Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005650**

ID профиля: **340158**

Вариант 9

Вариант №9.
Чистовик №1.

Математика 10 кл.

№2

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$$

ОДЗ: $x \geq -4$

$x \leq 6$

$-x^2+2x+24 \geq 0$

Заменим $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=t \Rightarrow$

$t^2=10-2\sqrt{24+2x-x^2}$

$2\sqrt{24+2x-x^2}=10-t^2$

$t-4=10-t^2$

$t^2+t-6=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=2 \end{array}\right.$

① $t=-3$

$\sqrt{x+4}+3=\sqrt{6-x}$

$x+4+9+6\sqrt{x+4}=6-x$

$36x+144=4x^2+28x+49 \Rightarrow 4x^2-8x-95=0.$

$D=16+95\cdot 4=396.$

$x=\dfrac{2\pm 3\sqrt{11}}{2}$ удовлетворяет ОДЗ.

② $t=2$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}$ возрастает. Сумма возрастающих имеет один корень.

Подбором устанавливаем, что $x=5$.

Ответ: $\dfrac{2\pm 3\sqrt{11}}{2}$; 5.

Чистовик №2.

Математика 10 кл.

№3 $26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$

Рассмотрим это уравнение, как квадратное относит. x.

$5x^2+2x(4y-11a)+4y^2-20ay+26a^2=0$ (1)

$D=(4y-11a)^2-5(4y^2-20ay+26a^2)=-(2y-3a)^2$

Ур-е (1) имеет решения только при $y=\frac{3a}{2}$.

$5x^2+2x(6a-11a)+9a^2-30a^2+26a^2=0$

$5x^2-10ax+5a^2=0 \Rightarrow (x-a)^2=0$

$A\left(a;\frac{3a}{2}\right)$.

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1$ - ур-е параболы $\Rightarrow a\neq0$

$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}=(x+a)^2+\frac{1}{a}$. $B\left(-a;\frac{1}{a}\right)$

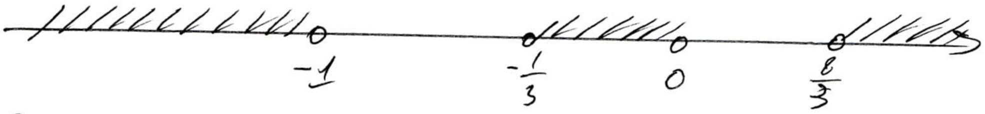
$3x-y=4 \Rightarrow f(x)=3x-4$.

Чтобы A и B лежали по разные стороны от прямой должно выполняться неравенство:

$\left(\frac{3a}{2}-f(a)\right)\left(\frac{1}{a}-f(-a)\right)<0$

$\left(\frac{3a}{2}-3a+4\right)\left(\frac{1}{a}+3a+4\right)<0$

$\left(\frac{(8-3a)(3a^2+4a+1)}{a}\right)<0$



Ответ: $(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};0\right)\cup\left(\frac{8}{3};+\infty\right)$.

Черновик.

№2

~~$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$~~

~~$\sqrt{x+4}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}+\sqrt{6-x}$~~

~~$(x+4)+8\sqrt{x+4}+16=2(24+2x-x^2)+4\sqrt{24+2x-x^2}\cdot\sqrt{6-x}+(6-x)$~~

~~$x+20+8\sqrt{x+4}=48+4x-2x^2+4\cdot\sqrt{24+2x-x^2}\cdot\sqrt{6-x}+6-x$~~

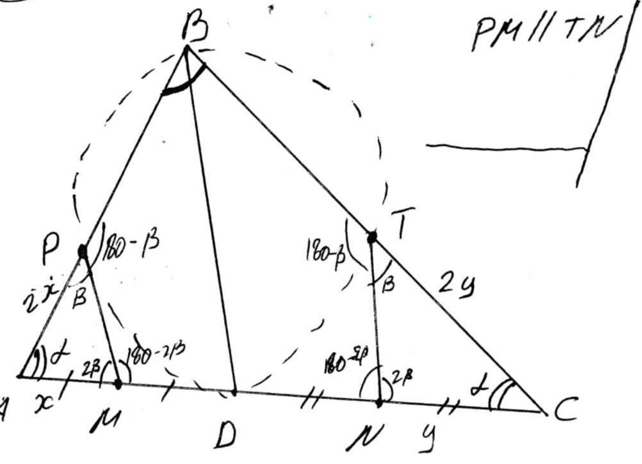
~~$2x^2-2x+20-54=4\cdot\sqrt{24+2x-x^2}\cdot\sqrt{6-x}-8\sqrt{x+4}$~~

~~$2x^2-2x-34=4\cdot\sqrt{24+2x-x^2}\cdot\sqrt{6-x}-8\sqrt{x+4}$~~

~~$x^2-x-17=2\sqrt{24+2x-x^2}\cdot\sqrt{6-x}-4\sqrt{x+4}$~~

~~$(x^2-x-17)^2=(2\sqrt{24+2x-x^2}\cdot\sqrt{6-x}-4\sqrt{x+4})^2$~~

№1



x' - $\angle ABC$;

α - ?; β - ?

Дано

PM // TN

Решение:

а) $\angle ABC$ - ?

$PM \parallel TN \Rightarrow \triangle APM \sim \triangle CTN \Rightarrow$

$\angle BAC = \angle BCA = \alpha$

$\angle ABC = 180 - \angle BAC - \angle BCA = 180 - 2\alpha$

Т.к. т. M середина AD

$AP = 2x$; $AM = x$

Т.к. т. N середина CD

$CT = 2y$; $CN = y$.

$\alpha + 3\beta = 180°$

$x' = 180 - 2\alpha$

~~$180 \ldots 180-\beta \ldots 180-2\beta$~~

(№2)

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$$

$$\cancel{\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{24+2x-x^2} - 4}$$

Черновик

ОДЗ:

$x \geq -4$

$x \leq 6$

$-x^2+2x+24 \geq 0$

$4 \qquad 6$

Заменим $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = t \Rightarrow$

$t^2 = 10 - 2\sqrt{24+2x-x^2} \qquad 2\sqrt{24+2x-x^2} = 10 - t^2$

$t - 4 = 10 - t^2$

$t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \\ t = 2 \end{array}\right.$

(1) $t = -3$

$\sqrt{x+4} + 3 = \sqrt{6-x}$

$x + 4 + 9 + 6\sqrt{x+4} = 6 - x$

$6\sqrt{x+4} = -2x - 7$

$36x + 144 = 4x^2 + 28x + 49 \Rightarrow 4x^2 - 8x - 95 = 0$

$D = 16 + 95 \cdot 4 = 396$

$x = \dfrac{2 \pm 3\sqrt{11}}{2}$

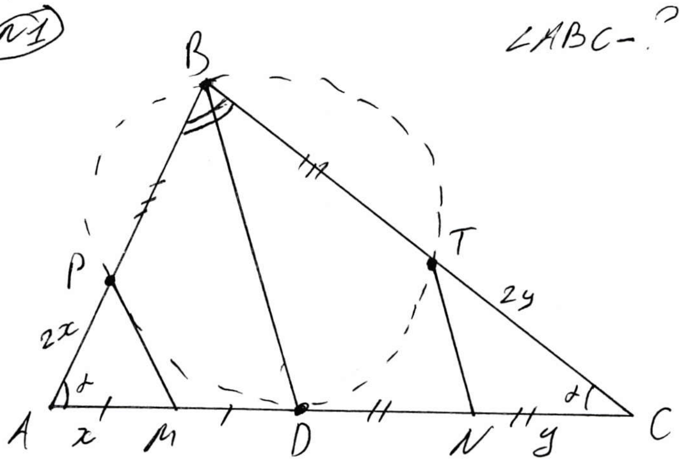
(2) $t = 2$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x}$ - возрастает, как сумма возрастающих имеет один корень. Подбором установим, что $x = 5$.

Ответ: $\dfrac{2 \pm 3\sqrt{11}}{2}$; 5.

Черновик.

№1



$\angle ABC - ?$

$PM \parallel TN \Rightarrow \triangle APM \sim \triangle CTN$

$\angle BAC = \angle BCA = \alpha$

$\angle ABC = 180^\circ - 2\alpha$

т.к. т. M середина AD

$AP = 2x$; $AM = x$

т.к. т. N середина CD

$CT = 2y$; $CN = y$

№3

$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$

Рассмотрим это уравнение, как квадратное отн. x.

$5x^2 + 2x(4y - 11a) + 4y^2 - 20ay + 26a^2 = 0 \quad (1)$

$D = (4y - 11a)^2 - 5(4y^2 - 20ay + 26a^2) = 16y^2 - 88ay + 121a^2 - 20y^2 + 100ay - 130a^2 =$

$= -(2y - 3a)^2$

Уравнение (1) имеет решения только при $y = \frac{3a}{2}$.

$5x^2 + 2x(6a - 11a) + 9a^2 - 30a^2 + 26a^2 = 0$

$5x^2 - 10ax + 5a^2 = 0 \Rightarrow (x - a)^2 = 0 \qquad \begin{cases} x = a \\ y = \frac{3a}{2} \end{cases}$

$A\left(a; \frac{3a}{2}\right)$

$ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1$ - ур-е параболы $\Rightarrow a \neq 0$

$y = x^2 + 2ax + a^2 + \frac{1}{a} = (x + a)^2 + \frac{1}{a} \qquad B\left(-a; \frac{1}{a}\right)$

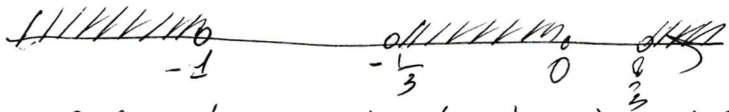
$3x - y = 4 \Rightarrow f(x) = 3x - 4.$

Чтобы A и B лежали по разные стороны!

$\left(\frac{3a}{2} - f(a)\right)\left(\frac{1}{a} - f(-a)\right) < 0$

$\left(\frac{3a}{2} - 3a + 4\right)\left(\frac{1}{a} + 3a + 4\right) < 0$

$\left(\frac{(8 - 3a)(3a^2 + 4a + 1)}{a}\right) < 0$



Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(\frac{8}{3}; +\infty\right).$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005650**

ID профиля: **340158**

Вариант 9

Вариант 9. Математика 10 кл.

Чистовик №1.

№4

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

Произведем замену: $x^2+y^2=a$, $a>0$.
$x^2y^2=b$

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a} + b = 2 \\ a^2+b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = 2 - \dfrac{2}{a} \\ a^2+2-\dfrac{2}{a}=5 \end{matrix}$$

$a^3-3a-2=0.$

$a_1=-1$. (не подходит, т.к. $a>0$).

Понизим степень по схеме Горнера:

	1	0	-3	-2
-1	1	-1	-2	0

$\Rightarrow a^2-a-2=0$

$a_2=2$

$b=1$.

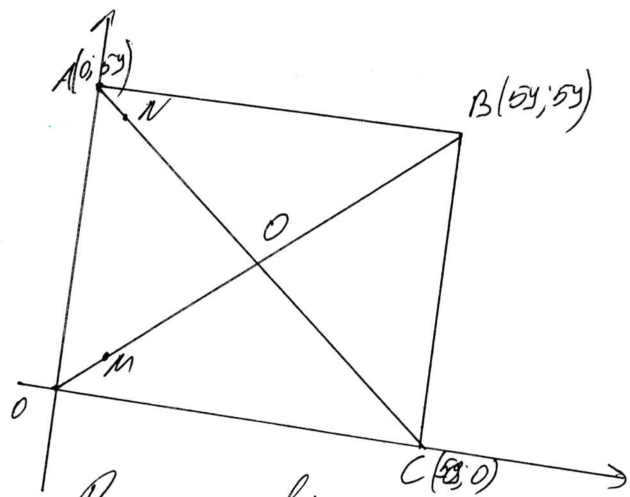
$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} y^2=2-x^2 \\ x^2(2-x^2)=1 \\ -x^4+2x^2=1 \\ (x^2-1)^2=0 \Rightarrow x^2=y^2=1. \end{matrix}$$

Ответ: $(1;1)$; $(-1;1)$; $(1;-1)$; $(-1;-1)$.

№5

Чистовик №2.

Математика 10 к



Заметим, что точка пересечения диагонал
$y=x$ и $y=59-x$ имеет дробные координ
не попадает в узел решетки.
Возьмем произвольную точку M на диагонали А
Ее можно выбрать 60 способами.
Вместе с M на одной горизонтали и вертикал
лежат $60+59=119$ точек.

Всего узлов: $60\cdot60=3600$

$3600-119=3481$, тогда $60\cdot3481=208860$.

Но точки лежащие на OB были учтены дважды.

$C_{60}^2=1770$; $208860-1770=207090$.

Рассмотрим точку N с диагональю AC.

Ее можно выбрать 60 способами.

При выборе пары для этой точки не будет рассматриваться точка с диагональю OB.

$59+58=117$

$3600-60-117=3423$

$3423\cdot60=205380$

$205380-1770=203610$

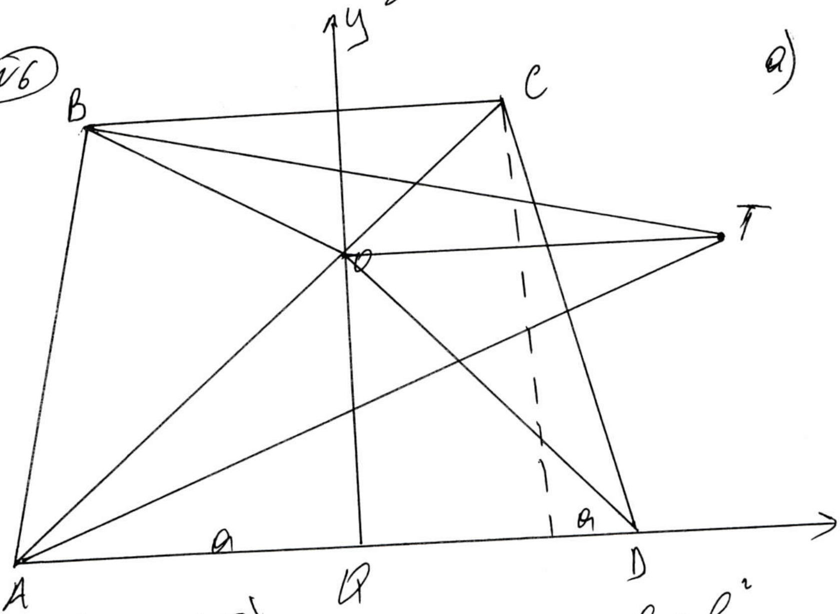
Всего точек: $207090+203610=410700$.

Ответ: 410700.

Математика 10 кл.

Чистовик №3.

№6



а) $O(0; a\sqrt{3})$

$A(-a;0)$; $B(-b; (a+b))$; $C(b; (a+b)\sqrt{3})$

$D(a;0)$

$N\left(\frac{a+b}{2}; \frac{(a+b)\sqrt{3}}{2}\right)$. $T(x_1; y_T)$

$x_1 + 0 = a+b$

$x_T = a+b$

$y_T = b\sqrt{3}$

$y_T + a\sqrt{3} = (a+b)\sqrt{3}$

$T(a+b; b\sqrt{3})$

$AB^2 = (a-b)^2 + (a+b)^2 \cdot 3 = 4a^2 + 4ab + 4b^2$.

$AT^2 = (2a+b)^2 + (b\sqrt{3})^2 = 4a^2 + 4ab + 4b$

$BT^2 = (a+2b)^2 + (a\sqrt{3}) = 4a^2 + 4ab + 4b^2$

Доказано, $\triangle ABT$ - равносторонний.

б). $BC = 3$, $AD = 7$ $\Rightarrow$ $b = \frac{3}{2}$, $a = \frac{7}{2}$

$AB^2 = 4(a^2 + ab + b^2) = 9 + 21 + 49 = 79$

$S_{ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = (a+b) \cdot \sqrt{3}(a+b) = (a+b)^2\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$.

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79\cancel{\sqrt{3}}}{4 \cdot 25\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{79}{100}$.

Ответ: $\frac{79}{100}$.

Черновик.

№4

$$\begin{cases} \cancel{\frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2} \\ \cancel{x^4+y^4+3x^2y^2 = 5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{x^2y^2 = 2 - \frac{2}{x^2+y^2}} \\ \cancel{x^4+y^4+3\left(2-\frac{2}{x^2+y^2}\right) = 5} \end{cases}$$

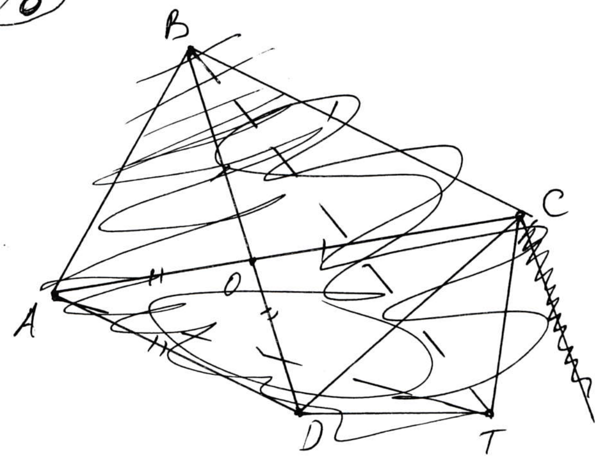
$$\cancel{x^4+y^4+6-\frac{6}{x^2+y^2} = 5}$$

$$\cancel{x^4+y^4-\frac{6}{x^2+y^2} = -1.}$$ ✓

$$\cancel{(x^4+y^4)(x^2+y^2)-6 = -1}$$

$$\cancel{(x^4+y^4)(x^2+y^2) = 5.}$$

№6



чертовых.

№4

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$$

$x^2+y^2=a$, $a>0$

$x^2y^2=b$

$$\begin{cases} \frac{2}{a}+b=2 \\ a^2+b=5 \end{cases} \Rightarrow$$

$b=2-\frac{2}{a}$

$a^2+2-\frac{2}{a}=5 \Rightarrow a^3-3a-2=0$ $\quad a_1=-1$.

$a^2-a-2=0$

$a_2=2$

	1	0	-3	-2
-1	1	-1	-2	0

$b=1$.

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \end{cases}$$

$y^2=2-x^2$

$x^2(2-x^2)=1$

$-x^4+2x^2=1$

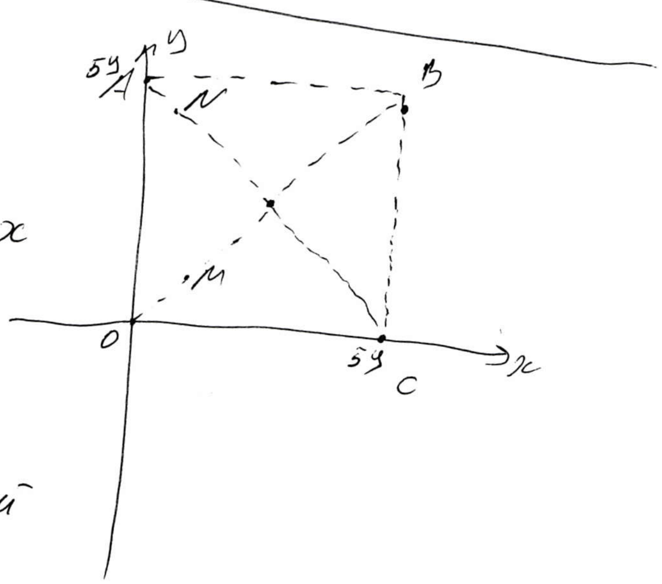
$(x^2-1)^2=0 \Rightarrow x^2=y^2=1$.

Ответ: $(1;1)$ $(-1;1)$ $(1;-1)$ $(-1;-1)$.

№5

$(0;0)$, $(0;59)$, $(59;59)$, $(59;0)$

$y=x$ $\quad y=59-x$



Заметим, что точка пересечения диагоналей $y=x$ и $y=59-x$ имеет дробные координаты и не попадает в узел решетки.

Возьмем произвольную точку M на д. AB.

Ее можно выбрать 60 способами и в пару к ней можно выбрать любую другую.

Вместе с M на одной горизонтали лежат $60+59=119$ и вертикали

Всего узлов $60\cdot60=3600$

$3600-119=3481$ Тогда $60\cdot3481=208860$

Но точки лежащие на OB были учтены 2 раза.

$C_{60}^2=1770$ $\quad 208860-1770=\underline{207090}$

Черновик.

Рассмотрим точку N с диагональю AC.

Ее можно выбрать 60 способами.

При выборе пары для этой точки не будет рассматриваться точка с диаг. Ор

$5 \cdot 4 + 58 = 117$

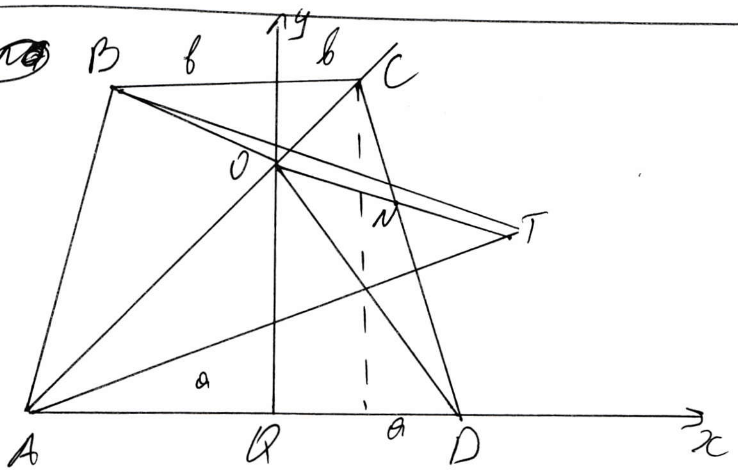
$3600 - 60 - 117 = 3423$

$3423 \cdot 60 = 205380.$

$205380 - 1770 = 203610.$

Всего: $207090 + 203610 = \underline{410700}.$

19



$O(0; a\sqrt{3})$

$A(-a; 0)$

$B(-b; (a+b)\sqrt{3})$

$C(b; (a+b)\sqrt{3})$

$D(a; 0)$

$N\left(\frac{a+b}{2}; \frac{(a+b)\sqrt{3}}{2}\right)$ $T(x_T; y_T)$

$x_T + 0 = a + b$

$x_T = a + b$

$y_T = b\sqrt{3}$

$y_T + a\sqrt{3} = (a+b)\sqrt{3}$

$T(a+b; b\sqrt{3})$

$AB^2 = (a-b)^2 + (a+b)^2 \cdot 3 = 4a^2 + 4ab + 4b^2$

$AT^2 = (2a+b)^2 + (b\sqrt{3})^2 = 4a^2 + 4ab + 4b^2$

$BT^2 = (a+2b)^2 + (a\sqrt{3})^2 = 4a^2 + 4ab + 4b^2$

Доказано; $\triangle ABT$ - равносторонний.

$b = \frac{3}{2}$; $a = \frac{7}{2}$

$AB^2 = 9 + 21 + 49 = 79$

$S_{ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABCD} = (a+b)^2\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79\sqrt{3}}{4 \cdot 25\sqrt{3}} = \frac{79}{100}.$