Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

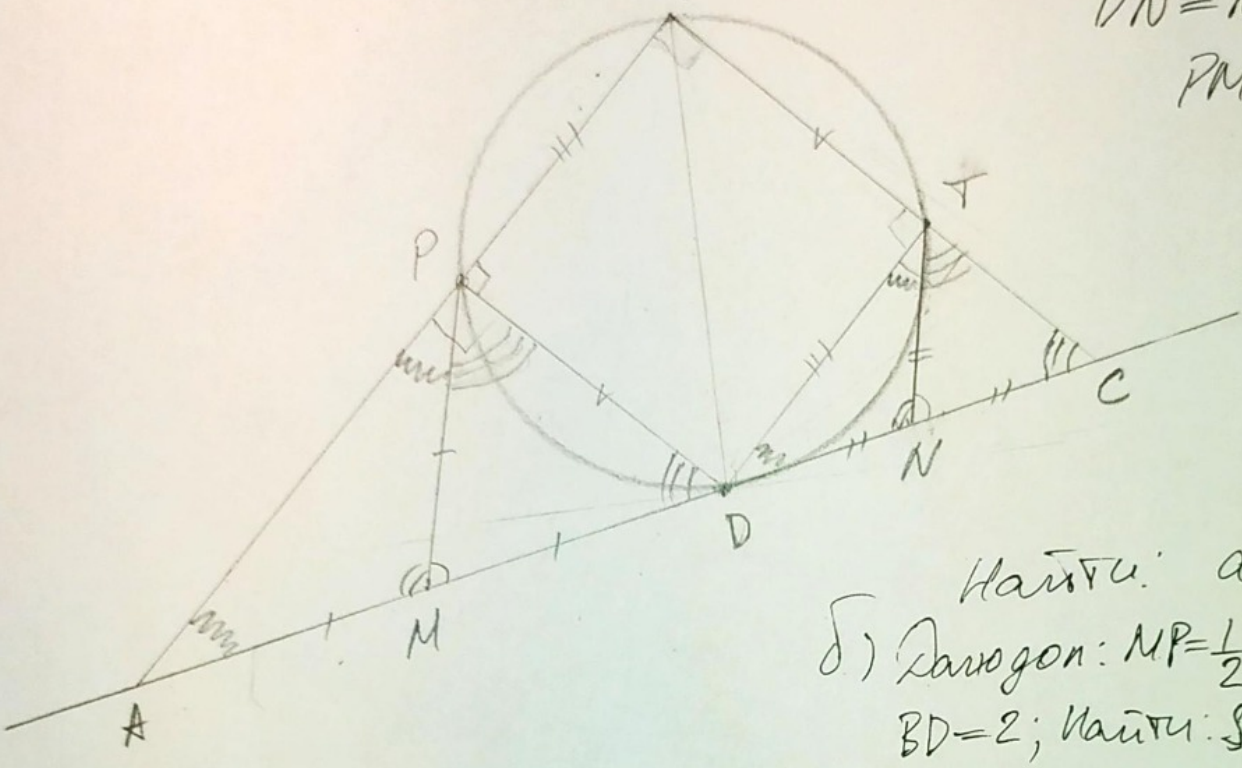
Шифр: **211005803**

ID профиля: **377047**

Вариант 9

№1 Чистовик Дано: 1

BD - диаметр
AM = MD
DN = NC
PM ∥ TN



Найти: а) $\angle ABC$

б) Допусл: $MP=\frac{1}{2}$; $NT=\frac{5}{2}$; $BD=2$; Найти: $S(ABC)$

Решение:

а) 1) т.к BD - диаметр, то △BPD и △BTD - прямоуг-е значит $\angle BPD=\angle BTD=90^\circ \Rightarrow \angle APD=\angle DTC=90^\circ$; а в тр-х APD и DTC отрезки PM и TN в каждом соответственно являются медианами $\Rightarrow$

$\Rightarrow AM=MP=MD$ и $DN=NT=NC \Rightarrow$

$\Rightarrow$ △APM, △MPD, △DNT, △NTC – равнобедренные

также мы знаем то, что $\angle PMD=\angle TNC$ и $\angle PMA=\angle TND$ из-за параллельности PM и TN.

Так как △APM, △MPD, △DNT, △NTC - равноб и имеют при вершине равные углы у тр. PMD, TNC и TND, PMA, то △AMP ~ △DNT и △MPD ~ △NTC, тогда $\angle PDM=\angle NTC$ и $\angle TDN=\angle DTN$, а $\angle DTN+\angle NTC=$

$=\angle DTC=90^\circ \Rightarrow \angle TDN+\angle PDM=90^\circ$, а $\angle TDN+\angle PDM+\angle PDT=180^\circ$

$\Rightarrow \angle PDT=90^\circ$, а PBTD - вписанный четырехуг-к $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PDT+\angle ABC=180 \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$

Чистовик

2

б) Св-во вписанного ~~четырех-а~~ прямоуг-а:

$$BD \cdot PT = PD^2 + DT^2$$

$$BD = PT = 2 \text{ (т.к. диаметры)}$$

$$4 = PD^2 + DT^2$$

Т-а cos:
$$DT^2 = \frac{25}{2} - \frac{25}{2} \cdot \cos(TND)$$
$$PD^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(PMD)$$

т.к. $\angle TND + \angle PMD = 180$, то $\cos PMD = -\cos TND$

подст-м: $$4 = \frac{25}{2} - \frac{25 \cdot \cos TND}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\cos TND}{2} =$$

$$= \frac{26 - 24 \cdot \cos TND}{2} \Rightarrow \cos TND = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos PMD = -\frac{3}{4} \Rightarrow PD = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{7}{8}}$$

$$DT = \sqrt{\frac{25}{2} - \frac{25 \cdot 3}{2 \cdot 4}} = \sqrt{\frac{100 - 75}{8}} = \sqrt{\frac{25}{8}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{PBTD} = \sqrt{\frac{25 \cdot 7}{8 \cdot 8}} = \frac{5\sqrt{7}}{8}$$

$$PA = \sqrt{1 - \frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{1}{8}} \Rightarrow S_{APD} = \sqrt{\frac{1 \cdot 7}{8 \cdot 8}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}}{16}$$

$$TC = \sqrt{\frac{100}{4} - \frac{25}{8}} = \sqrt{\frac{175}{8}} \Rightarrow S_{DTC} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{175}{8} \cdot \frac{25}{8}} = \frac{1 \cdot 25 \cdot \sqrt{7}}{2 \cdot 8} = \frac{25\sqrt{7}}{16}$$

Итого: $$S_{ABC} = S_{PBTD} + S_{APD} + S_{DTC} = \frac{10\sqrt{7} + \sqrt{7} + 25\sqrt{7}}{16} = \frac{36\sqrt{7}}{16} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$$

Ответ: $\angle ABC = 90°$; $S_{ABC} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$

№2 Чистовик

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{-(x^2-2x-24)}$$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{-(x-1)^2+25}$$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{(5-x+1)(5+x-1)}$$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{(6-x)(x+4)}$$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{-(x-6)}+4=2\sqrt{-(x-6)(x+4)}\ \Big|**2$$

$$x+4-2\sqrt{(x+4)}\sqrt{(6-x)}+6-x=4(6-x)(x+4)-16\sqrt{(x+4)(6-x)}+16$$

$$14\sqrt{(x+4)(6-x)}=4(x+4)(6-x)+6$$

$$t^2=(x+4)(6-x)$$

$14t=4t^2+6$; $2t^2-7t+3=0$

$D=49-24=25$; $t_1=\frac{7+5}{4}=3$; $t_2=\frac{7-5}{4}=\frac{1}{2}$

при $t=3$:

$(x+4)(6-x)=9$

$24+2x-x^2=9$; $x^2-2x-15=0$

$D=4+60=64$; $x_1=\frac{2+8}{2}=5$; $x_2=\frac{2-8}{2}=-3$

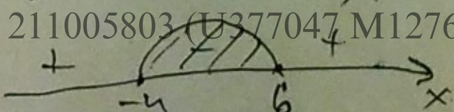
при $t=\frac{1}{2}$:

$24+2x-x^2=\frac{1}{4}\ |*4$; $96+8x-4x^2=1$;

$4x^2-8x-95=0$; $D=64+1520=1584$

$x_3=\frac{-8+\sqrt{1584}}{8}$; $x_4=\frac{-8-\sqrt{1584}}{8}$

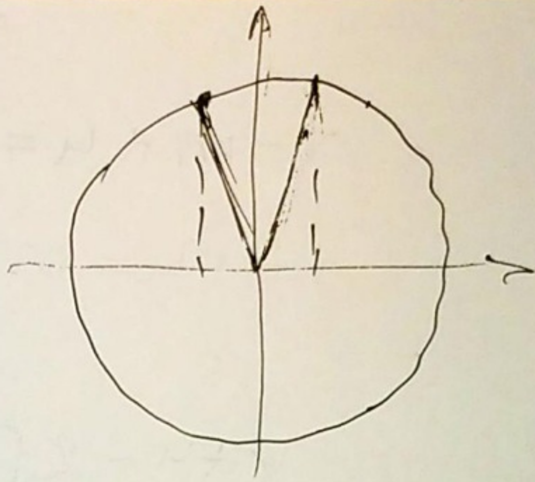
ОДЗ: $-(x-6)(x+4)\geq 0$; $(x-6)(x+4)\leq 0$



$\Rightarrow$ x_3 и x_4 – не подходят

Ответ: $x=\{-3;5\}$

Черновик



$5x^2$

$2 \cdot PT = PB^2 + BT^2$

$2 \cdot PT$

т.к. $BD = 2$, то $PT = BD = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 = PD^2 + DT^2$

Th. cos: $DT^2 = \frac{25}{2} - \frac{25}{2} \cdot \cos(TND)$

$PD^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(PMD)$

$4 = \frac{25}{2} - \frac{25}{2} \cdot \cos TND + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(PMD)$

$\cos PMD = -\cos TND$

$4 = \frac{25}{2} - \frac{25 \cdot \cos TND}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\cos TND}{2} =$

$= \frac{26 - 24\cos TND}{2}$

$8 = 26 - 24\cos TND \Rightarrow \cos TND = \frac{18}{24} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Черновик

$t - m + 4 = 2mt$

$t + 4 = m(2t + 1)$

$\cancel{x} + 4 - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} + 6 - \cancel{x} =$

$= 4(24 + 2x - x^2) - 16\sqrt{(x+4)(6-x)} + 16$

$14\sqrt{(x+4)(6-x)} = 4(x+4)(6-x) + 6$

$(x+4)(6-x) = t^2$

$14t = 4t^2 + 6$

$4t^2 - 14t + 6 = 0$

$2t^2 - 7t + 3 = 0$

$D = 49 - 24 = 25$

$t_1 = \frac{7 + 5}{4} = 3$

$t_2 = \frac{7 - 5}{4} = \frac{1}{2}$

$24 + 2x - x^2 =$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005803**

ID профиля: **377047**

Вариант 9

1

Чистовик №4

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$$

$x^2=m \quad , m\geq 0$

$y^2=t \quad , t\geq 0$

$$\begin{cases} \frac{2}{m+t}+mt=2 \\ m^2+t^2+3mt=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2}{m+t}+mt=2 \\ (m+t)^2+mt=5 \end{cases}$$

$m+t=f$

$mt=g$

$$\begin{cases} \frac{2}{f}+g=2 \\ f^2+g=5 \end{cases}$$

$f^2-\frac{2}{f}=3 \,|\cdot f \; ; \; f^3-3f-2=0$

нетрудно заметить, что $f_1=-1$ – подходит

$$\begin{array}{l|l} f^3-3f-2 & f+1 \\ \hline -\;f^3+f^2 & f^2-f-2 \\ \quad -f^2-3f & \\ \quad -\;-f^2-f & \\ \qquad -2f-2 & \\ \qquad -\;-2f-2 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$f^2-f-2=0$

$D=1+8=9$

$f=\frac{1\pm 3}{2}$; $f_2=2$

$f_3=-1$

но т.к. $m\geq 0, t\geq 0 \Rightarrow f\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ подходит только $f_2=2 \Rightarrow$

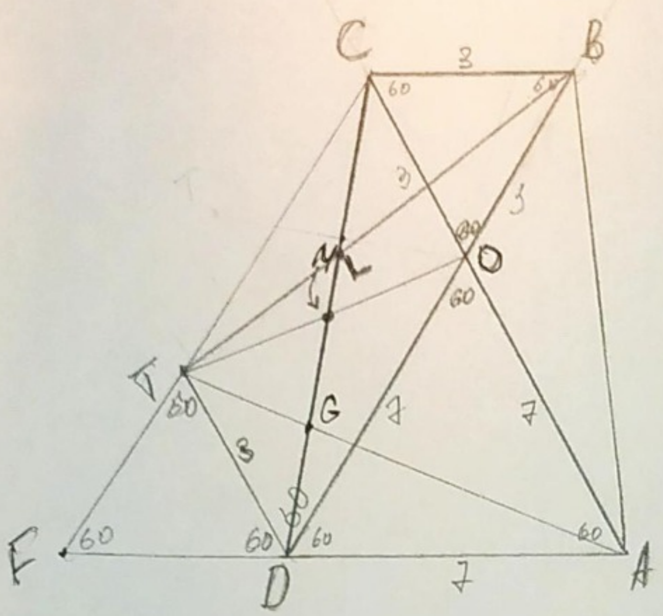
$\Rightarrow g=5-4=1 \Rightarrow m+t=2 \; ; mt=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow t=2-m \; ; 2m-m^2=1 \; ; m^2-2m+1=0 \Rightarrow m=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow t=1 \Rightarrow x^2=1 \; ; y^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \; ; y=\pm 1$

Итого имеем 4 пары $(x;y)$: $(1;1)$; $(1;-1)$; $(-1;1)$; $(-1;-1)$

Чистовик №6



Дано: $\triangle OBC$ – прав.

$\triangle OAD$ – прав.

$ABCD$ – вып. четырёх-к.

$OM = MT$; $CM = MD$

Найти:

а) д-ть $\triangle ABT$ – прав

б) $BC = 3$ $AD = 7$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?

Решение:

Т.к. $\triangle DOA$ и $\triangle OBC$ – прав, то $\angle BDA = \angle DBC = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ – трапеция

$DO = OA$; $OB = OC \Rightarrow DO + OB = AO + OC \Rightarrow$

$\Rightarrow DB = AC \Rightarrow ABCD$ – равнобокая тр-я $\Rightarrow DC = AB$

$\angle COD = 120^\circ \Rightarrow \angle OCD + \angle ODC = 180 - 120 = 60^\circ$

Т.к $DM = MC$ и $TM = MD \Rightarrow TCOD$ – параллелограмм $\Rightarrow$

$\Rightarrow TD \parallel CO$ и $TC \parallel DO \Rightarrow \angle TCO = \angle DOA = 60^\circ$

$TD = CO \Rightarrow \triangle OCB = \triangle DTF \Rightarrow \angle TDB = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow DTCB$ – равнобокая трапеция $\Rightarrow$

$\Rightarrow DC = TB = AB$ (1)

Т.к. $\angle CFA = \angle CAF = 60^\circ \Rightarrow \triangle CFA$ – правильный $\Rightarrow$

$\Rightarrow FA = CA \Rightarrow \triangle FTA = \triangle CBA$ (т.к. $FT = CB$;

$AB = FA$; $\angle TFA = \angle ACB$) $\Rightarrow TA = AB$ (2)

из (1) и (2) имеем $AT = TB = AB \Rightarrow \triangle ABT$ – правильный

чтд

б)

т.к. $\triangle DOA$ и $\triangle BOC$ – пр-е $\Rightarrow$

$$\Rightarrow CB = BO = CO = 3 \Rightarrow S_{COB} = \frac{\sqrt{3}\cdot 9}{4}$$

$$AD = OA = OD = 7 \Rightarrow S_{DOA} = \frac{\sqrt{3}\cdot 49}{4}$$

$$\angle BOA = 180 - \angle AOD = 120^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{9+49-42\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{58+21} = \sqrt{79}$$

$$S_{AOB} = S_{COD} = \frac{1}{2}\cdot \sin(120)\cdot OB\cdot OA =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\cdot 3\cdot 7}{2\cdot 2} = \frac{21\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{DCBA} = S_{AOB} + S_{COD} + S_{COB} + S_{DOA} =$$

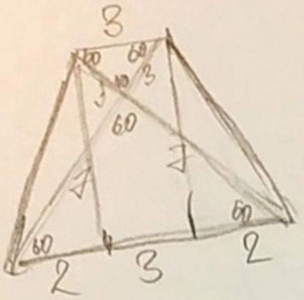
$$= \frac{42\sqrt{3} + 9\sqrt{3} + 49\sqrt{3}}{4} = \frac{100\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$$

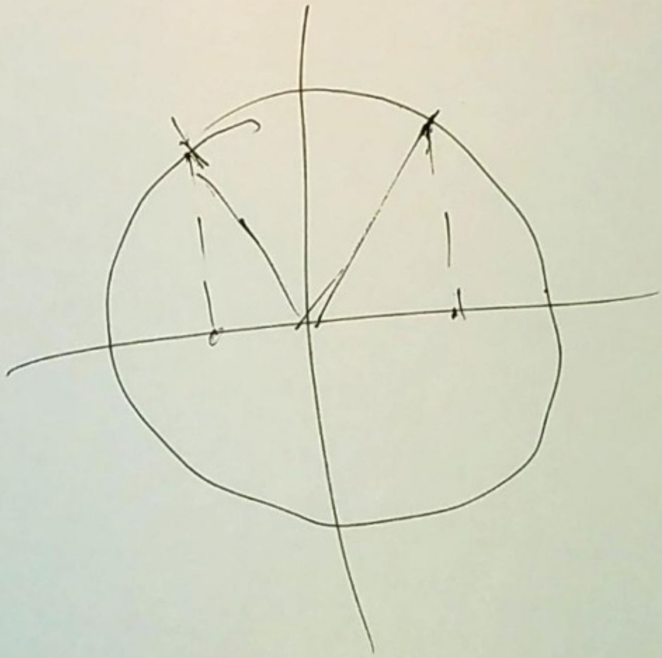
т.к. $AB = \sqrt{79}$ и $\triangle TAB$ – прав $\Rightarrow S_{TAB} = \frac{\sqrt{3}\cdot 79}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\cancel{\sqrt{3}}\cdot 79}{4\cdot \cancel{\sqrt{3}}\cdot 25} = \frac{79}{100}$$

Ответ: $\frac{79}{100}$

чорновик 14





211005803 (U377047 M1276303)