Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005549**

ID профиля: **122471**

Вариант 9

Чистовик

№2 Решить уравнение $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$

Перенесём 4 в правую сторону равенства и возведём обе части в квадрат.

$$(x+4)+(6-x)-2\sqrt{24+2x-x^2}=4(24+2x-x^2)+16-16\sqrt{24+2x-x^2}$$

$$10-2\sqrt{24+2x-x^2}=4(24+2x-x^2)+16-16\sqrt{24+2x-x^2}$$

Пусть $\sqrt{24+2x-x^2}=t$

Тогда $10-2t=4t^2+16-16t$

$$4t^2-14t+6=0$$

$$t_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{100}}{8};\ t_1=3;\ t_2=\frac{1}{2}$$

1) $t=3$

$$24+2x-x^2=9$$

$$x^2-2x-15=0$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{2\pm 8}{2}=1\pm 4$$

$$x_1=5;\ x_2=-3$$

2) $t=\frac{1}{2}$

$$x^2-2x-24\tfrac{3}{4}=0$$

$$x_{3,4}=\frac{2\pm\sqrt{99}}{2}=1\pm\frac{\sqrt{99}}{2}$$

$$x_3=1+\frac{\sqrt{99}}{2};\ x_4=\cancel{\frac{1-\sqrt{99}}{2}}\ 1-\frac{\sqrt{99}}{2}$$

Заметим, что корни x_2 и x_3 – посторонние

Так как: $\sqrt{4-3}-\sqrt{6+3}+4\neq 6$ $(2\neq 6)$

и $\sqrt{5+\frac{\sqrt{99}}{2}}-\sqrt{5-\frac{\sqrt{99}}{2}}+4\neq 1$ $\left(\sqrt{5+\frac{\sqrt{99}}{2}}-\sqrt{5-\frac{\sqrt{99}}{2}}>0,\right.$ а $\left.(1-4)<0\right)$

Поэтому окончательно получим:

$$x_1=5;\ x_4=1-\frac{\sqrt{99}}{2}$$

Ответ: $x=5$ или $x=1-\frac{\sqrt{99}}{2}$

Чистовик

№3. Координата x вершины параболы $y=ax^2+bx+c$ определяется выражением $-\frac{b}{2a}$

В нашем случае $y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$ (мы имеем право поделить на a, так как если $a=0$, то это выражение превращается в $a^3+1=0$, что не является параболой.)

Поэтому $x_B=\frac{-2a}{2}=-a$; $y_B=a^2-2a^2+a^2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$

Координаты точки $B(-a;\frac{1}{a})$.

Теперь рассмотрим координаты точки A.

Так как выражением $26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$ задается единственная точка A, то это уравнение должно иметь одно решение относительно переменных x и y. Рассмотрим это выражение как уравнение относительно x. Условием того, что у этого уравнения будет один корень является равенство дискриминанта 0. $D=0=(8y-22a)^2-20(4y^2-20ay+26a^2)=$

$=64y^2+484a^2-352ay-80y^2-520a^2+400ay=-16y^2-36a^2+48ay=-(4y-6a)^2=0 \Rightarrow y_A=\frac{3}{2}a$; $x_A=\frac{22a-8y}{10}=\frac{10a}{10}=a$

Координаты точки $A(a;\frac{3}{2}a)$. Теперь наша задача сводится к решению совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y_A>3x_A-4\\ y_B<3x_B-4\end{cases}\\ \begin{cases}y_B>3x_B-4\\ y_A<3x_A-4\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{3}{2}a>3a-4\\ \frac{1}{a}<-3a-4\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{3}{2}a<3a-4\\ \frac{1}{a}>-3a-4\end{cases}\end{array}\right.$$

Решаем уравнение $\frac{3}{2}a=3a-4$ и $\frac{1}{a}=-3a-4$

Получим ответ: ~~$a\in(-1;-\frac{1}{3})\cup(\frac{8}{3};+\infty)$~~

Ответ: $a\in(-\infty;-1)\cup(-\frac{1}{3};0)\cup(\frac{8}{3};+\infty)$.

Черновик

$4 = \frac{9}{2}a$ $\quad -\frac{4}{3} = \frac{8}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{4}{3}$

$a = \frac{8}{9}$

При $a \in (-\infty; \frac{8}{9})$ $y > 3x - 4$ выше пр.

При $a \in (\frac{8}{9}; +\infty)$ ниже прямой

$\frac{1}{a} = -3a - 4$

$1 = -3a^2 - 4a$

$3a^2 + 4a + 1 = 0$

$D = 16 - 12 = 4$

$a = \frac{-4 \pm 2}{6}$ $\quad a_1 = -1$ $\quad a_2 = -\frac{1}{3}$

при

$a \in (-1; -\frac{1}{3}) \cup (0; +\infty)$

$\frac{3}{2}a = 3a - 4$

$4 = \frac{3}{2}a$ $\quad a = \frac{8}{3}$

при $a \in (\frac{8}{3}; +\infty)$ т. A ниже

при $a \in (-\infty; \frac{8}{3})$ т. A выше

$1 = -3a^2 - 4a$

$3a^2 + 4a + 1 = 0$

$D = \cancel{16a}\ 16 - 12 = 4$

$a = \frac{-4 \pm 2}{6}$ $\quad a_1 = -1$ $\quad a_2 = -\frac{1}{3}$

~~при $a \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$ т. B выше~~

~~при $a \in (-1; -\frac{1}{3})$ т B ниже~~

~~отв~~

Отв: $(-1; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{8}{3} + \infty)$

5

при $a \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; 0)$ т. B. ниже

при $a \in (-1; -\frac{1}{3})$ $(-\frac{1}{3}; -1)$ $\cup (0; +\infty)$ т B. выше

$\frac{1}{a} + 3a + 4 > 0$

$\frac{3a^2 + 4a + 1}{a} > 0$ $\quad \frac{(a+1)(a+\frac{1}{3})}{a} > 0$ $\quad (-\frac{1}{3} + \infty)$

выполн. на $+\infty$

Черновик

$(2x+2y)^2 + x^2 + 26a^2 - 22ax - 20ay = 0$

$\sqrt{x+4} + \sqrt{6-x} \geq -4$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} + \frac{1}{2\sqrt{6-x}} \neq 0$

$-\sqrt{10} \geq -4$

$1 - \frac{\sqrt{99}}{2}$

$\sqrt{5 + \frac{\sqrt{99}}{2}} - \sqrt{5 + \frac{\sqrt{99}}{2}} + 4 = 1$

$-3 =$

$9 = 5 + \frac{\sqrt{99}}{2} - 5 + \frac{\sqrt{99}}{2} - 2\sqrt{25 - \frac{99}{4}} =$

$1 - \frac{\sqrt{99}}{2}$

$y > 3x - 4$

$\sqrt{5 - \frac{\sqrt{99}}{2}} - \sqrt{5 + \frac{\sqrt{99}}{2}}$

$5 - \frac{\sqrt{99}}{2} + 5 + \frac{\sqrt{99}}{2} - 2\sqrt{25 - \frac{99}{4}}$

$1 - 3$

$9 = 9$

$400ay - 352ay =$

$= 48ay$

$1 - 3 + 4 = 1$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 22 \\ \hline 32 \\ 32\ \ \\ \hline 352 \end{array}$

$6 = 7 - 1$

$6 = 1 - 3 + 4$

$D = 0 = 64y^2 + 484a^2 - 2 \cdot 8 \cdot 22ay - 4 \cdot 5(4y^2 + 20ay + 26a^2)$

$0 = -16y^2 - 36a^2 + 48ay = -(4y + 6a)^2 = 0$

$\boxed{y = -\frac{3}{2}a}$ $\quad x = \frac{-8y + 22a}{10} = a$

$A\left(-\frac{3}{2}a; -\frac{3}{2}a\right)$

$B\left(-a; \frac{1}{a}\right)$

$\begin{cases} -\frac{3}{2}a > 3a - 4 \\ \frac{1}{a} < \frac{3}{a} - 4 \end{cases}$

$-\frac{3}{2}a = 3a - 4$

211005549 (U122471 M1277344)

Черновик

$x^2-2x-24=0$

$(x-6)(x+4)=0$

$x-6=a$

$x+4=b$

$\frac{1}{2\sqrt{x+4}}+\frac{1}{2\sqrt{6-x}}>0$

$24+2x-x^2=9$

$x^2-2x-15=0$

$D=4+60=64$

$x_{1,2}=\frac{2\pm 8}{2}$

$x_1=5$

$x_2=-3$

$24+2x-x^2=\frac{1}{4}$

$x^2-2x-23\frac{3}{4}=0$

$4+92+3=99$

$\frac{2\pm\sqrt{99}}{2}$

$\frac{1}{2\sqrt{x+4}}+\frac{1}{2\sqrt{6-x}}$

$6x+24-x^2-4x=24+2x-x^2$

$\sqrt{5-\frac{\sqrt{99}}{2}}-\sqrt{5+\frac{\sqrt{99}}{2}}>0$

$\sqrt{5-\frac{\sqrt{99}}{2}}-\sqrt{5+\frac{\sqrt{99}}{2}}<\sqrt{10}$

т.: $x-1=t$

$\sqrt{t+5}+\sqrt{t-5}+4=\sqrt{25-t^2}$

$t+5+t-5+2\sqrt{t^2-25}=25-t^2+16-8\sqrt{25-t^2}$

$t^2+2t+41$

$\frac{2-2x}{\sqrt{24+2x-x^2}}$

$x+4+6-x-2\sqrt{24+2x-x^2}=16+4t^2$

$\boxed{\begin{matrix}x\geq -4\\ x<+6\end{matrix}}$

$6x+24-4x-x^2$

$1-\frac{\sqrt{99}}{2}$

$x+4+6-x-2\sqrt{24+2x-x^2}=$

$4-\sqrt{10}$

$=16+4(24+2x-x^2)+16\sqrt{24+2x-x^2}$

$10-2t=16+4t^2-8t \quad |:2$

$5-t=8+2t^2-4t$

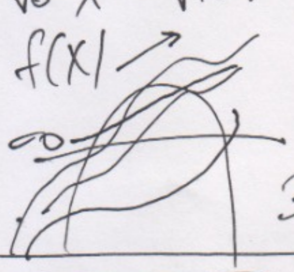
$2t^2-3t+3=0$

$D=9-4\cdot 2\cdot 3$

$25+\frac{\sqrt{99}}{2}$

$-\sqrt{6-x}=\sqrt{x+4}$

$f(x)$



$4t^2+6=6t$

$3-1+4=6=6$

$\cancel{x}+4+6-\cancel{x}-2\sqrt{24+2x-x^2}=4(24+2x-x^2)+16-8\sqrt{24+2x-x^2}$

t^2

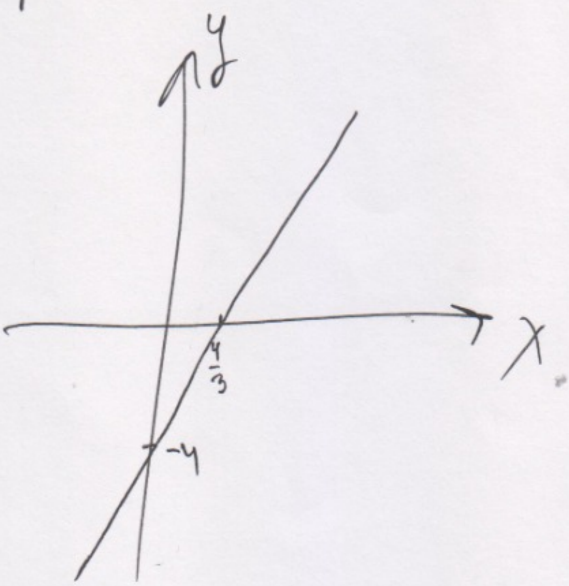
$10-2t=4t^2+16-8t$

$4t^2-14t+6=0$

$D=196-4\cdot 4\cdot 6=196-96=100$

$t_{1,2}=\frac{14\pm 10}{8}$ $\quad t_1=2 \quad t_2=\frac{3}{4}\ 3$

Черновик



$ay = ax^2 + 2a^2x + a^3 + 1$

$y = x^2 + 2ax + a^2 + \frac{1}{a}$

$x_b = \frac{-2a}{2} = -a$

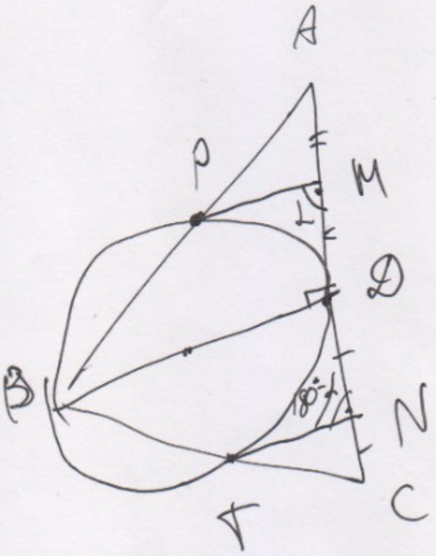
$y(x_b) = a^2 - 2a^2 + a^2 + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$

$\boxed{B\left(-a; \frac{1}{a}\right)}$

$x = \frac{-8y + 22a \pm \sqrt{64y^2 + 484a^2}}{10}$

$\frac{1}{a}$ $\quad -3a + 4$

$\cancel{5x^2}$



$PM \parallel TN$

$8xy = 2 \cdot 4 \cdot 1$

$(4x^2 + 8xy + 4y^2)$

$(2x+2y)^2 + (x^2 - 2ax + a^2) -$
$- 20a(x+y) + 25a^2$

$26 = 25 + 1$

$4 = 4 + 0$

$5 = 4 + 1$

$4(x+y)^2 + (x-a)^2 + 25a^2$
$- 20a(x+y)$

$(x+y)(4x+4y-20a) + (x-a)^2 + 25a^2 = 0$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005549**

ID профиля: **122471**

Вариант 9

Чистовик

№4. $\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$

Замена: $t=x^2+y^2$; $u=x^2y^2$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=t^2-2u$

$\begin{cases} \frac{2}{t}+u=2 \\ t^2+u=5 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2+ut=2t \\ u=5-t^2 \end{cases}$

Подставим u в первое уравнение системы

$2+5t-t^3=2t$

$t^3-3t-2=0.$

Заметим, что $t_1=-1$ является корнем уравнение. Значит t^3-3t-2 делится на $t+1$

$$\begin{array}{r|l} t^3-3t-2 & t+1 \\ \hline -(t^3+t^2) & t^2-t-2 \\ -t^2-3t & \\ -(-t^2-t) & \\ -2t-2 & \\ -(-2t-2) & \\ 0 & \end{array}$$

$t^2-t-2=0$

$t_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$, $t_2=2$; $t_3=-1$

так как $t=x^2+y^2>0$ нам подходит только $t=2$

Тогда $u=1$

$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^4+1=2x^2 \\ y^2=\frac{1}{x^2} \end{cases}$

$x^4-2x^2+1=0$

$x^2=\frac{2\pm0}{2}=1 \Longrightarrow x=\pm1$

При $x=1$ $y=1$ или $y=-1$

При $x=-1$ $y=1$ или $y=-1$

Ответ: $(x;y)=(1;1)$; $(1,-1)$; $(-1;-1)$; $(-1;1)$

211005549 (U122471 M1277345)

Чистовик

№5. Зафиксируем один из выбранных узлов в точке (1;58) (она лежит на прямой $y=59-x$).

Найдем ~~сколько способов~~ ~~найдется~~ сколькими способами можно выбрать второй узел. Внутри квадрата находится 58^2 узлов. При этом один из них мы уже выбрали. Значит, осталось 58^2-1 свободных узлов. Также нам нельзя выбирать узлы с такими же x и y-координатами, что и у выбранного узла. Значит нам нельзя выбирать еще $57\cdot2$ узлов (по 57 на горизонтали и вертикали). Значит, мы можем выбрать второй узел

$$58^2-1-57\cdot2=(58+1)(58-1)-57\cdot2=57(59-2)=57^2$$

Сдвинемся в точку (2;57). Приводя, аналогичные рассуждения получим, что мы можем выбрать 2 узел 57^2 способами. Но надо учесть, что комбинацию (1;58) и (2;57) мы выбирали в прошлый раз, и значит учли её 2 раза. Значит способов выбрать 2 узел в этой точке будет 57^2-1. В точке (3;56) их будет 57^2-2. Если просуммировать по 58 точкам лежащим на прямой $y=59-x$ внутри квадрата получим: $58\cdot57^2-(1+2+3+...+57)=$

$$=58\cdot57\left(57-\frac{1}{2}\right)=113\cdot57\cdot29$$

Теперь расположим точку на прямой $y=x$ (сначала в точке (1;1)). Приводя аналогичные рассуждение, что и для точек на прямой $y=59-x$, получим, что количество способов выбрать второй узел в точке (1;1) равно 57^2, для точки (2;2) 57^2-1. Но мы забываем про то, что когда мы

Чистовик

двигали точку по прямой $y=59-x$ такие комбинации как $(1;1)$ и $(2;57)$, $(1;1)$ и $(3;56)$, $(1;1)$ и $(4;55)$ уже были учтены (для каждой точки на прямой $y=x$ уже учтено 57 способов)

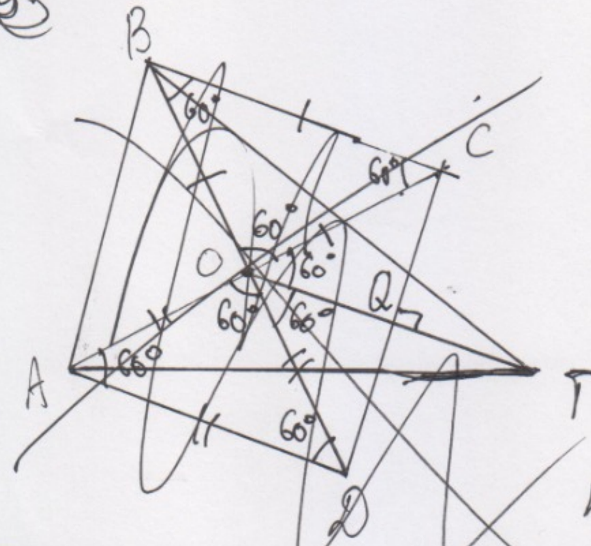
То есть из количества способов $113\cdot57\cdot29$, которое мы получали для точек на прямой $y=59-x$ мы должны вычесть $58\cdot57$ способов.

Тогда суммарное кол-во способов равно:

$$2\cdot113\cdot57\cdot29-58\cdot57=57(58\cdot113-58)=57\cdot58\cdot112=370272$$

Ответ: 370272.

~~Чистовик~~ Черновик



Решение: а) $\angle OAD = \angle BCO = 60°$ Тогда $AD \parallel BC$. Рассмотрим $\triangle COD$ и $\triangle AOB$. $\angle COD = \angle BOA = 120°$ $BO = CO$ и $AO = OD$ (так как $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – правильные) Тогда $\triangle COD = \triangle AOB$ (по 2 сторонам и углу между ними). Тогда $AB = CD$.

~~Но из параллельности BC и AD следует, что AB ∥ CD (так как AB = CD). Доказать это можно так. Так как расстояние между прямыми постоянно и равно x · sin α, где x – длина отрезка~~

По условию точка Q – середина CD. Но так O симметрична Т относительно CD, то $QO \perp CD$. Тогда QO является высотой и медианой в $\triangle COD$. Значит, $CO = OD$. Тогда $AD = BC$. Из равенства углов COQ и DOQ 30° мы понимаем, что ABCD – прямоугольник. Из прямоугольного $\triangle QOD$: $QO = \frac{1}{2} OT = OD \sin 30° = \frac{1}{2} OD$. $OT = OD$.

Пусть $BO = OC = AO = OD = BC = AD = OT = x$.

Тогда, по теореме косинусов из $\triangle BOT$:

$BT^2 = BO^2 + OT^2 - 2 \cdot \cos 120° \, BO \cdot OT = 3x^2$

$BT = \sqrt{3}x$. Аналогично $AT = \sqrt{3}x$. Из $\triangle AOB$

$AB = AO^2 + OB^2 - 2 \cdot AO \cdot OB \cdot \cos 120° = 3x^2$

$AB = \sqrt{3}x$. Тогда, $AB = AT = BT$. $\triangle ABT$ – правильный.

б) $\times$ 112, 57, 784, 560, 6384

$\times$ 6384, 58, 51072, 31920, 370272

370272

Черновик

$x^2+y^2=t$

$x^2y^2=u$

$\cancel{t=-1}$ $u=4$

$u=1$

или $t=2$

$x^2+y^2=-1$

$x^2+y^2=2$

$x^2y^2=1$

$\frac{1}{y^2}+y^2=2$

$1+y^4=2y^2$

$y^4-2y^2+1=0$

$\times \begin{array}{r}58\\57\end{array}$

$\frac{114-1}{2}=$

$=113\cdot57\cdot29$

$\frac{2}{t}+u=2$

$t^2-2u+3u=5$

$\boxed{t^2+u=5}$ $u=5-t^2$

$\frac{2}{t}+u=2$

$\boxed{2+ut=2t}$ $57\cdot58$

$2+5t-t^3=2t$

$t^3-3t-2=0$

заметим, что $t=-1$ – корень

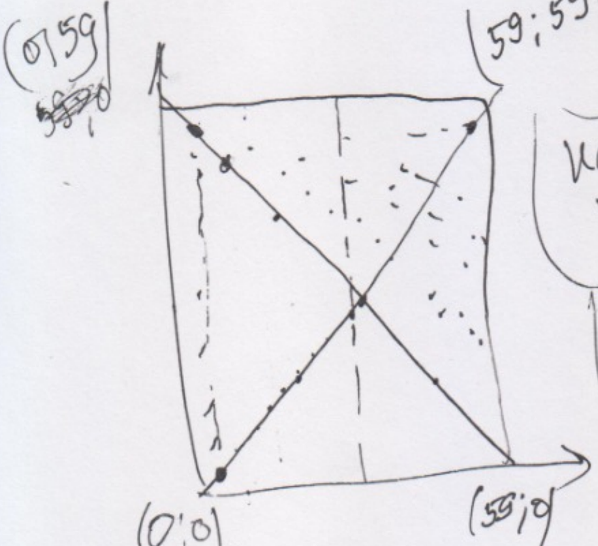
$$\begin{array}{l|l} t^3-3t-2 & t+1 \\ \hline -\,t^3+t^2 & t^2-t-2 \\ \quad -t^2-3t & \\ \quad -\,-t^2-t & \\ \qquad -2t-2 & \\ \qquad -\,-2t-2 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

t^2-t-2

$t_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$

$t_2=-1$

$t_3=2$



На кажд. пр. 58 точек

57^2

57^2-1

57^2-2

57^2-3

$\vdots$

57^2-57

$56\cdot57$

$56\cdot57-1$

$56\cdot57-2$

$56\cdot57-3$

$\vdots$

$56\cdot57-57$

$\frac{57\cdot58}{2}$

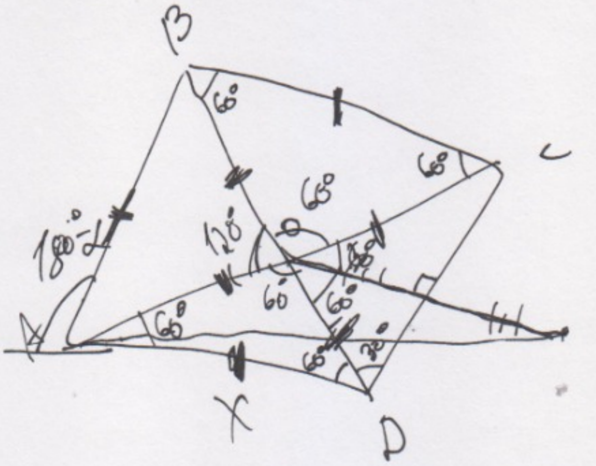
58

$$\begin{array}{r} \times\ 112 \\ 57 \\ \hline 784 \\ 560\ \ \\ \hline 6384 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 6384 \\ 58 \\ \hline 51072 \\ 31920\ \ \\ \hline 370272 \end{array}$$

211005549 (U122471 M1277345)

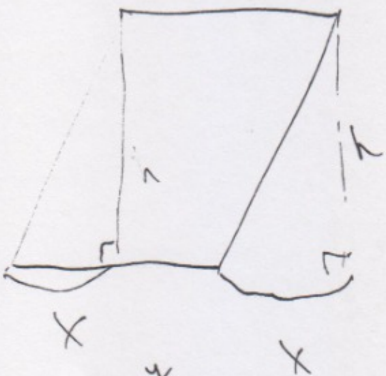
Черновик

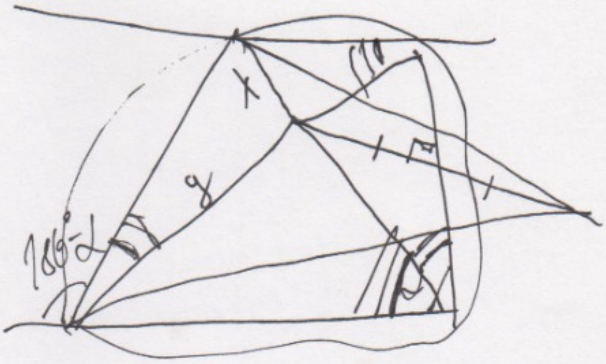


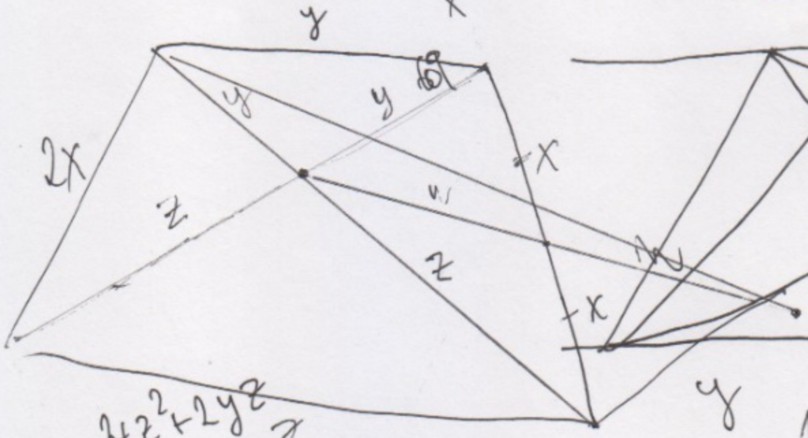
$$DC = 4x^2 + x^2 + 4x^2 \cdot \cos 120^\circ$$

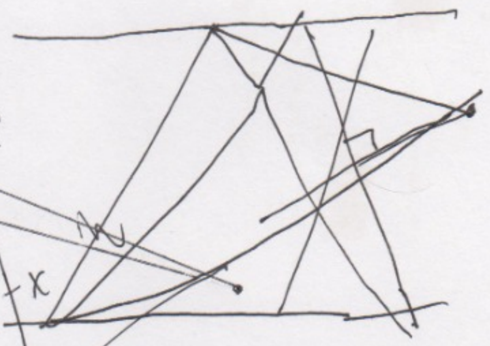
$$y^2 = x^2 + x^2 + x^2 =$$

$$y = \sqrt{3}x$$







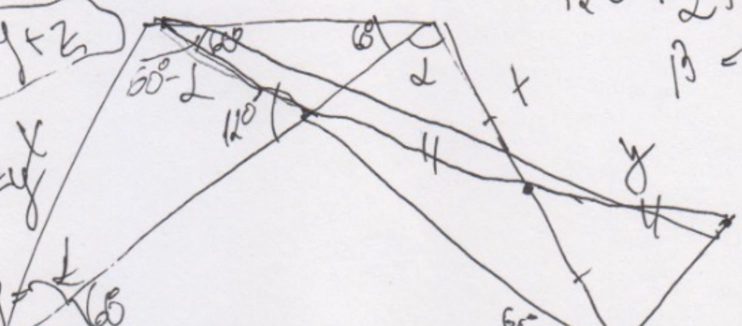


$$120^\circ + \alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\beta = 60^\circ - \alpha$$

$$16x^2 = y^2 + z^2 + 2yz$$

$$\boxed{4x = y + z}$$



$$16x^2 = 4y^2 + 4z^2 \cancel{+ 4zy}$$

$$4y^2 + 4z^2 + 4zy = y^2 + z^2 + 2yz$$

$$3y^2 \cancel{+ 3z^2 + 4}$$

$$3y^2 + 3z^2 + 2yz = 0$$

$$3x^2 + 3 + 2x = 0$$

$$D = \cancel{4 - 1}$$

211005549 (U122471 M1277345)