Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005665**

ID профиля: **122880**

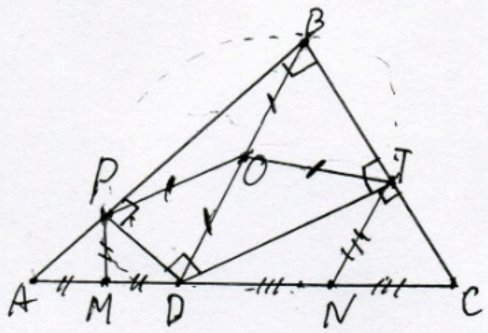
Вариант 9

Чистовик

1. Дано:
$\triangle ABC$; BD-диам.
$AM=MD$; $CN=ND$
$PM \parallel TN$

Найти:
1) $\angle ABC$ - ?
2) $S_{\triangle ABC}$ - ?
$MP=\frac{1}{2}$; $NT=\frac{5}{2}$; $BD=2$

Решение:



а) 1) т.к. $\angle BTD$ опирается на диаметр, то $\angle BTD=90°$, аналог. $\angle BPD=90°$

2) тогда $\angle DTC$ и $\angle APD$ равны $90°$, как смежные.

3) $\triangle PDA$ - прям. PM - медиана тогда $PM=AM=MD \Rightarrow \triangle APM$ равнобедр.

$\angle PAM=\frac{180°-\angle AMP}{2}$; аналогично $TN=DN=NC$ и $\angle TDN=\frac{180°-\angle DNT}{2}$

4) т.к. $PM \parallel TN$ то $\angle AMP=\angle DNT$, как соотв. $\Rightarrow \angle PAM=\angle TDN$

5) $\left.\begin{array}{l}\angle TDN=\angle PAM=\angle BAC\\ \angle TCD=\angle BCA\\ \angle TDC+\angle TCD=90°\end{array}\right| \Rightarrow \angle BAC+\angle BCA=90° \Downarrow \angle ABC=90°$

б) $MP=\frac{1}{2} \Rightarrow AD=2MP=1$; $NT=\frac{5}{2} \Rightarrow DC=2NT=5$

т.к. $\triangle APD \sim \triangle DTC$ то $\frac{AD}{DC}=\frac{AP}{DT}=\frac{PD}{TC}=\frac{1}{5} \Rightarrow DT=5AP$
$TC=5PD$

из т-мы Пифагора

$\begin{cases}AP^2+PD^2=1\\ PD^2+DT^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}AP^2+PD^2=1\\ 25AP^2+PD^2=4\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}AP=\frac{\sqrt{2}}{4}\\ PD=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\end{array} \quad \begin{array}{l}DT=\frac{5\sqrt{2}}{4}\\ TC=\frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\end{array}$

$BP^2=4-PD^2=4-\frac{7}{8}=\frac{25}{8} \Rightarrow BP=\frac{5\sqrt{2}}{4} \Rightarrow AB=\frac{5\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{6\sqrt{2}}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$BT=\sqrt{4-\frac{25}{8}}=\sqrt{\frac{7}{8}}$ $\quad BC=5\sqrt{\frac{7}{8}}+\sqrt{\frac{7}{8}}=\frac{6\sqrt{7}}{\sqrt{8}}=\frac{6\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB \cdot BC=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{6^3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{7}}{8}$

Ответ: а) $90°$; б) $\frac{9\sqrt{7}}{8}$

1

211005665 (U122880 M1276000)

Чистовик

№2. $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2} \quad |\cdot -1$

Одз: $x\in[-4;6]$

$\sqrt{6-x}-\sqrt{x+4}-4=-2\sqrt{(6-x)(x+4)}=(6-x)-2\sqrt{(6-x)(x+4)}+(x+4)-$

$-(x+4+6-x)=\left(\sqrt{6-x}-\sqrt{x+4}\right)^2-10$

$\sqrt{6-x}-\sqrt{x+4}=t$

$t-4=t^2-10$ $\qquad D=1+24=25$

$t^2-t-6=0$ $\qquad t_{1,2}=\frac{1\pm5}{2}=\begin{cases}3\\-2\end{cases}$

$\sqrt{6-x}-\sqrt{x+4}=3$

$10-2\sqrt{(6-x)(x+4)}=9$

$2\sqrt{(24+2x-x^2)}=1$

$-x^2+2x+24-\frac{1}{4}=0$

$x^2-2x-23\frac{3}{4}=0$

$\frac{D}{4}=1+23\frac{3}{4}=24\frac{3}{4}=\frac{99}{4}$

$x_{1,2}=1\pm\frac{3\sqrt{11}}{2}$

$\sqrt{6-x}-\sqrt{x+4}=-2$

$10-2\sqrt{24+2x-x^2}=4$

$\sqrt{24+2x-x^2}=3$

$-x^2+2x+24=9$

$x^2-2x-15=0$

$\frac{D}{4}=1+15=16$

$x_{1,2}=1\pm4=\begin{cases}5\\-3\end{cases}$

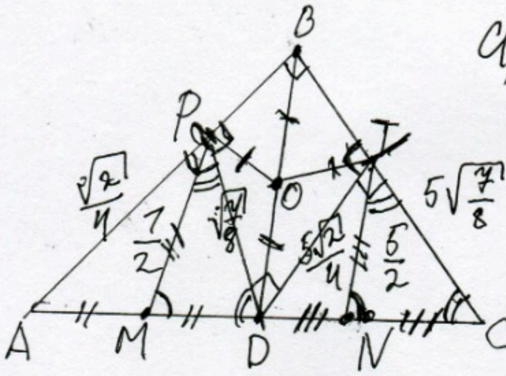
Ответ: $1-\frac{3\sqrt{11}}{2}$; -3; 5; $1+\frac{3\sqrt{11}}{2}$

2

211005665 (U122880 M1276000)

Черновик.

№1.



а) 1) т.к. окр ~~отн~~ с диам BD т O - сер и центр $\Rightarrow R = BO$

т.к. окр пересек в т P и T то $PO = OT = R$

тогда $\triangle BPD$ и $\triangle BTD$ прямоугольные - опир на диам и $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$

тогда и $\angle APD = 180 - 90^\circ = 90^\circ = \angle DTC$.

2) $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMD = \angle TNC$. как соотв.

т.к. PM - мед $\triangle ADP$ ~~а~~ $\triangle ADP$ - прямоуг $\Rightarrow PM = AM = MD$

аналог $TN = DN = NC$, тогда $\triangle MDP$ и $\triangle TNC$ равнобедр.

3) ~~из $\angle MD$~~

из п(2) $\triangle MPD \sim \triangle NTC$. $\Rightarrow \angle MDP = \angle$ ~~TCN~~ NCT

4) $\triangle AMP$ и $\triangle DNT$

$\angle AMP = \angle DNT$ (как соотв при $MP \parallel TN$)

$\angle APM = \angle DTN$ т.к $\triangle APM$ и $\triangle DTN$ равнобедр

$\Rightarrow \triangle AMP \sim \triangle DNT$ по 2-м угл.

$\Downarrow$

$\angle PAD = \angle TDN$

Б) $\angle TDN +$ ~~$\angle TNC$~~ $\angle TCN = 90^\circ$ (из $\triangle DTC$)

$\angle TDN = \angle PAD = \angle BAC$ ~~$\Rightarrow \angle B$~~

$\angle TCN = \angle BCA$

$\Rightarrow \angle BAC + \angle BCA = 90^\circ$

$\Downarrow$

$\angle ABC = 90^\circ$

б) $MP = \frac{1}{2}$; $NT = \frac{5}{2}$ $BD = 2 \Rightarrow R = 1 = BO = BP = BT$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

$AD = 2MP = 1$ $\quad DC = 2NT = 5 \Rightarrow AC = 1 + 5 = 6$

~~из т. им. Пифаг.~~

~~$PD = \sqrt{BD^2 - BP^2} \Rightarrow PD \sqrt{4-1} = \sqrt{3} = DT$~~

~~$AP = \sqrt{AD^2 - PD^2} = \sqrt{1}$~~

из $\triangle APD \sim \triangle DTC$

$\frac{AD}{DC} = \frac{AP}{DT} = \frac{1}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~AP~~ $DT = 5AP$

$PD^2 + DT^2 = 4$

$-\begin{cases} PD^2 + 25AP^2 = 4 \\ PD^2 + AP^2 = 1 \end{cases}$

$AP^2 + PD^2 = 1$

$24AP^2 = 3$

$AP^2 = \frac{1}{8}$

$AP = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ $\quad PD = \sqrt{\frac{7}{8}}$

Черновик

$PB^2 = 4 - PD^2 = 4 - \frac{7}{8} = \frac{32-7}{8} = \frac{25}{8} \Rightarrow 5\sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{5\sqrt{2}}{4} = PB$

$AB = \frac{6\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$BT^2 = 4 - \frac{25\cdot 2}{\cancel{16}8} = \frac{32-25}{8} = \sqrt{\frac{7}{8}} \Rightarrow BT = \sqrt{\frac{7}{8}}$

$BC = 5\sqrt{\frac{7}{8}} + \sqrt{\frac{7}{8}} = 6\sqrt{\frac{7}{8}}$

$S = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{3\sqrt{\cancel{2}}}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{6}^{3}\cdot\sqrt{7}}{2\sqrt{\cancel{2}}} = \boxed{\frac{9\sqrt{7}}{8}}$

211005665 (U122880 M1276000)

Черновик

№2. $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$ $\qquad x\in[-4;6]$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{(x+4)}\cdot\sqrt{(6-x)}$

$\sqrt{x+4}=t\geq 0 \qquad -x+6=-(x-6)=-(x+4-10)$

$t-\sqrt{-(t^2-10)}+4=2\cdot t\cdot\sqrt{-(t^2-10)}$

$\cancel{2\sqrt{24+2x-x^2}=x+4+2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x}+6-x-(x+4+6-x)=}$

$\cancel{=\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{6-x}\right)^2-10.}$

$-1\cdot|\ \sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$\sqrt{6-x}-\sqrt{x+4}-4=-2\sqrt{(x+4)(6-x)}=(x+4)-2\sqrt{(x+4)(6-x)}+(6-x)$

$-(x+4+6-x)=\left(\sqrt{6-x}-\sqrt{x+4}\right)^2-10.$

$\sqrt{6-x}-\sqrt{x+4}=t$

$t-4=t^2-10 \qquad D=1+24=25$

$t^2-t-6=0. \qquad t_{1,2}=\frac{1\pm5}{2}=\begin{cases}3\\-2.\end{cases}$

$\cancel{D=1+4\cdot14=1+56=57}$

$\cancel{t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{57}}{4}.}$

$\cancel{\sqrt{6-x}-\sqrt{x+4}=\frac{1+\sqrt{57}}{4}.}$

$\cancel{4\left(\sqrt{6-x}-\sqrt{x+4}\right)=1+\sqrt{57}.}$

$\cancel{16\cdot\left(10-2\sqrt{(6-x)(x+4)}\right)=58+2\sqrt{57}}$

$\cancel{160-32\sqrt{(6-x)(x+4)}=58+2\sqrt{57}}$

$\cancel{102=32\sqrt{(6-x)(x+4)}+2\sqrt{57}}$

$\cancel{51=16\ldots}$

$\sqrt{6-x}-\sqrt{x+4}=3.$

$10-2\sqrt{(6-x)(x+4)}=9.$

$2\sqrt{(6-x)(x+4)}=1$

$(6-x)(x+4)=\frac{1}{4}$

$-x^2+2x+24-\frac{1}{4}=0.$

$x^2-2x-23\frac{3}{4}$

$\frac{D}{4}=1+23\frac{3}{4}=24\frac{3}{4}=\frac{99}{4}$

$x_{1,2}=1\pm\frac{3\sqrt{11}}{2}$

$\sqrt{6-x}-\sqrt{x+4}=-2$

$10-2\sqrt{24+2x-x^2}=4$

$2\sqrt{24+2x-x^2}=6$

$\sqrt{24+2x-x^2}=3$

$-x^2+2x+24=9$

$x^2-2x-15=0$

$\frac{D}{4}=1+15=16$

$x_{1,2}=1\pm4=\begin{cases}5\\-3.\end{cases}$

Ответ: $1-\frac{3\sqrt{11}}{2}$; -3; 5; $1+\frac{3\sqrt{11}}{2}$

Черновик

№3 $26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$ – A

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$ – параб с вер в Т B

по разные от $3x-y=4 \Rightarrow y=3x-4$

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0. \quad a\neq 0.$

$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$

~~вер~~ $x_в=\frac{-b}{2a}=\frac{-2a}{2}=-a \qquad B(-a;\frac{1}{a})$

$y_в=\cancel{a^2}-\cancel{2a^2}+\cancel{a^2}+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$

$26a^2-22ax-20ay+(5x^2+8xy+4y^2)=0.$

$10+12$

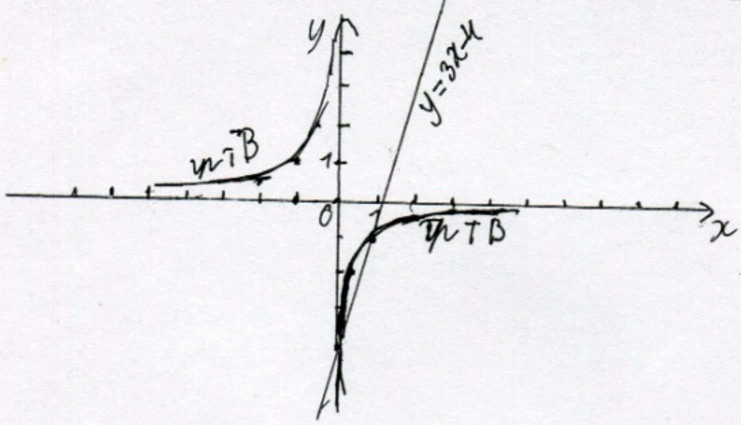
$x^2-22ax+121a^2 \qquad x^2+(2x+2y)^2$

$(x-11a)^2= \qquad 4(x+y)^2$

$100a^2-20ay+y^2$

~~$(y-10a)^2+(x-11a)^2-y^2+4(x+y)^2=195a^2$~~

$-100a^2+4\cdot 21a^2$



211005665 (U122880 M1276000)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005665**

ID профиля: **122880**

Вариант 9

Чистовик

№4 $\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ x^4+y^4+3x^2\cdot y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow - \begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=5 \end{cases}$

$\frac{2}{x^2+y^2}-(x^2+y^2)^2=-3$

$x^2+y^2=t \geq 0$

$\frac{2}{t}-t^2+3=0$

$2-t^3+3t=0$

$t^3-3t-2=0$

$$\begin{array}{l|l} t^3-3t-2 & t+1 \\ \underline{-\ t^3+t^2} & \overline{t^2-t-2} \\ \quad -t^2-3t & \\ \quad \underline{-\ -t^2-t} & \\ \qquad -2t-2 & \\ \qquad \underline{-\ -2t-2} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$(t+1)(t^2-t-2)=0$

$(t+1)^2(t-2)=0$

$t=-1$ – не уд усл

$t=2$

$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 4+x^2y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \end{cases} \Rightarrow x^2=2-y^2$

$(2-y^2)\cdot(y^2)-1=0$

$2y^2-y^4-1=0$

$-(y^2-1)^2=0$

$y=\pm 1 \quad x=\pm 1$

$(1;1);(1;-1);(-1;1);(-1;-1)$

Ответ: $(1;1);(1;-1);(-1;1);(-1;-1)$

1

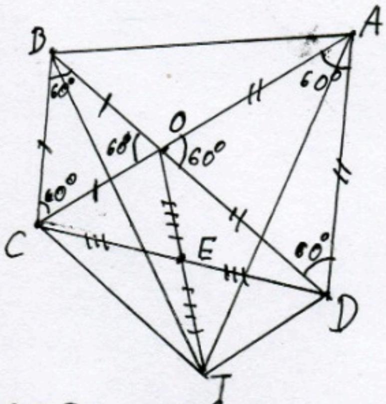
211005665 (U122880 M1276001)

Чистовик

№6 Дано:
ABCD-четырехуг.
$AC \cap BD = O$
$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - правильн
T симметр O отн
сер CD

а) Док-ть $\triangle ABT$-прав.
б) $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}$ - ? $BC = 3$, $AD = 7$

Решение:



а) 1) $\angle COD = 180° - \angle BOC = 180° - 60° = 120° =$ (смежный с $\angle BOC$) $= \angle BOA$ (вертик)

2) рассм CTDO.
$CE = ED$ (E-серед)
$OE = ET$ (т.к. T симм O) $\Rightarrow$ CTDO - параллелограм по признаку.
$\Downarrow$
$\angle OCT = 180° - \angle COD = 60° = \angle ODT$;
$CT = OD = AD$ ($\triangle AOD$ прав);
$TD = CO = CB$ ($\triangle BOC$ прав)

3) $\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT =$
$= 60° + 60° = 120°$
$\angle ADT = \angle ODA + \angle ODT =$
$= 60° + 60° = 120°$
$\Downarrow$
$\angle BCT = \angle ADT = \angle BOA$

4) $BC = BO = DT$ (из (2))
$CT = OD = OA = AD$ (из (2))
$\angle BCT = \angle ADT = \angle BOA$ (из (3))
$\Rightarrow \triangle BCT = \triangle TDA = \triangle BOA$ по 2м стор и угл
$\Downarrow$
$BT = AT = BA$
$\Downarrow$
$\triangle ABT$ - прав
ч.т.д.

б) 1) $BC = 3$; $AD = 7$; тогда по т-ме cos
$BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2BC \cdot CT \cdot \cos\angle BCT = 9 + 49 + 3 \cdot 7 = 79$
$S_{\triangle ABT} = \frac{BT^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$

2) ~~т.к.~~ $BC \parallel AD$ т.к. $\angle CBD = \angle BDA$ (накр леж) $\Rightarrow$ ABCD - трап.
$h = h_1 + h_2$. $h_1 = CO \cdot \sin 60° = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ $h_2 = AD \cdot \sin 60° = \frac{7\sqrt{3}}{2}$
$h = h_1 + h_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$
$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot h(BC + AD) = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 10 = 25\sqrt{3}$

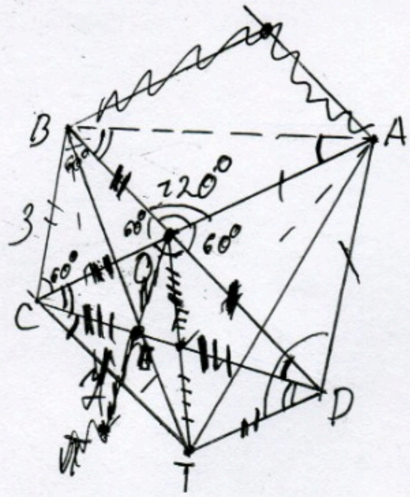
3) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABC}} = \frac{79\sqrt{3}}{4 \cdot 25\sqrt{3}} = \frac{79}{100}$

Ответ: ~~а)~~ б) $\frac{79}{100}$

2

черновик.

№6.



$\frac{BO}{AO} = \frac{AD}{BC} = \frac{CO}{OD}$

$\triangle AOB \sim \triangle DOC$ по углу и отн.

OE – медиана.

$CT = OD$
$TD = CO$
$OE = ET$
$CE = ED$
$\Rightarrow$ CODT – параллелограм

тогда $\angle OCT = \angle ODT = 60°$

$\angle BCT = \angle TDA = 60° + 60° = 120°$

$\angle CTD = 120°$

$\triangle \cancel{ATD}\,BCT = \triangle STD \Rightarrow BT = AT$

по 2-м сторонам и углу между ними.

$\triangle BOA = \triangle BCT$ аналог $\Rightarrow BA = BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ – прав.

б) $BC = 3$; $AD = 7$

~~BT~~ по т-ме cos

$BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2 \cdot BC \cdot CT \cdot \cos 120° = 9 + 49 + \overset{21}{3 \cdot 7} = 79 \Rightarrow BT = \sqrt{79}$

$S_{\triangle ABT} = \frac{BT^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{79 \cdot \sqrt{3}}{4}$

S_{ABCD}: $BC \parallel AD$ т.к. $\angle CBD = \angle BDA$ (накр леж) $\Rightarrow ABCD$ – трап.

$h = h_1 + h_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (AD + BC) = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 10 = 25\sqrt{3}$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79 \cdot \cancel{\sqrt{3}}}{4 \cdot 25 \cancel{\sqrt{3}}} = \frac{79}{100}$

211005665 (U122880 M1276001)

Черновик.

№4. $\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow - \begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=5 \end{cases}$

$\frac{2}{x^2+y^2}-(x^2+y^2)^2=-3$

$x^2+y^2=t \geq 0$

$\frac{2}{t}-t^2+3=0$

$2-t^3+3t=0$

$t^3-3t-2=0$

$$\begin{array}{r|l} t^3-3t-2 & t+1 \\ \cline{2-2} -\underline{t^3+t^2} & t^2-t-2 \\ -t^2-3t & \\ -\underline{-t^2-t} & \\ -2t-2 & \\ -\underline{-2t-2} & \\ 0 & \end{array}$$

$(t+1)(t^2-t-2)=0$

$D=1+8=9$

$t_{1,2}=\frac{1\pm3}{2}=\begin{cases} 2 \\ -1 - \text{не уд.} \end{cases}$

$(t+1)^2(t-2)=0$

~~$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$~~

$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ 4+x^2y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=\cancel{6}\ 1 \end{cases} \Rightarrow x^2=2-y^2$

~~(1;1); (-1;1); (1;-1); (-1;-1)~~

$(2-y^2)y^2=1$

$-y^4+2y^2-1=0$

$(y^2-1)^2=0$

$y=\pm1$

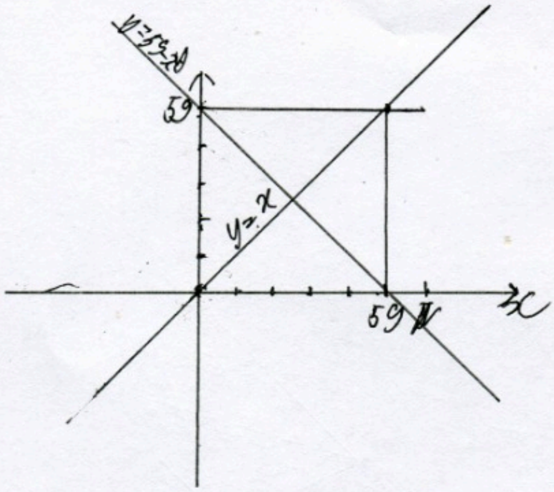
$x=\pm1$

~~$x^2+y^2=$~~

Ответ: (1;1); (-1;1); (1;-1); (-1;-1)

211005665 (U122880 M1276001)

№5. Черновик.



$x \in [1; 58]$
$y \in [1; 58]$

$(x; x)$; $(x; 59-x)$