Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005631**

ID профиля: **378598**

Вариант 9

Чистовик

Математика:

Подставим $x=-3$, $x=\frac{2\pm 3\sqrt{11}}{2}$, $x=5$ в исходное уравнение:

$x=-3$:

$$\sqrt{-3+4}-\sqrt{6-(-3)}+4=2\sqrt{24+2\cdot(-3)-(-3)^2}$$

$$\sqrt{1}-\sqrt{9}+4=2\sqrt{9}$$

$$1-3+4=6$$

$2=6$ — неверно.

$x=-3$ — посторонний корень

$x=5$:

$$\sqrt{5+4}-\sqrt{6-5}+4=2\sqrt{24+2\cdot 5-5^2}$$

$$\sqrt{9}-\sqrt{1}+4=2\sqrt{9}$$

$$3-1+4=6$$

$6=6$ — верно.

$x_1=5$.

~~Ответ: 5.~~

$x=\frac{2-3\sqrt{11}}{2}$:

$$\sqrt{\frac{2-3\sqrt{11}}{2}+4}-\sqrt{6-\frac{2-3\sqrt{11}}{2}}+4=2\sqrt{24+2\cdot\frac{2-3\sqrt{11}}{2}-\left(\frac{2-3\sqrt{11}}{2}\right)^2}$$

$$\sqrt{\frac{10-3\sqrt{11}}{2}}-\sqrt{\frac{10+3\sqrt{11}}{2}}+4=2\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{10-3\sqrt{11}}{2}}-\sqrt{\frac{10+3\sqrt{11}}{2}}+4=1.$$

$$\sqrt{\frac{10-3\sqrt{11}}{2}}-\sqrt{\frac{10+3\sqrt{11}}{2}}=-3.$$

$$\sqrt{\frac{20-6\sqrt{11}}{4}}-\sqrt{\frac{20+6\sqrt{11}}{4}}=-3.$$

$$\sqrt{\frac{11-2\cdot3\cdot\sqrt{11}+9}{4}}-\sqrt{\frac{11+2\cdot3\cdot\sqrt{11}+9}{4}}=-3.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{11}-3)^2}-\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{11}+3)^2}=-3.$$

$$\frac{\sqrt{11}-3}{2}-\frac{\sqrt{11}+3}{2}=-3$$

$-3=-3$ — верно.

$$x_2=\frac{2-3\sqrt{11}}{2}$$

$x=\frac{2+3\sqrt{11}}{2}$:

$$\sqrt{\frac{2+3\sqrt{11}}{2}+4}-\sqrt{6-\frac{2+3\sqrt{11}}{2}}+4=2\sqrt{24+2\cdot\frac{2+3\sqrt{11}}{2}-\left(\frac{2+3\sqrt{11}}{2}\right)^2}$$

$$\sqrt{\frac{10+3\sqrt{11}}{2}}-\sqrt{\frac{10-3\sqrt{11}}{2}}+4=2\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$\sqrt{\frac{20+6\sqrt{11}}{4}}-\sqrt{\frac{20-6\sqrt{11}}{4}}+4=1.$$

$$\sqrt{\frac{11+3\cdot2\cdot\sqrt{11}+9}{4}}-\sqrt{\frac{11-2\cdot3\cdot\sqrt{11}+9}{4}}=-3.$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{11}+3)^2}-\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{11}-3)^2}=-3.$$

$$\frac{\sqrt{11}+3}{2}-\frac{\sqrt{11}-3}{2}=-3$$

$3=-3$ — неверно.

$x=\frac{2+3\sqrt{11}}{2}$ — пост. корень.

Ответ: $\frac{2-3\sqrt{11}}{2}$; 5.

211005631 (U378598 M1278458)

Чистовик.

Математика, 10кл.

№2.

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$.

~~ОДЗ:~~ ~~$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4\geqslant 0$~~
~~$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}\geqslant -4$~~

$24+2x-x^2=-(x^2-2x-24)=-(x-x_1)(x-x_2)$.

$x^2-2x-24=0$

$D=4-4\cdot(-24)=100>0\Rightarrow$ два корня.

$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{2\pm 10}{2}=1\pm 5$.

$x_1=1-5=-4$, $\quad x_2=1+5=6$.

$24+2x-x^2=-(x+4)(x-6)=(x+4)(6-x)$.

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=2\sqrt{x+4}\sqrt{6-x}-4 \quad \uparrow 2$.

$\cancel{x}+4-2\sqrt{x+4}\sqrt{6-x}+6-\cancel{x}=4(x+4)(6-x)-16\sqrt{x+4}\sqrt{6-x}+16$.

$4(x+4)(6-x)-14\sqrt{x+4}\sqrt{6-x}+6=0$.

Введём подстановку $\sqrt{x+4}\sqrt{6-x}=t$. $(t\geqslant 0$.

Тогда $(x+4)(6-x)=t^2$.

$4t^2-14t+6=0$.

$D=196-4\cdot 4\cdot 6=100>0$.

$t_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{100}}{2\cdot 4}=\frac{14\pm 10}{2\cdot 4}=\frac{7\pm 5}{4}$

$t_1=\frac{7-5}{4}=\frac{1}{2}$; $\quad t_2=\frac{7+5}{4}=3$.

Проверка:

$x=\frac{2-3\sqrt{11}}{2}$:

$\sqrt{\frac{2-3\sqrt{11}}{2}+4}\cdot\sqrt{6-\frac{2-3\sqrt{11}}{2}}=\frac{1}{2}$

$\sqrt{\frac{10-3\sqrt{11}}{2}}\sqrt{\frac{10+3\sqrt{11}}{2}}=\frac{1}{2}$

$\sqrt{\frac{100-99}{4}}=\frac{1}{2}$

$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ – верно.

$x=\frac{2+3\sqrt{11}}{2}$:

$\sqrt{\frac{2+3\sqrt{11}}{2}+4}\sqrt{6-\frac{2+3\sqrt{11}}{2}}=\frac{1}{2}$

$\sqrt{\frac{10+3\sqrt{11}}{2}}\sqrt{\frac{10-3\sqrt{11}}{2}}=\frac{1}{2}$

$\sqrt{\frac{100-99}{4}}=\frac{1}{2}$

$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ – верно

$\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x}=\frac{1}{2}\ \uparrow 2$ или $\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6-x}=3.\uparrow 2$.

$24+2x-x^2=\frac{1}{4}\quad |\cdot 4$.

$96+8x-4x^2=1$.

$4x^2-8x-95=0$.

$D=64-4\cdot 4\cdot(-95)=1584>0$

$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{1584}}{2\cdot 4}=\frac{8\pm 12\sqrt{11}}{8}=\frac{2\pm 3\sqrt{11}}{2}$

$24+2x-x^2=9$

$x^2-2x-15=0$.

$D=4-4\cdot(-15)=64>0$

$x_{3,4}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{2\pm 8}{2}=1\pm 4$

$x_3=1-4=-3$, $\quad x_4=1+4=5$.

~~Проверка:~~ Проверка: см. вставку справа

~~$x=\frac{1-6\sqrt{11}}{2}$:~~

~~$\sqrt{1-6\sqrt{11}+4}\cdot\sqrt{6-1+6\sqrt{11}}=1/2$~~

~~$\sqrt{5-6\sqrt{11}}\sqrt{5+6\sqrt{11}}=1/2$~~

~~$\sqrt{25-396}=1/2$~~

~~$\sqrt{-371}=1/2$ – неверно.~~

~~$x=1-6\sqrt{11}$ – пост. корень~~

~~$x=1+6\sqrt{11}$:~~

~~$\sqrt{1+6\sqrt{11}+4}\sqrt{6-1-6\sqrt{11}}=1/2$~~

~~$\sqrt{5+6\sqrt{11}}\sqrt{5-6\sqrt{11}}=1/2$ – неверно~~

~~$\sqrt{25-396}=1/2$~~

~~$\sqrt{-371}=1/2$ – неверно.~~

~~$x=1+6\sqrt{11}$ – пост. корень.~~

Проверка:

$x=-3$:

$\sqrt{-3+4}\sqrt{6-(-3)}=3$

$\sqrt{1}\cdot\sqrt{9}=3$

$3=3$ – верно

$x=5$:

$\sqrt{5+4}\sqrt{6-5}=3$

$\sqrt{9}\cdot\sqrt{1}=3$

$3=3$ – верно.

см. лист 2 →

211005631 (U378598 M1278458)

Чистовик. Математика, 10 кл.

*Рассмотрим ур-ие для (·)A:

$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0.$

$4y^2 + (8x - 20a)y + 5x^2 - 22ax + 26a^2 = 0.$

$D = (8x-20a)^2 - 16(5x^2 - 22ax + 26a^2) = 64x^2 - 320ax + 400a^2 - 80x^2 + 352ax - 416a^2 =$

$= -16x^2 + 32ax - 16a^2 = -16(x^2 - 2ax + a^2) = -16(x-a)^2 \le 0$ при любых a и x

$D \le 0$, но по условию корни должны существовать ((·)A существует, если для x есть хотя бы один y)

Тогда $D = 0 \Rightarrow \cancel{x \neq a}.\ -16(x-a)^2 = 0 \Rightarrow (x-a)^2 = 0 \Rightarrow x = a.$

$y = \dfrac{-(8x-20a)}{8} = \dfrac{-(8a-20a)}{8} = \dfrac{12a}{8} = \dfrac{3a}{2}.$

Рассмотрим каждый случай размещения (·)A отн. прямой $3x - y = 4$.

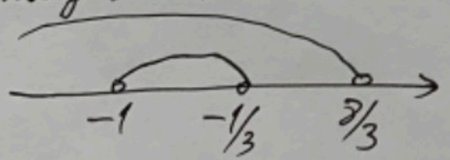
а) (·)B сверху ⇒ (·)A снизу.

$3a - \frac{3a}{2} < 4.$

$\frac{3a}{2} < 4.$

$a < \frac{8}{3}$

С учётом $a \in (-1; -\frac{1}{3})$ для (·)B получаем:



$a \in (-1; -\frac{1}{3})$

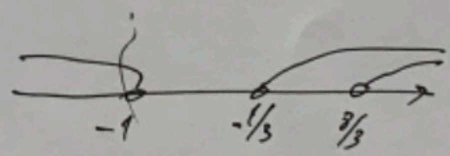
б) (·)B снизу ⇒ (·)A сверху:

$3a - \frac{3a}{2} > 4.$

$\frac{3a}{2} > 4$

$a > \frac{8}{3}$

С учётом $a \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$ получаем:



$a \in (\frac{8}{3}; +\infty)$

Ответ: $(-1; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{8}{3}; +\infty)$

Чистовик.

Математика, 10кл.

№3.

Определим координаты (·)B - вершины параболы ~~(ax²+2a²x-ay+a³+1=0)~~ $ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$.

$ay = ax^2+2a^2x+a^3+1.$

При $a=0$ получим $0=1$, что неверно. Тогда $a\neq0$, и мы можем разделить обе части на a.

~~Пусть $a\neq0$ (случай $a=0$ рассмотрим отдельно).~~

$y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$

$y=(x+a)^2+\frac{1}{a}.$

Данная парабола получается из параболы $y=x^2$ сдвигом влево на a ед. и вверх на $\frac{1}{a}$ ед. При этом точка $(0;0)$ (вершина) переходит в точку $\left(-a;\frac{1}{a}\right)$, она и будет точкой B.

~~Все~~ Точка B может располагаться сверху или снизу от прямой $3x-y=4$ ~~Все~~ Рассмотрим оба случая. (точка $(x_0;y_0)$ находится сверху от прямой $3x-y=4$ если $3x_0-y_0>4$, ~~сверху~~ снизу, если $3x_0-y_0<4$). ~~Тогда~~

а) ~~Все~~ (·)B находится сверху.

$-3a-\frac{1}{a}>4. \quad |\cdot(-1)$

$3a+\frac{1}{a}<-4 \quad |\cdot a$

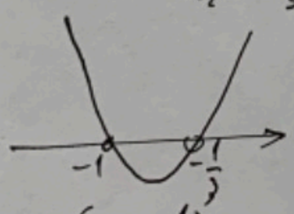
$3a^2+1<-4a$

$3a^2+4a+1<0.$

$3a^2+4a+1=0$

$3+1=4 \Rightarrow a_1=-1$

$a_2=-\frac{1}{3}.$



$a\in\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$

б) (·)B находится снизу.

$-3a-\frac{1}{a}<4 \quad |\cdot(-1)$

$3a+\frac{1}{a}>-4.$

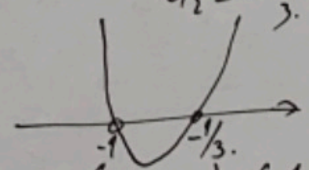
$3a^2+1>-4a$

$3a^2+4a+1>0.$

$3a^2+4a+1=0$

$3+1=4 \Rightarrow a_1=-1$

$a_2=-\frac{1}{3}.$



$a\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$

см. лист 4 →

Черновик.

Математика, 10 кл.

$$4y^2+(8x-20a)y+5x^2-22ax+26a^2=0.$$

$$D=(8x-20a)^2-16(5x^2-22ax+26a^2)=64x^2-320ax+400a^2-80x^2+352ax-416a^2=$$

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times\, 16 \\ \hline 132 \\ +\,22 \\ \hline 352 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times\, 16 \\ \hline 156 \\ +\,26 \\ \hline 416 \end{array}$$

$$\frac{-(8x-20a)\pm\sqrt{-16x^2+32ax-16a^2}}{8}=$$

$$=-(8x-20a)\pm4\sqrt{-()}$$

211005631 (U378598 M1278458)

Черновик.

Математика, 10кл.

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$.

$26a^2-22a^2=4a^2$

$9a^2-12ay+4y^2=0$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{x+4}\sqrt{6-x}$. $|:\sqrt{6-x}$

$x=0$.

$24 \cdot 4 = 96$

$(3a-2y)^2=0$.

~~$a-b+4=2ab$~~

~~$a-b+4=$~~

$a^2+a+b^2-b+4=(a+b)^2$

$x=0$, $y=0$

$\Rightarrow 26a^2-22a=0$.

$26a^2-20ay+4y^2=0$.

$a=0$.

$9a^2-12a\cdot\frac{3a}{2}+4\cdot\frac{9a^2}{4}$

$\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{35}$.

$26a^2-22ax+5x^2$ $[0;4;6]$

$\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{6-x}}-1+\frac{4}{\sqrt{6-x}}=2\sqrt{x+4}$.

95 × 16

0 0

$\sqrt{x+4}-2\sqrt{x+4}\sqrt{6-x}-\sqrt{6-x}=-4$

$6-4=2$

1

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=2\sqrt{x+4}\sqrt{6-x}-4$ $\uparrow 2$.

1584 | 4
396 | 4
99 |

$x+4-2\sqrt{x+4}\sqrt{6-x}+6-x=4(x+4)(6-x)-16\sqrt{x+4}\sqrt{6-x}+16$.

$14\sqrt{x+4}\sqrt{6-x}=4(x+4)(6-x)+6$

100 $3\sqrt{11}$ $\uparrow 2=$

$D=400a^2-416a^2=-16a^2$.

$\sqrt{x+4}\sqrt{6-x}=t$. $y=$

26×16: 156 + 26 = 416

95×16: 570 + 95 = 1520

$14t=4t^2+6$. ...

$1520+64=1584$.

5

22×22: 44 + 44 = 484

130×4

$10-3\sqrt{11}$

~~1520 | 2~~

1584 | 2
792 | 2
396 | 2
198 | 2
99 | 9
11 | 11
$\varnothing$

4·3

$20-6\sqrt{11}$

$484a^2-520a^2$.

9 $9-2\cdot3\sqrt{11}+$

$24+2x-x^2=\frac{1}{4}$. $|\cdot 4$.

$\sqrt{5+6\sqrt{11}}\cdot\sqrt{5-6\sqrt{11}}$

$\frac{96}{4}=24$.

$96+8x-4x^2=1$.

$\sqrt{25-}$

$\frac{95}{4}$.

$4x^2-8x-96+1=0$.

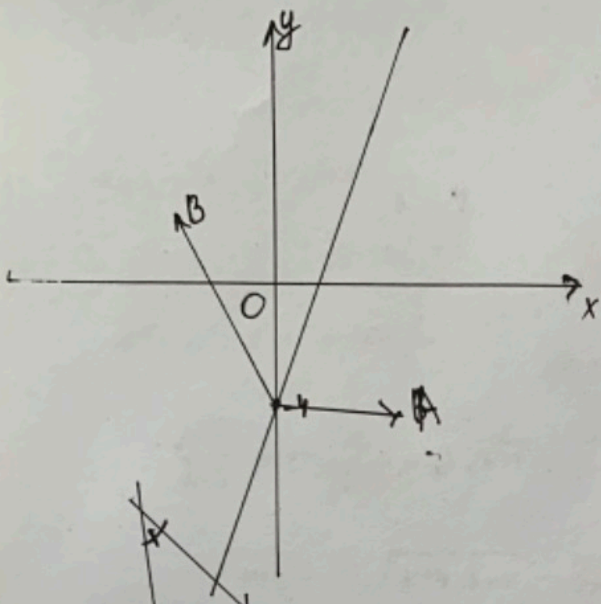
$4x^2-8x-95=0$.

$96-25=71$

$24+2\cdot(1-6\sqrt{11})-(1-6\sqrt{11})^2=$

$=24+2-\cancel{12\sqrt{11}}-1+\cancel{12\sqrt{11}}-66=$

211005631 (U378598 M1278458)



$\left(-a;\frac{1}{a}\right)$

$\cancel{-a<\frac{4}{3}}$

$a>0.$ $\cancel{\frac{1}{a}>-4}$ $-3a-\frac{1}{a}\geq 4.$

$\cancel{4y^2+8xy-20ay=-5x^2+22ax+26}$

$5x^2+3xy+4y^2$

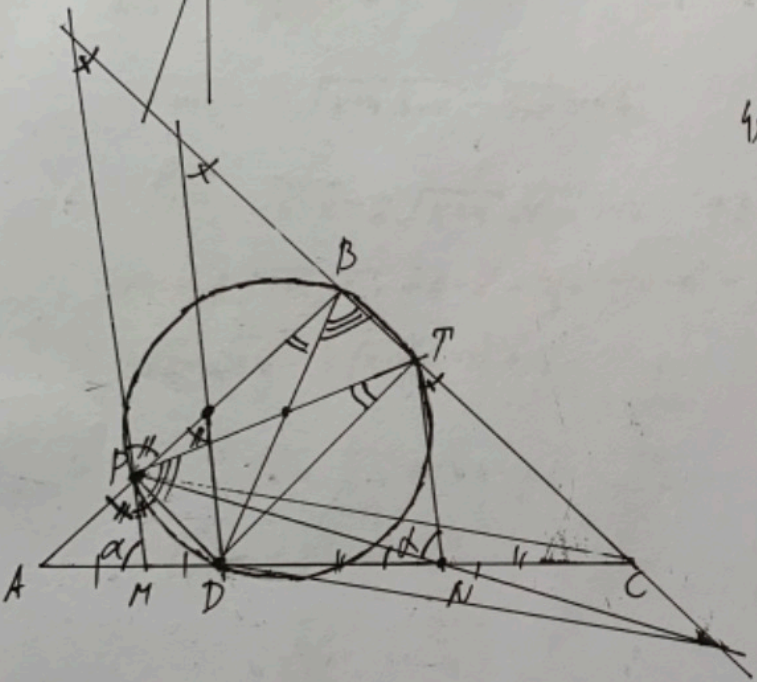
$3a+\frac{1}{a}<-4. \;|\cdot a$

$2y\cdot 2x\cdot 2$

$3a^2+1<-4a$

$4x^2+8xy+4y^2=(2x+2y)^2$

$\cancel{4(x+y)^2+x^2-22ax-20ay+26a^2}$.



$\angle MPD+\angle MDP=\alpha$

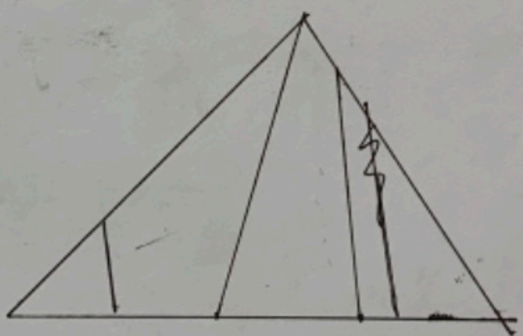
$\angle DTN+\angle$

$26a^2-22ax-20ay+5x^2+3xy+4y^2=0$

$3a^2-4a+1<0.$

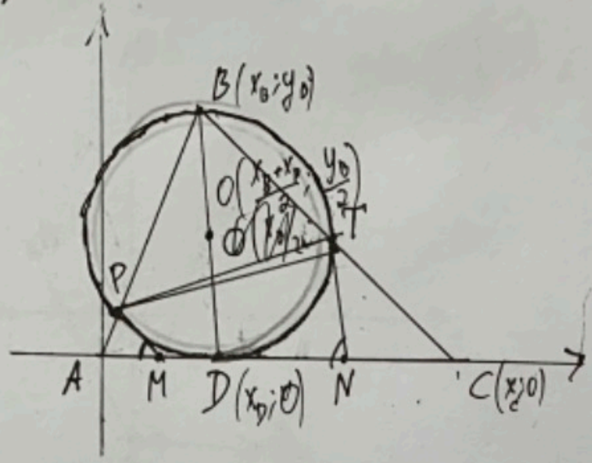
$a_1=1$

$a_2=\frac{1}{3}.$



Черновик.

Математика, 10кл

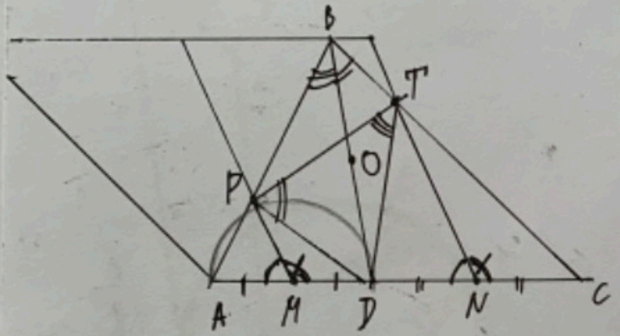


$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 7xy + 4y^2 = 0$ (1)

$ax^2 + 2a^2x + a^3 + 1 = ay.$

$x^2 + 2ax + a^2 + \frac{1}{a} = y.$

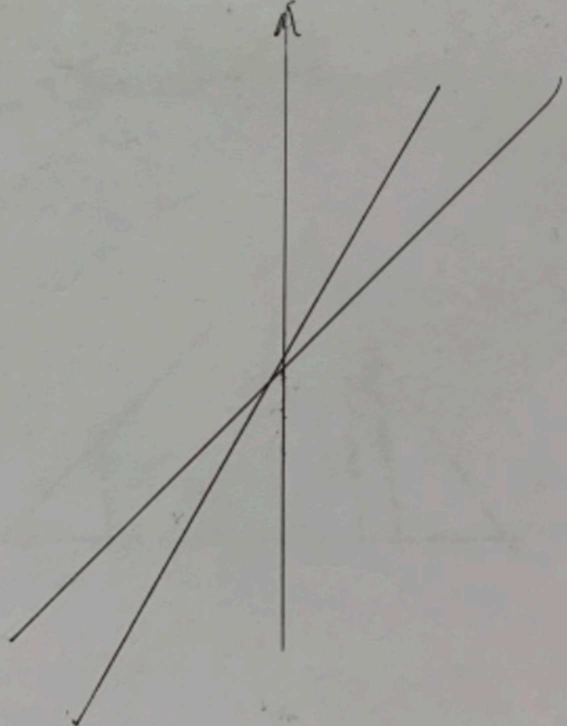
$(x+a)^2 + \frac{1}{a} = y.$



$(a; \frac{1}{a})$

1 $\leftarrow$

$(-a; \frac{1}{a})$



$y = 3x - 4.$

211005631 (U378598 M1278458)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005631**

ID профиля: **378598**

Вариант 9

№4.

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2. \\ x^4+2x^2y^2+y^4+x^2y^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2. \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5. \end{cases}$$

Введём подстановки $x^2+y^2=a$, $x^2y^2=b$.

$$\begin{cases} \frac{2}{a} + b = 2 \\ a^2 + b = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} + b = 2 \\ b = 5 - a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} + 5 - a^2 - 2 = 0 \\ b = 5 - a^2. \end{cases}$$

$$\frac{2+5a-a^3-2a}{a} = 0.$$

$$\begin{cases} a^3 - 3a - 2 = 0 \\ a \neq 0. \end{cases}$$

Подбором находим, что один из корней — -1:

$(-1)^3 - 3\cdot(-1) - 2 = -1+3-2=0.$ — верно.

$a^3-3a-2 = a^3-a^2-2a+a^2-a-2 = a(a^2-a-2)+a^2-a-2 = (a+1)(a^2-a-2).$

$(a+1)(a^2-a-2)=0$

$$\left[\begin{array}{l} a+1=0 \\ a^2-a-2=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a^2-a-2=0. \end{array}\right.$$

$D = 1 - 4\cdot(-2) = 9 > 0 \Rightarrow$ два корня.

$$a_{2,3} = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm3}{2}$$

$a_2 = \frac{1-3}{2} = -1$; $a_3 = \frac{1+3}{2} = 2.$

Получаем, что $a=-1$ или $a=2$.

а) $a=-1$

$b = 5-(-1)^2 = 4$

$$\begin{cases} x^2+y^2=-1 \\ x^2y^2=4 \end{cases}$$

I ур-ие системы решений не имеет ($x^2+y^2 \geq 0$ при всех x и y) $\Rightarrow$ система решений не имеет

б) $a=2$

$b = 5-2^2 = 1.$

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1. \end{cases}$$

см. лист 2 →

211005631 (U378598 M1278459)

Чистовик. Математика, 10 кл.

$$\begin{cases} y^2 = 2 - x^2 \\ x^2y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2(2-x^2) = 1 \\ y^2 = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - x^4 - 1 = 0 \\ y^2 = 2 - x^2. \end{cases}$$

$x^4 - 2x^2 + 1 = 0.$

$(x^2-1)^2 = 0.$

$(x-1)^2(x+1)^2 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x+1=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$$

а) $x_1 = -1$

$y^2 = 2-(-1)^2 = 1.$

$y = \pm\sqrt{1}$

$y_1 = 1; \quad y_2 = -1$

$\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$

б) $x_2 = 1$

$y^2 = 2 - 1^2 = 1$

$y = \pm\sqrt{1}$

$y_3 = 1 \qquad y_4 = -1$

$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$

Ответ: $(-1;-1); (-1;1); (1;-1); (1;1)$

211005631 (U378598 M1278459)

№5.

Прямая $y=x$ (обозначим её l_1) проходит через вершины $(0;0)$ и $(59;59)$, прямая $y=59-x$ (обозначим её l_2) проходит через вершины $(0;59)$ и $(59;0)$.

Тогда эти прямые являются диагоналями квадрата.

Внутри квадрата на каждой из прямых лежит 58 точек, причём точка пересечения прямых не является узлом. ($59-x=x \Rightarrow 2x=59 \Rightarrow x=\frac{59}{2}\notin \mathbb{Z}$)

Тогда первую точку (обозначим её A) можно выбрать любым из $58\cdot 2=116$ способов.

Прямые, параллельные координатным осям, проведённые через (·)A, пересекают прямую, на которой не лежит (·)A, в суммарно в 2 точках (по точке на прямую).

Причём, одна из этих точек (назовём её M) имеет абсциссу x_M, равную абсциссе A, а другая (назовём её N) — ординату y_N, равную ординате A. Тогда $0<x_M<59$, $0<y_N<59$.

Но все точки прямых, абсциссы или ординаты которых лежат в промежутке $(0;59)$, лежат внутри квадрата.

Но тогда получим, что $0<y_M<59$; $0<x_N<59$.

а) При $A\in l_1, M\in l_2, N\in l_2$, $y_M=59-x_M$. $x_N=59-y_N$.

$0<x_M<59 \Rightarrow -59<-x_M<0 \Rightarrow 0<59-x_M<59$

$0<y_M<59$

$0<y_N<59 \Rightarrow -59<-y_N<0 \Rightarrow 0<59-y_N<59 \Rightarrow 0<x_N<59$.

б) При $A\in l_2, M\in l_1, N\in l_1$, $x_M=y_M$, $x_N=y_N$

$0<y_M<59$, $0<x_N<59$.

Тогда (·)M, N лежат внутри квадрата.

Получаем, что число способов выбрать

см. лист 4 →

Чистовик

Математика, 10кл.

Вторую точку (обозначим её B) выберем не лежащей на прямых l_1 и l_2. (тогда нам не нужно будет исключать повторы)

Всего внутри квадрата лежит $58\cdot 58 = 3364$ точек, из них 116 лежит на прямых. Тогда для выбора остаётся $3364-116=3248$ точек.

Прямые, параллельные координатным осям и проходящие через (·)A, пересекают прямую, на которой (·)A не лежит в 2 точках суммарно (по 1 на каждую прямую). ~~Пусть~~ Одна из этих точек (назовём её M) имеет абсциссу x_M, равную абсциссе A, а другая (назовём её N) — ординату y_N, равную ординате A.

Из условия $0<x_M<59$, $0<y_N<59$. Тогда:

а) при $A\in l_1$, $M,N\in l_2$, откуда $y_M = 59-x_M$

$$0<x_M<59 \Rightarrow -59<-x_M<0 \Rightarrow 0<59-x_M<59$$
$$0<y_M<59.$$

$$y_N=59-x_N \Rightarrow x_N = 59-y_N$$
$$0<y_N<59 \Rightarrow -59<-y_N<0 \Rightarrow 0<59-y_N<59$$
$$0<x_N<59.$$

б) При $A\in l_2$ $M,N\in l_1$, откуда $y_M=x_M$, $y_N=x_N$

$0<y_M<59$, $0<y_N<59$.

Получаем, что точки M и N лежат внутри квадрата ⇒ их нужно исключить из подсчёта неподходящих точек.

Всего неподходящих точек $58\cdot 2-4=112$ (по 58 точек на каждой прямой минус общую точку A и 2 точки M и N, лежащие на прямых; точка A была посчитана дважды).

Всего способов выбрать вторую точку $3248-112=3136$.

Тогда число способов выбрать узлы, из кот. 1 лежит на прямой равно: ~~$116\cdot 3136 \neq 363776$~~ $116\cdot 3136 = 363776$.

см. лист 5 →

Чистовик.

Математика, 10 кл.

Теперь выберем вторую точку лежащей на какой-либо прямой. Это можно сделать $116-1-2=113$ способами. Тогда число способов выбрать (исключая точки A, M и N) узлы, лежащие на прямых, равно $\frac{116 \cdot 113}{2} = 58 \cdot 113 = 6554$. (дел. на 2 нужно, чтобы перестановки точек посчитать один раз)

Ответ равен ~~116~~ $363776+6554=370320$

Ответ: 370 320 способов.

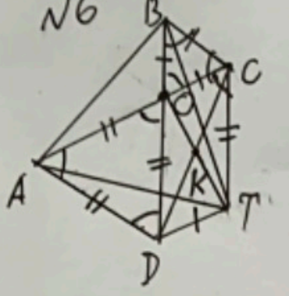
№6 см. на листе 6 →

Чистовик

Математика, 10кл.

Математика, 10кл.

№6



Дано:

а) ABCD – выпуклый 4-угольник

$AC \cap BD = (\cdot)O$.

ΔBOC, ΔAOD – правильные.

$(\cdot)K$ – середина CD

$(\cdot)T$ симметрична $(\cdot)O$ отн. $(\cdot)K$.

б) $BC = 3$, $AD = 7$

а) Доказать: ΔABT – правильный.

б) $\dfrac{S_{ADT}}{S_{ABCD}}$ – ?

Решение:

а) 1) В 4-угольнике CTDO диагонали OT и CD пересекаются в $(\cdot)K$, которая делит их пополам по условию. ($CK = KD$ т.к. $(\cdot)K$ середина CD, $OK = TK$ из симметрии).

Тогда OCTD – параллелограмм.

$\boxed{CT = OD \quad \cancel{OC=TD} \quad DT = OC. \quad \angle OCT = \angle ODT}$

2) Рассмотрим ΔADT и ΔBCT.

$BC = OC$ в правильном ΔBOC $\Rightarrow BC = DT$

$OC = DT$ из п.1

Аналогично $CT = AD$

$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT$

$\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT$, где $\angle BCO = \angle ADO = 60°$ из правильных ΔBOC и ΔAOD, $\angle OCT = \angle ODT$ из п.1.

Тогда $\angle BCT = \angle ADT$, и $\Delta ADT = \Delta BCT$ по I признаку равенства Δ.

$\boxed{AT = BT}$

3) Рассмотрим ΔBCT и ΔABO.

см. лист 7 →

Чистовик. Математика, 10кл.

~~ΔВО~~ $BO=BC$, т.к. ΔBOC — правильный.
~~AO=CT~~ из

$AO=OD$, т.к. ΔAOD — правильный. $\Rightarrow AO=CT$.
$OD=CT$ из п.1

$\angle BOA = 180° - \angle BOC = 180° - 60° = 120°$ ($\angle BOC = 60°$, т.к. ΔBOC - правильный)

~~ΔВСТ~~
$\angle OCT = \angle BOC = 60°$ как внутр. накрест лежащие углы при $BD \parallel CT$ (см. п. 1) и секущей OC.

$\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60° + 60° = 120°$ (см. п. 2)

$\angle BCT = \angle BOA$

Тогда $\Delta BCT = \Delta ABO$ по I призн. равенства Δ.

$\boxed{AB = BT}$

4) $AT = BT = AB$ (из п. 2 и 3), тогда ΔABT — правильный по определению.
ч. т. д.

б) 1) ~~S_{ABT}~~ В ΔABO по т. косинусов:

$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2 \cdot AO \cdot BO \cdot \cos AOB$.

$AO = AD = 7$. (т.к. ΔAOD и ΔBOC - правильные)
$BO = BC = 3$
$\angle AOB = 120°$ (см. п. а4)

$AB^2 = 7^2 + 3^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot \cos 120° = 49 + 9 + 42 \cdot \frac{1}{2} = 79$

$\boxed{AB^2 = 79}$

2) $S_{ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$ по формуле площади правильного Δ.

~~$S_{ABT} = \frac{\ldots}{4} = \frac{52\sqrt{3}+63}{4}$~~

~~$S_{ABT} = \frac{\ldots}{4}$~~

$\boxed{S_{ABT} = \frac{79\sqrt{3}}{4}}$

см. лист 8 →

211005631 (U378598 M1278459)

Чистовик

3) $S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{BOC} + S_{AOB} + S_{OCD}$.

$S_{AOD} = \frac{AD^2\sqrt{3}}{4} = \frac{7^2\sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$S_{BOC} = \frac{BC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

} по формуле площади правильного Δ

$S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO \cdot \sin AOB = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 \cdot \sin 120° = \frac{21\sqrt{3}}{4}$

$S_{COD} = \frac{1}{2} CO \cdot DO \cdot \sin COD = \frac{1}{2} AD \cdot BC \cdot \sin AOB$

($CO = BC$, $DO = AD$ в прав. Δ, $\angle AOB = \angle COD$ как вертикальные)

$S_{COD} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 \cdot \sin 120° = \frac{21\sqrt{3}}{4}$.

$S_{ABCD} = \frac{49\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{21\sqrt{3}}{4} + \frac{21\sqrt{3}}{4} = \frac{100\sqrt{3}}{4}$.

$\frac{S_{ADT}}{S_{ABCD}} = \frac{79\sqrt{3}}{4} : \frac{100\sqrt{3}}{4} = \frac{79}{100} = 0,79$

Ответ: 0,79

211005631 (U378598 M1278459)

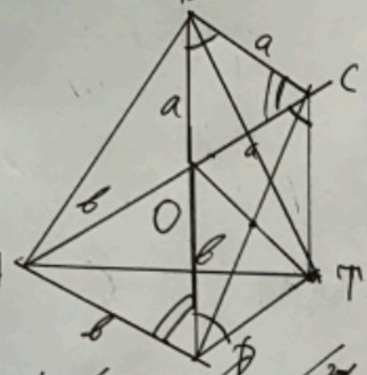
Черновик.

Математика, 10 кл.

Математика, 10 кл.

$2\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7} = \cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}.$

$2\cdot\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7} = \cos\frac{4\pi}{7}\cdot\left(2\cos\frac{3\pi}{7}+1\right)=$



$h = a\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$=\cos\frac{4\pi}{7}\cdot$

$\cdot\left(2\left(2\cos^2\frac{4\pi}{7}-1\right)+1\right)=$

$S=\frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$\left(2\left(\sqrt{2}(t\sqrt{2}-1)(t\sqrt{2}+1)-1\right)^2\right)$

$=\cos\frac{4\pi}{7}\cdot\left(4\cos^2\frac{4\pi}{7}-1\right)=$

$=4\cos^3\frac{4\pi}{7}-\cos\frac{4\pi}{7}.$

$\cancel{2\cos 2a\cos 3a = \cos 2a + \cos 3a}$

$2\cdot\cos\frac{3\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$

a^2+b^2+2ab

$\left(\left(\left(x\sqrt{2}-1\right)\left(x\sqrt{2}+1\right)-1\right)\sqrt{2}-1\right)\left(\left(\left(x\sqrt{2}-1\right)\left(x\sqrt{2}+1\right)-1\right)\right.$

$\cos\frac{12\pi}{7}+2\cos\frac{4\pi}{7}.$

$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

$\frac{(a^2+ab+b^2)\sqrt{3}}{4} : \frac{(a^2+b^2)\sqrt{3}}{4}+\frac{ab\sqrt{3}}{4}+\frac{ab\sqrt{3}}{4}.$

$\cos a+\cos 2a+\cos 3\alpha.$

$\cos\frac{2\pi}{7}+2\cos\frac{4\pi}{7}.$

$\cos 3a = \cos(6a+2a) = \cos 6a.$

$\cos 6\alpha = \cos\alpha.$

$\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+2ab+b^2} = 1-\frac{ab}{(a+b)^2}$

$\cancel{\cos 6\alpha + \cos 2a + \cos 3a}.$

$\cos 6a\cdot\cos 2a - \sin 6a\cdot\sin 2\alpha = \cos 6a.$

$2\cos^2 3a - 1 + \cos 2a + \cos 3a.$?

$\cos 6a(\cos 2a - 1) = \sin 6a\cdot\sin 2a.$

$3\cdot 7$

$\cos 8\alpha = \cos 6\alpha \pm \cos\alpha.$?

$\frac{21}{100}$

$\boxed{\cos\frac{4\pi}{7} = \cos\frac{6\pi}{7}}$

$\cos 8a = 2\cos^2 4a - 1 = 2(2\cos^2 2a-1)^2-1=$

$58+21\sqrt{3}$

$\frac{4\pi}{7}\to\frac{10\pi}{7}$

$(2t^2-1)$

2α

$=2(2(2(\cos$

$\left(\left(x\sqrt{2}-1\right)\left(x\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2}+1\right)^2-1$

$2\left(\left(x\sqrt{2}-1\right)\left(x\sqrt{2}+1\right)\sqrt{2}-1\right)^2$

$2\left(2\left(2\cos^2 a-1\right)^2-1\right)^2-1 = \cos\alpha$

$2\left(2\left(x\sqrt{2}-1\right)^2\left(x\sqrt{2}+1\right)^2-1\right)^2-1$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$2\left(2\left(2t^2-1\right)^2-1\right)^2-1 = t.$

$2\left(2\left(t\sqrt{2}-1\right)^2\left(t\sqrt{2}+1\right)^2-1\right)^2-1 = t.$

$2\left(2\left(4t^4-4t^2+1-1\right)^2-1\right)^2-1 = t$

$58+21$

$2\left(2\cdot 16\left(t^8-2t^6+t^4\right)-1\right)^2-1 = t.$

$2\left(32t^8-64t^6+32t^4-1\right)^2-1 = t.$

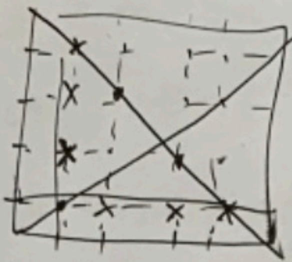
$2(32t^8-64t^6+32t^4$

211005631 (U378598 M1278459)

Черновик

Математика, 10кл.

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2. \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5. \end{cases}$$

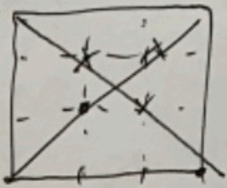


$\cancel{3}$.

$7 \cdot 8+$

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ (x^2+y^2)^2+x^2y^2=5. \end{cases}$$

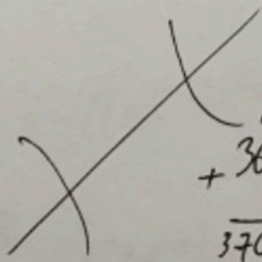
$4-4=0.$



$$\begin{cases} \frac{2}{a}+b=2 \\ a^2+b=5. \end{cases}$$

$x+y=a$

$xy=b.$



$$\begin{array}{r} 363776 \\ +\ \ 6554 \\ \hline 370320 \end{array}$$

$b=5-a^2.$

$\frac{2}{a}+5-a^2=2.$

$$\begin{array}{r} 113 \\ \times\ 58 \\ \hline 904 \\ 565 \\ \hline 6554 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times\ 58 \\ \hline 464 \\ +290 \\ \hline 3364 \end{array}$$

$\frac{2+5a-\cancel{a}^3-2a}{a}=0.$

$a^3-3a-2=0.$

$\pm1;\ \pm2.$

$(a+1)(a^2-a-2)=$

$=a^3-a^2-2a+a^2-a-2.$

?

$a^3-a-2a+2.$?

$(-1)^3+3-2$

$-1-2.$

$$\begin{array}{r} 3364 \\ -\ 116 \\ \hline 3248 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} a^3-3a-2 & a+1 \\ \cline{2-2} -\ a^3+a^2 & a^2-a-2 \\ \cline{1-1} \quad -a^2-3a-2 & \\ \quad -\ -a^2-a & \\ \cline{1-1} \qquad -2a-2 & \\ \qquad -\ -2a-2 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$1+$

$$\begin{array}{r} 3136 \\ \times\ 116 \\ \hline 18816 \\ +\ 3136 \\ 3136 \\ \hline 363776 \end{array}$$