - \alpha - \alpha = 180^\circ - 2\alpha$ из $\triangle APM$

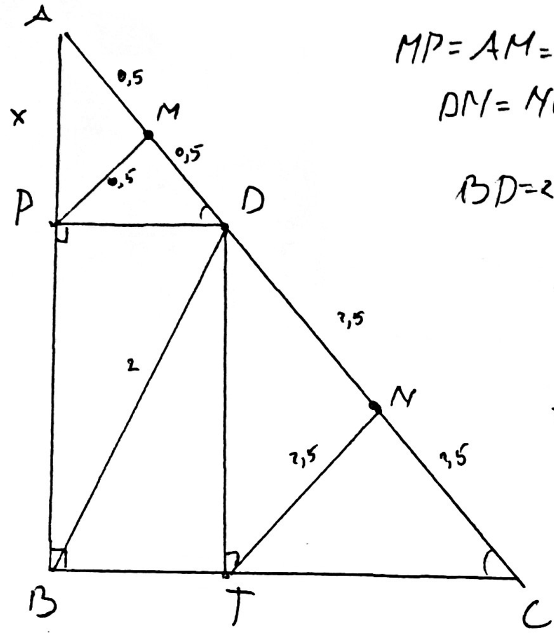
т.к $PM \parallel TN$ то $\angle AMP = \angle DNT \Rightarrow$

$\Rightarrow 180^\circ - 2\alpha = 360^\circ - 2\alpha - 2\beta \Rightarrow 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$

б) Перерисуем чертеж, учитывая, что $\angle ABC = 90^\circ$

Чистовик. Математика 10 кл.



$MP = AM = MD = 0{,}5$

$DN = NC = TN = 2{,}5$ $\Rightarrow AD = 1$ и $DC = 5$

$BD = 2$

Т.к $PD \perp AB$ и $BC \perp AB \Rightarrow PD \parallel TC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PDA = \angle TCD \Rightarrow \triangle PAD \overset{5}{\sim} \triangle TDC$

$LAP = x$. $PBDT$ - прямоугольник из доказанного. (все углы 90°)

Тогда $PD = \sqrt{1-x^2}$ по т. Пифагора.

$DT = PB = \sqrt{4-1+x^2} = \sqrt{x^2+3}$ по т. Пифагора

Но $DT = 5AP$ из подобия $\Rightarrow 5x = \sqrt{x^2+3}$

$5x = \sqrt{x^2+3}$

$25x^2 = x^2+3$

$x^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow DT = \frac{5\sqrt{2}}{4} = PB \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = AP + PB = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

$TC = \sqrt{25 - \frac{25 \cdot 2}{16}} = 5\sqrt{\frac{7}{8}}$ по т. Пифагора в $\triangle DTC$

$BT = PD = \sqrt{1-\frac{1}{8}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{14}}{4}$ $\quad \| \quad \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{14}}{4}$

$BC = BT + TC = \frac{6\sqrt{14}}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{14}$

$S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4} \cdot \sqrt{28} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8} \cdot \sqrt{28} = \frac{9}{4} \cdot \sqrt{7} = 2{,}25\sqrt{7}$

Ответ: $\frac{9}{4}\sqrt{7}$

Чистовик. Математика 10 кл.

Задача № 2

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$; ОДЗ: $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 24+2x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 6 \\ (x+4)(6-x) \geq 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $x \in [-4; 6]$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{(x+4)(6-x)} - 4$

Возведение в квадрат.

$10 - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} = 4(x+4)(6-x) - 16\sqrt{(x+4)(6-x)} + 16$

$(x+4)(6-x) = t$ Замена переменной.

$10 - 2\sqrt{t} = 4t - 16\sqrt{t} + 16$

$14\sqrt{t} = 4t + 6$

$7\sqrt{t} = 2t + 3$

$49t = 4t^2 + 12t + 9$

$4t^2 - 37t + 9 = 0$

$D = 37^2 - 4 \cdot 36 = 1369 - 144 = 1225 = 35^2$

$t = \frac{37 \pm 35}{8}$ $t_1 = \frac{1}{4}$; $t_2 = 9$

1) $(x+4)(6-x) = 9$

$24 + 2x - x^2 = 9$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$(x-5)(x+3) = 0$

$x = 5$ или $x = -3$

2) $(x+4)(6-x) = \frac{1}{4}$

$24 + 2x - x^2 = \frac{1}{4}$

$4x^2 - 8x - 95 = 0$

$D = 64 + 4 \cdot 4 \cdot 95 =$

$= 64 + 1520 = 1584 =$

$= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11 = 12^2 \cdot 11$

$x = \frac{8 \pm 12\sqrt{11}}{8} = 1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{11}$

$\sqrt{11} > 3$

Т.к $\sqrt{11} < 4$

$1 < 1 + \frac{3}{2}\sqrt{11} < 4$

$1 > 1 - \frac{3}{2}\sqrt{11} > -2$

Т.к мы делали возведение в квадрат, нужно проверить, что $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x}$ и $2\sqrt{(x+4)(6-x)} - 4$ одного знака

1) $x = 5$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{(x+4)(6-x)} - 4 = 2$

2) $x = -3$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -2$; $2\sqrt{(x+4)(6-x)} - 4 = 2$

-3 не яв. корнем ~~не подходит~~ изначал. уравнения

3) $x = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{11}$

$2\sqrt{(x+4)(6-x)} - 4 = 2\sqrt{t} - 4 = -3 < 0$

Сравним $\sqrt{x+4}$ и $\sqrt{6-x}$ $\left(\begin{matrix} x+4 > 0 \\ 6-x > 0 \end{matrix}\right)$ т.к

$\sqrt{x+4} > \sqrt{6-x}$

$\Updownarrow$

$x+4 > 6-x$

$\Updownarrow$

$x > 1$ (а $1 < \frac{3}{2}\sqrt{11} \cdot$) 3

То есть $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} > 0$

Но значит это не корень

4) $x = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{11}$

$2\sqrt{(x+4)(6-x)} = -3 < 0$

но $x < 1$

$\Downarrow$

$x + 4 < 6 - x$

$\Downarrow$

$\sqrt{x+4} < \sqrt{6-x}$

$\Downarrow$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} < 0$

корень. подходит

Ответ: $x = 5$

и

$x = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{11} = \frac{2 - 3\sqrt{11}}{2}$

Задача №3

Найдем координаты точки B:

Парабола $ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$ $(a\neq 0)$

$$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$$

$$B_x=\frac{-2a}{2}=-a;\ B_y=a^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$$

$$B=\left(-a;\frac{1}{a}\right)$$

$$26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$$

$$26a^2-2a(11x+10y)+x^2+(2x+2y)^2=0$$

$$\Downarrow$$

$$2a(11x-10y)>0$$

Черновик.

$13a^2-11ax-10ay<0$ $\quad -3a-\frac{1}{a}-4$ $\quad -3a^2-1-4a$

$3a^2+1+4a$

$x\geq -4$

$x\leq 6$

2) $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$

$24+2x-x^2\geq 0$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{\cancel{(-x+6)(x+4)}}$

$(x+4)(6-x)$

$x^2-2x-24\leq 0$

$(x-6)(x+4)\leq 0$

$a=1+\frac{3}{2}\sqrt{11}$

$-4 \quad 6$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=a$

$a-b+4=2ab$

$a^2=10-2\sqrt{t}$

$a-b-2ab-4=0$

$\sqrt{x+4}>\sqrt{6-x}$

$D=4+60=8$

$x+4>$

$x+4>6-x$

$2x>2$

$x>1$

$x+4+6-x$

$10-2\sqrt{(x+4)(6-x)}=4((x+4)(6-x)-4\sqrt{\dots}+4)$

$(5-\frac{3}{2}\sqrt{11})(5+\frac{3}{2}\sqrt{11})=$

$=25-\frac{9}{4}\cdot 11=\frac{1}{4}$ $\quad 5-\sqrt{\dots}=2((x+4)(6-x)-4\sqrt{\dots}+4)$

$3-1+4=2\cdot 3$

16

95

80

144

1520

$6\sqrt{(x+4)(6-x)}=3+2(x+4)(6-x)$

$t \qquad t \qquad (20-4)^2=400-160+16$

$64+16\cdot 95=$ $\quad 1584$ $\quad 6\sqrt{t}=3+2t$

$38^2 \quad 32^2=900+120+4$

$36t=9+12t+4t^2$ $\quad 0,5 \quad 5,5$

$900+480+64$

30

$4t^2-24t+9=0$ $\quad x_1+x_2=6$

$1-3+4=2$ $\quad (30+7)^2=900+$ $\quad t^2-6t+\frac{9}{4}=0$ $\quad x_1x_2=\frac{9}{4}=2,25$

420

30 $\quad$ 49 $\quad (t-0,5)(t-5,5)=0$ $\quad \frac{1}{2} \quad \frac{11}{2}$

1369

$1584-4\cdot 396=$

$D=24^2-4\cdot 36=576-264=312$

$4\cdot 36=144$

16099

1225 $\quad 25^2= \quad 35^2=900+300+25$

Черновик

$(-a; \frac{1}{a})$

$-3a - \frac{1}{a} = 4$

$5x^2 - 22ax$

$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

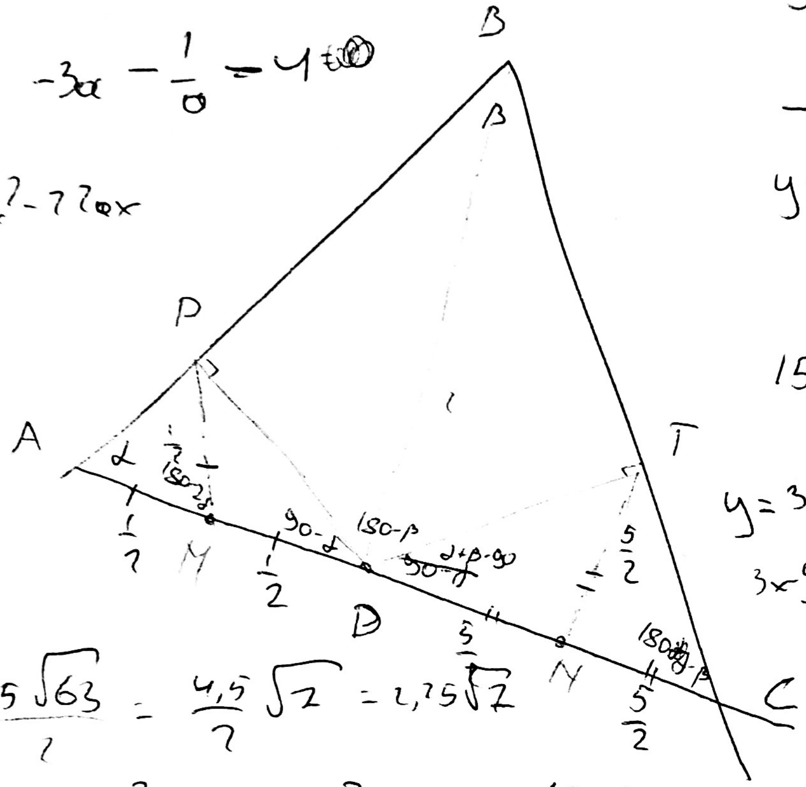
$y = x^2 + 2ax + a^2 + \frac{1}{a}$

$-\frac{2a}{2} = -a$

$y = a^2 - \cancel{2a^2} + a^2 \frac{1}{a}$

$315 = 5 \cdot 63 = 5 \cdot 3 \cdot 21$

$15 = x\sqrt{x^2-3} + \sqrt{(4-x^2)(5-x^2)}$



$y = 3x - 4$

$3x - y - 4 > 0$

$y < 3x - 4$

$6\frac{\sqrt{2}}{4} = 1{,}5\sqrt{2}$

$6\sqrt{36 - 4{,}5} = \sqrt{31{,}5} =$

$\frac{\sqrt{31{,}5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{2\sqrt{2}} =$

$\frac{1{,}5\sqrt{63}}{2} = \frac{4{,}5}{2}\sqrt{2} = 2{,}25\sqrt{7}$

$(2x+2y)^2 + x^2 + 26a^2 - a(22x+20y)$

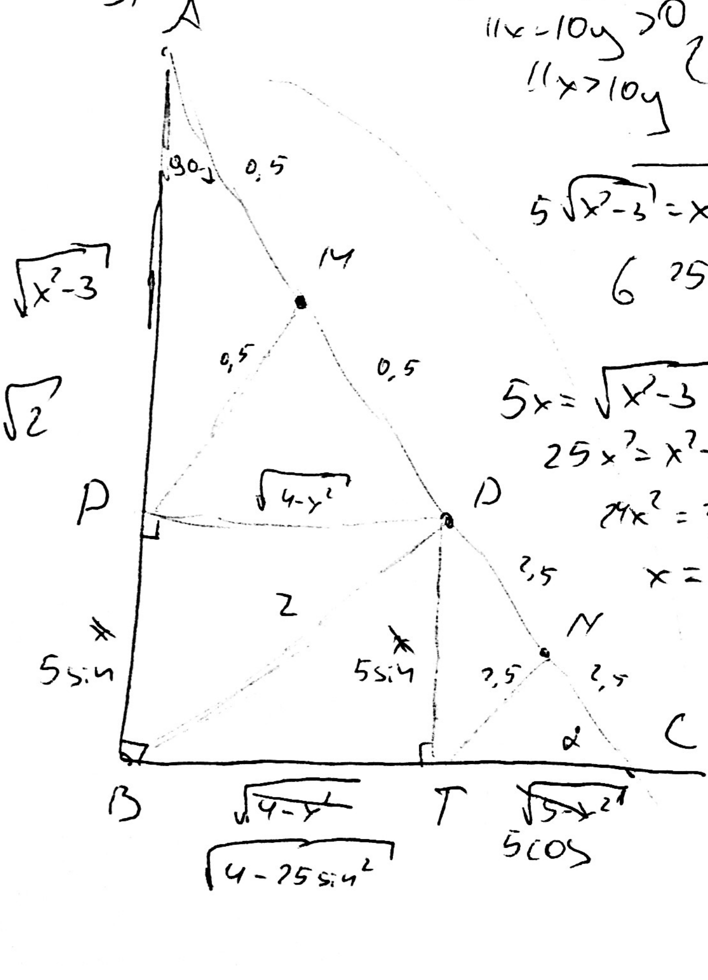
$11x - 10y > 0$

$11x > 10y$

$180 - 2\alpha = 360 - 2\alpha - 2\beta$

$2\beta = 180$

$\beta = 90$



$5\sqrt{x^2-3} = x$

$25x^2 - 75 = x^2$

$24x^2 = 75$

$x^2 = \frac{75}{24} = \frac{25}{8}$

$\sin^2\alpha = \frac{1}{8}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$5x = \sqrt{x^2-3}$

$25x^2 = x^2 - 3$

$24x^2 = 3$

$x = \sqrt{\frac{1}{8}}$

$36 = (x + \sqrt{x^2-3})^2 + (\sqrt{4-x^2} + \sqrt{5-x^2})^2 =$

$= 2x^2 - 3 + 2x\sqrt{x^2-3} + 9 - 2x^2 + 2\sqrt{(4-x^2)}$

$x = \sqrt{\frac{5}{8}} = \sqrt{5}\sqrt{\frac{1}{8}}$

$=$

$\sqrt{4 - 25\sin^2} = \cos\alpha$

$4 - 25\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$

$3 = 24\sin^2\alpha$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005820**

ID профиля: **311824**

Вариант 9

Чистовик. Математика 10 кл.

Задача №4

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$$

$x^2 = a$
$y^2 = b$

$a+b \neq 0$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a+b} + ab = 2 \\ a^2+b^2+3ab=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{a+b} + ab = 2 & (1) \\ (a+b)^2 = 5-ab & (2) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$ab = 5-(a+b)^2$

Пусть $a+b = t \neq 0$

тогда первое уравн. можно записать как:

$\frac{2}{t} + 5 - t^2 = 2$

$t^2 - 3 = \frac{2}{t}$

$t^3 - 3t - 2 = 0$

$\cancel{(t-2)(t+1)^2=0}$

$(t-2)(t^2+2t+1)=0$

$(t-2)(t+1)^2=0$

$t=2$ или $t=-1$

Подставим эти значения в (1) $\frac{2}{a+b} + ab = 2$

1) $t=2$

$a+b=2$

$\frac{2}{2} + ab = 2$

$ab=1$

$a(2-a)=1$

$(a-1)^2=0$

$a=1$

$\Downarrow$

$b=1$

$\begin{cases} a+b=2 \\ ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$

$\Downarrow$

если $a=1$ и $b=1$, то для x, y возможны пары

$(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;-1)$, $(-1;1)$

2) $t=-1$

$a+b=-1 \Rightarrow b=-(a+1)$

$\frac{2}{-1} + ab = 2$

$ab=4$

$-(a+1)a=4$

$a^2+a+4=0$

$D=1-16<0$

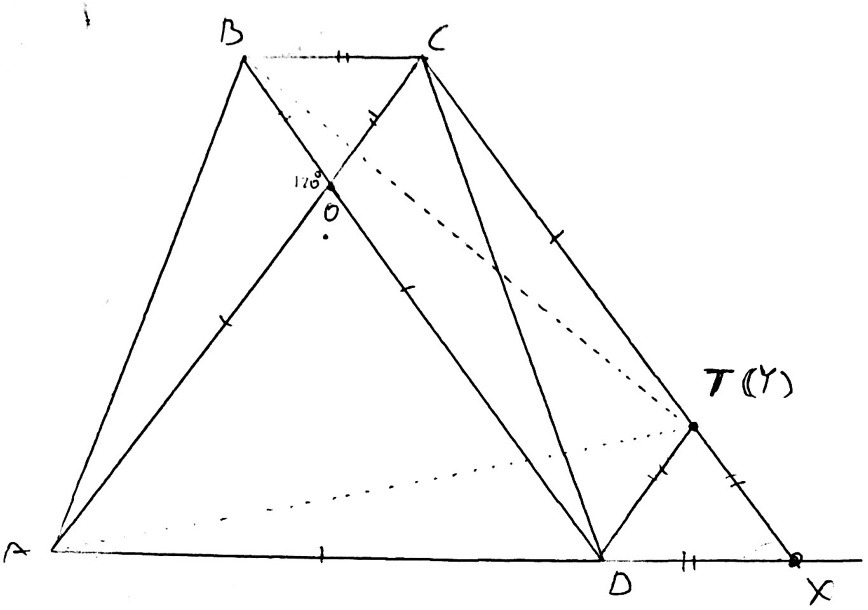
нет корней в $\mathbb{R}$

Ответ: $(1;1)$ $(1;-1)$ $(-1;-1)$ $(-1;1)$

1

Чистовик   Математика 10кл

Задача № 6



a) $\angle ADO = \angle OBC = 60^0 \Rightarrow AD \parallel BC \Rightarrow ABCD$ - трапеция

$\triangle BOA = \triangle COD$ по 2-м сторонам и углу между ними $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = CD \Rightarrow ABCD$ - равнобокая трапеция.

проведем через точку C прямую, параллельную BD.
пусть она пересекает AD в точке X.

проведем через D прямую, параллельную AC.
пусть она пересекает CX в точке Y.

$OCTD$ - параллелограмм по опр., а значит точки O и Y симметричны отн. сер. CD по свойству параллелограмма. $\Rightarrow$

$\Rightarrow Y = T$

$BDXC$ - тоже пар-м по опр. $\Rightarrow BC = DX = BO = OC$

$DT = OC$ из пар-ма $OCTD$

$BD = CX$ из $BDXC$ $\Rightarrow BO = TX$

$OD = CT$ из $OCTD$

Значит $BO = OC = BC = DT = DX = XT$ и $AO = OD = AD = CT$.

Заметим, что ACX правильный (все стороны равны) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACX = 60^0 = \angle ODT$ ($\angle ACX = \angle ODT$ из $OCDT$)

$\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 120^\circ$

$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 120^\circ$

$\angle BOA = 180^\circ - \angle AOD = 120^\circ$

Значит $\triangle AOB = \triangle TCB = \triangle ADT$ по I ПРТ. $\Rightarrow$

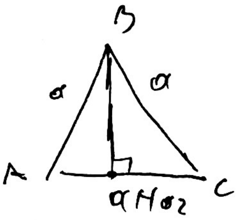
$\Rightarrow AT = BT = AB \Rightarrow ABT$ — правильный, ч.т.д.

б) $BC = 3,\ AD = 7,\ \dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ — ?

$$BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2\cdot BC\cdot CT\cdot\cos\angle BCT =$$
$$= 9 + 49 - 2\cdot 3\cdot 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 9 + 49 + 21 = 79$$

$BT = \sqrt{79}$ и высота.

Площадь правильного $\triangle$ со стороной a:



$$BH = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{ABC} = BH\cdot AC\cdot\frac{1}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{ABT} = \frac{79\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{79}{4}\sqrt{3}$$

Пусть CH — высота трапеции $ABCD$

$$CH = \frac{AX\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$ из $\triangle ACX$ (тоже правильный)

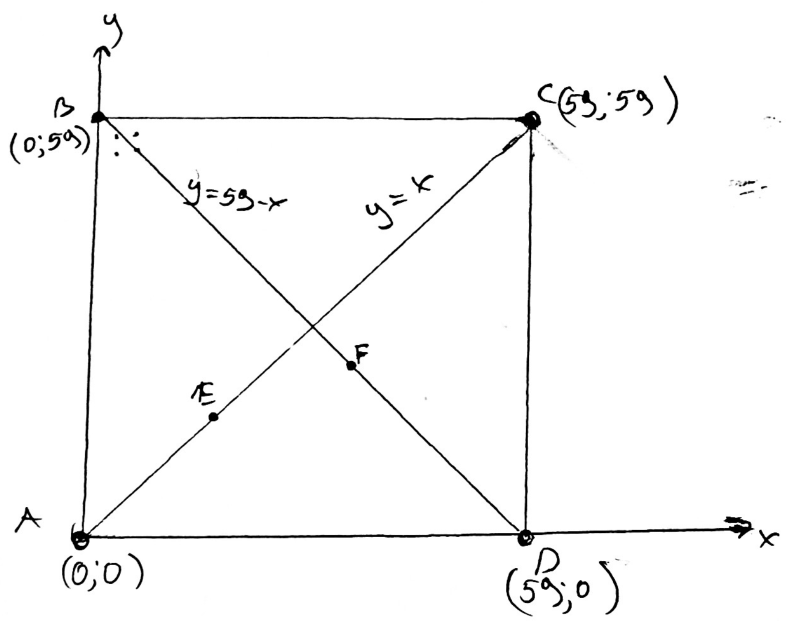
$$S_{ABCD} = CH\cdot\frac{BC+AD}{2} = 25\sqrt{3}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{79}{4}\sqrt{3}}{25\sqrt{3}} = \frac{79}{100} = 0{,}79$$

Ответ: $0{,}79 = \dfrac{79}{100}$

Чистовик. Математика 10 кл.

Задача № 5



Мы можем выбирать узлы из квадрата с вершинами (1;1), (58;1), (58;58), (1;58) включая границу, то есть всего есть 58^2 доступных узлов.

$y=59-x$ и $y=x$ пересекаются не в узле:

$$\begin{cases} y=59-x \\ y=x \end{cases} \Rightarrow 2x=59 \Rightarrow x=\frac{59}{2} \quad \frac{59}{2}\notin\mathbb{Z}$$

(из доступных)

То есть на наших прямых есть $58\cdot2=116$ узлов.

Первым шагом выбираем любой из них, а вторым выбираем любой узел, не лежащий с первым на одной горизонтальной или вертикальной прямой (таких у нас $58^2-58-58+1$)

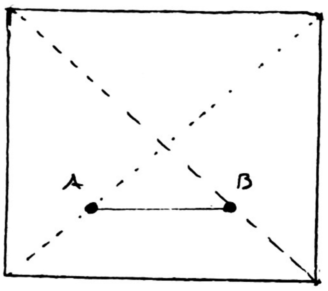
+1 т.к. один узел вычли 2 раза.

Однако теперь мы 2 раза посчитали комбинации, где оба узла лежат на данных прямых (например как на рисунке). То есть их нужно вычесть.

(4)

Чистовик Математика 10кл.

Вычтем $C_{116}^{2} = \frac{116\cdot 115}{2}$, то есть все комбинации из двух узлов на данных прямых. Осталось обратно прибавить некорректные комбинации, которые мы вычли, хотя делать этого не стоило. (комбинации как на рисунке ниже)



Наши прямые разделяют квадрат на 4 треугольника и в каждом из них, очевидно, ровно $\frac{58}{2}$ искомых комбинаций. То есть еще нужно прибавить $\frac{58}{2}\cdot 4 = 58\cdot 2$

Итого считаем все: A – искомое кол-во способов

$$A = 58\cdot 2\cdot(58^2-58\cdot 2+1) - \frac{2\cdot 58\cdot(2\cdot 58-1)}{2} + 58\cdot 2$$

Если $58 = n$, то

$$A = 2n(n^2-2n+1) - n(2n-1) + 2n = n(2n^2-4n+2-2n+1+2) =$$

$$= n(2n^2-6n+5)$$

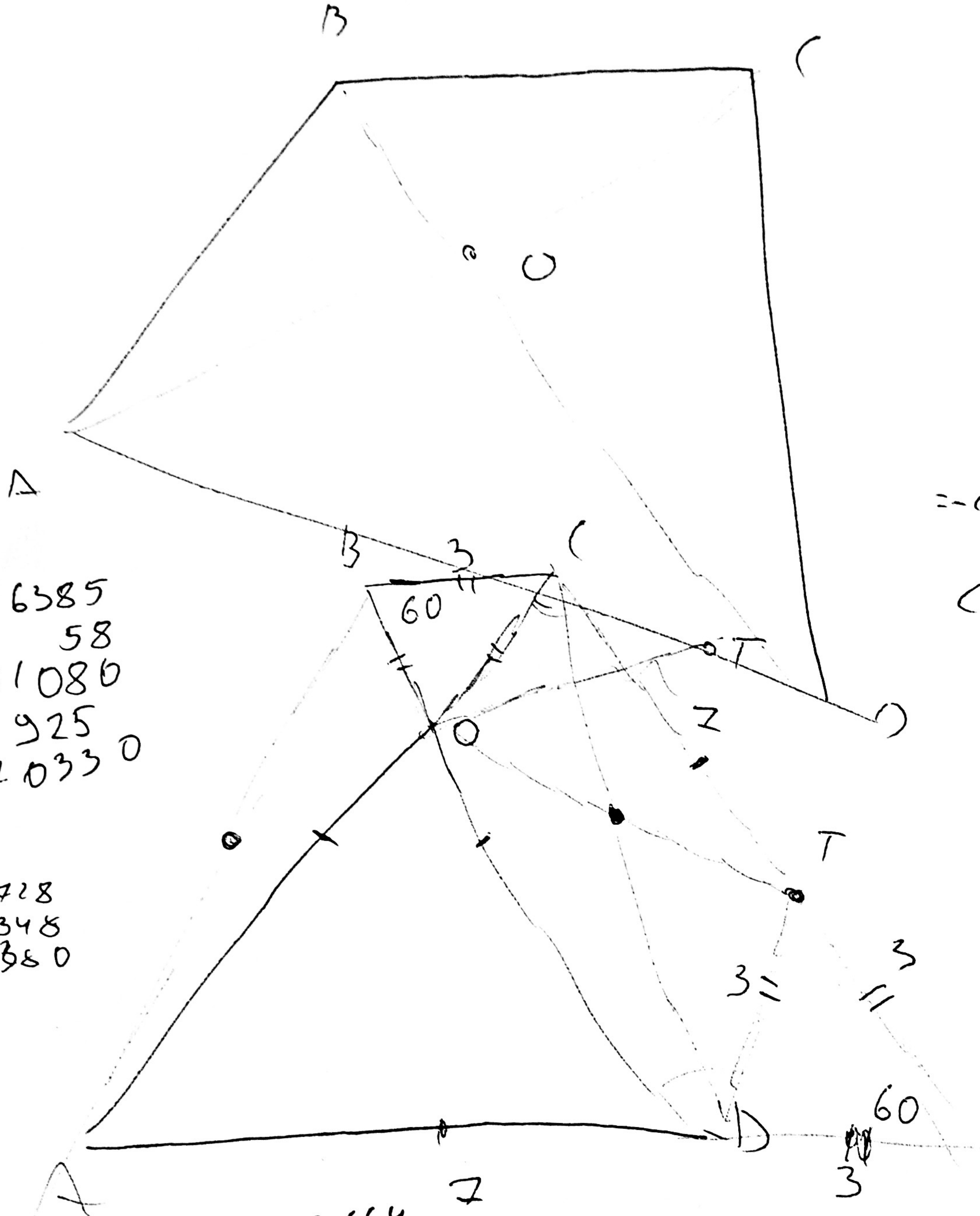
$$A = 58(2\cdot 58^2-6\cdot 58+5) = 58(6728-348+5) = 58\cdot 6385 =$$

$$= \underline{370330}$$

Ответ: 370330

Черновик.

6)



$= -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

$\cos 120° =$

6385
58
51080
31925
370330

6728
348
6380

$(50+8)^2 = 2500 + 800 + 64$

336 $\frac{3364}{2}$ $S_{ABCD} =$

6728

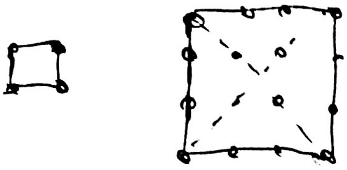
$58 \cdot 21 = 1779$

58

10,5

$9 + 49 + 2\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 =$

68,5



$8 \cdot (16-7) = 72$

$72 - 28 + 8$

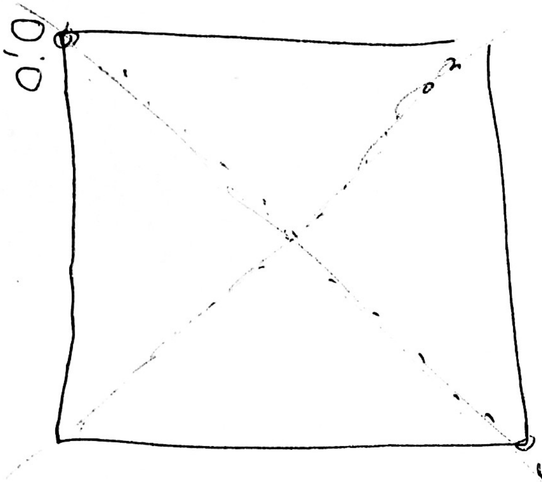
$4(32 - 14 + 5)$ $4 \cdot 13 = 52$

Черновик

$$\frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2$$
$$x^4+y^4+3x^2y^2=5$$

$$\frac{2}{x+y} + xy = 2$$
$$x^2+y^2+3xy=5$$
$$(x+y)^2+xy=5$$

$$2 + x^2y + y^2x = 2(x+y)$$
$$x^2+y^2+3xy=5$$



$$\frac{2}{x+y} + 5-(x+y)^2 = 2 \qquad x+y=t$$
$$\frac{2}{t}+5-t^2=2$$
$$t^2-3=\frac{2}{t}$$
$$t^3-3t-2=0$$
$$(t-2)(t^2+2t+1)$$
$$(t-2)(t+1)^2=0$$
$t=2$ или $t=-1$

$x+y=2$

$1+xy=2$

$xy=1$

$x+y=2$

$xy=1$

$(1;1)$

$(1;-1)$

$(-1;1)$

$(-1;-1)$

$($

$x+y=-1 \qquad x=-y-1$

$xy=4$

$-(y+1)y=4$

$y^2+y+4=0$

$(2-b)b=1$

b^2-2b+1