Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

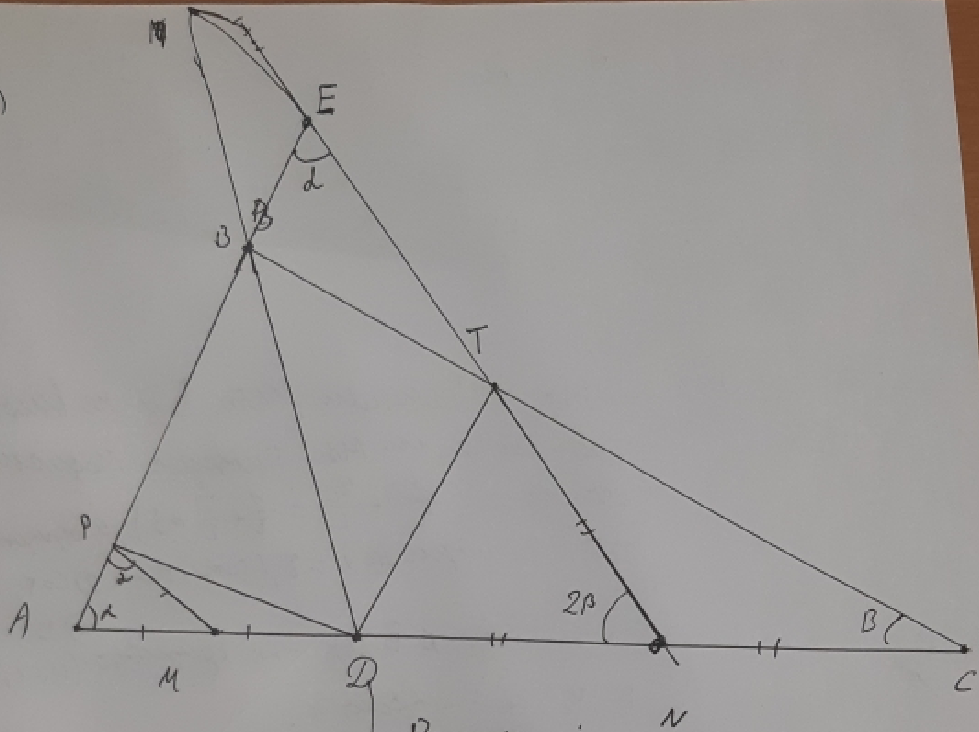
Шифр: **211005446**

ID профиля: **852505**

Вариант 9

№ 1.

а)



Дано:

$D \in AC$

Окр. K - с диаметром $BD = \omega_1$

$\omega_1 \cap AB = P$

$\omega_1 \cap BC = T$

M - ср. AD

N - ср. DC

$PM \parallel TN$.

Найти

$\angle ABC = ?$

1. Решение:

Д.п.: Продлим TN и ~~BD~~ AB - до пересечения в точке E.

Также скажем, что $\angle BAC = \alpha$

$\angle BCA = \beta$

2. $\angle BPD = \angle BTD = 90°$ (опираются на диаметр ω_1)

$\Downarrow$

$\triangle APD$ и $\triangle DTC$ - прямоугольные.

$\Downarrow$

Раз M и N - середины гипотенуз $\Rightarrow$

$\Rightarrow PM$ и TN - Медианы $\Rightarrow PM = \frac{1}{2} AD$

$TN = \frac{1}{2} DC$.

3. Раз $TN = NC$, а $\angle TCN = \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow TND = 2\beta$.

4. Раз $PM = AM$, а $\angle PAM = \alpha \Rightarrow \angle APM = \alpha \Rightarrow$ и учитывая что $PM \parallel NT$ $\angle AEN = 2\alpha$

5. Из 3 и 4. в $\triangle AEN$ $2\alpha+2\beta=180^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = 180^\circ-\alpha-\beta=90^\circ$.

Ответ: $\angle ABC=90^\circ$.

б)

Дополнительно Дано:

$MP=\frac{1}{2}$

$NT=\frac{5}{2}$

$BD=2$

Найти: $S(\triangle ABC)$

Решение:

~~ДЛЯ~~ 6. Заметим, что BD - не высота, так-как если мы проведем медиану, равную 3 $\left(\frac{AD}{2}+\frac{DC}{2}=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3\right)$, и отрезок DF (F - середина AC) $=2$, (Так, как $DC=5$, $FC=3 \Rightarrow DF=2$), то прямоуг. $\triangle BDF$ - не существует $(4+4\neq 9)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ BD - не высота.

7. Д.П. проведем высоту. $BH=h$, тогда

$HD=x=\sqrt{4-h^2}$.

8. Из пропорциональн. отрезков в прямоуг. $\triangle$ мы знаем, что $h^2=(AD-x)(DC+x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4-x^2=(\overset{1}{AD}-x)(\overset{5}{DC}+x)$

$4-x^2=5-4x-x^2$

$4x=1$

$x=\frac{1}{4} \overset{7}{\Rightarrow} \frac{1}{4}=\sqrt{4-h^2} \Rightarrow \frac{1}{16}=4-h^2$

$h^2=4-\frac{1}{16} \Rightarrow h=\sqrt{\frac{63}{16}}=\frac{3\sqrt{7}}{4}$

$\sqrt{\frac{~~400~~}{64}}=h=\frac{15}{16}$

9. $S(\triangle ABC)=$

$=\frac{1}{2}\cdot h\cdot AC=$

$=\frac{3\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6=$

$=\frac{9\sqrt{7}}{4}$

Ответ: $S(\triangle ABC)=\frac{9\sqrt{7}}{4}$.

№2.

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

Посмотрим на $D(\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4)$: $x \in [-4; 6]$

$D(2\sqrt{24+2x-x^2})$: $x \in [-4; 6]$

Об. о-ти определения совпадают.

Обозначим:

$\sqrt{x+4} = t_1$

$\sqrt{6-x} = t_2$

Тогда наше уравнение примет вид.

$t_1 - t_2 + 4 = -(t_1 - t_2)^2 + t_1^2 + t_2^2$

Заметим, что $t_1^2 + t_2^2 = 10$ $(x+4+6-x=10)$

$\Downarrow$

$t_1 - t_2 + 4 = -(t_1 - t_2)^2 + 10$

Заменим $t_1 - t_2 = f$

Тогда: $f + 4 = -f^2 + 10 \Rightarrow f^2 + f - 6 = 0$

$f_1 = 2$

$f_2 = -3$

$\boxed{f_1 = 2}$ $\boxed{f_2 = -3.}$

I случай

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2$

$10 - 2\sqrt{24+2x-x^2} = 4$

$6 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

$9 = 24 + 2x - x^2$

$15 + 2x - x^2$

$\boxed{\begin{matrix} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{matrix}}$

II случай

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = \cancel{4} - 3.$

$10 - 2\sqrt{24+2x-x^2} = 9$

$2\sqrt{24+2x-x^2} = 1$

$24 + 2x - x^2 = \frac{1}{4}$

$-4x^2 + 8x + 95 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{-4 \pm 6\sqrt{11}}{-4}$

$x_4 = \frac{-4 \pm 6\sqrt{11}}{-4}$

$\frac{1 \mp 3\sqrt{11}}{2}$

Ответ: $x_1 = 5$ $\quad x_3 = 1 + \frac{3\sqrt{11}}{2}$

$x_2 = -3$ $\quad x_4 = 1 - \frac{3\sqrt{11}}{2}$

Черновик.

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

ОДЗ: $x \in [-4; 6]$

$24+2x-x^2$

$\frac{D}{4} = 1 + 24 = 25$

$x = 1 \pm \sqrt{25}$

$6; -4.$

$\overset{t_1}{\sqrt{x+4}} - \overset{t_2}{\sqrt{6-x}} + 4 = 2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$\sqrt{x+4}\,(1-\sqrt{}$

$t_1 - t_2 + 4 = 2t_1t_2.$

$\frac{D}{4} = 16 + 95 \cdot 4 =$

$t_1 - t_2 + 4 = (t_1+t_2)^2 - t_1^2 - t_2^2$

$= 4(99)$

$t_1 - t_2 + 4 = -(t_1-t_2)^2 + t_1^2 + t_2^2$

$+\begin{array}{r}360\\36\end{array}$

$t_1 - t_2 + 4 = (t_1-t_2)^2 + 10$

$\sqrt{396}$

$t_1 - t_2 = f$

$6\sqrt{11}$

$f^2 - f + 6 = 0;$

$-(-1 \pm \sqrt{})$

4

черновик.

$\frac{D}{4} = 16 -$

$-4x^2 + 8x + 95 = 0$

$\frac{D}{4} = 16 + 95 \cdot 4 = \quad 4(95 \cdot 4)$

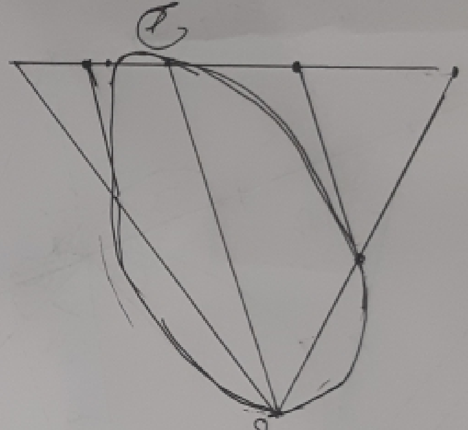
$360 + 20 + 10. = (1996$

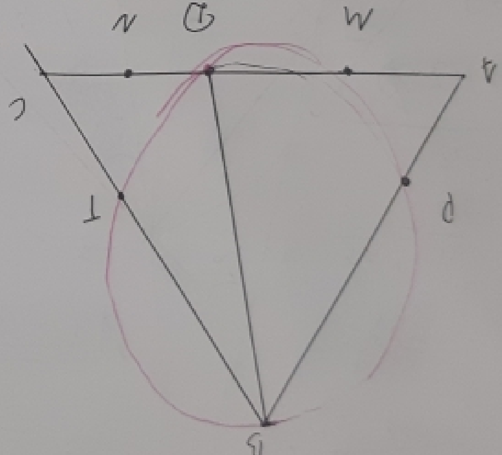
$$4 - x^2 = 5 - 4x - x^2$$

$$4 = 5 - 4x$$

$$4x = 1$$

$$x = \frac{1}{4}$$





черновик

a+

$MP = \frac{1}{2}$

$NT = \frac{5}{2}$

$BD = 2$

$\sqrt{(\cancel{2}\,1 - \sqrt{4-h^2})(5+\sqrt{4-h^2})} = h^2$

$\sqrt{4-h^2} = t$

$g = 4 + x^2$

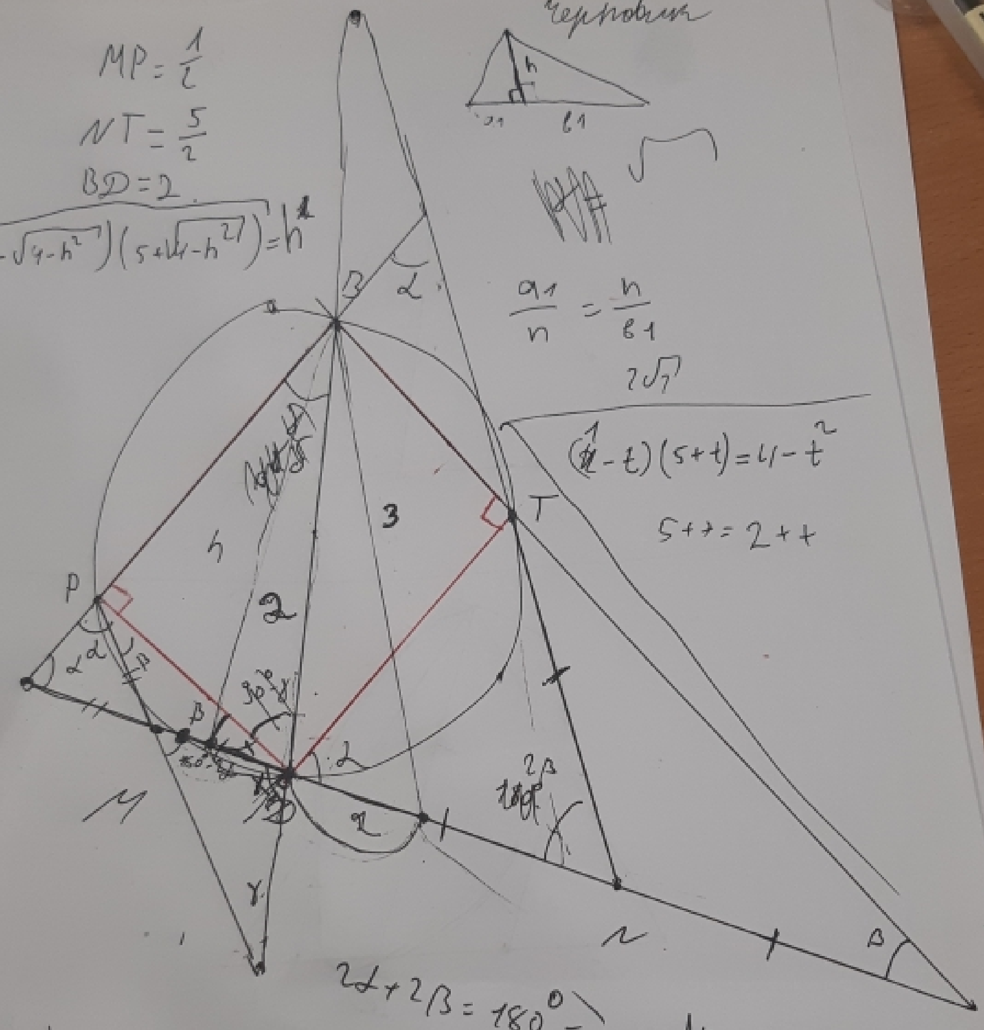
$x = \sqrt{5}$

$\frac{a_1}{h} = \frac{h}{b_1}$

$2\sqrt{7}$

$(\cancel{2}\,1 - t)(5+t) = 4 - t^2$

$5 + t = 2 + t$



$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$

$180^\circ - 2\alpha$

$\delta + \alpha + \gamma = 2\alpha.$

$x + \gamma = 2\alpha$

$\delta + \gamma = \alpha.$

$\delta \quad \delta = \beta.$

$x + \gamma = \cancel{2\beta}\ 180^\circ - 2\beta.$

$90^\circ - \alpha = \beta$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005446**

ID профиля: **852505**

Вариант 9

№4

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$$x^4+y^4+3x^2y^2 - \frac{2}{x^2+y^2} - x^2y^2 = 3.$$

$$(x^2+y^2)^2 = 3 + \frac{2}{x^2+y^2}$$

Пусть: $x^2+y^2 = t \Rightarrow t^2 = 3 + \dfrac{2}{t}$

$$\frac{t^3-3t-2}{t} = 0$$

$$\frac{(t-2)(t+1)^2}{t} = 0$$

$$\Downarrow$$

$\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -1 \end{array}\right.$, но $x^2+y^2 > 0 \Rightarrow t=-1$ не подходит

$$\Downarrow$$

$$x^2+y^2 = 2$$

Запишем первое уравнение в системе, подставив $x^2+y^2=2$

$$1 + x^2y^2 = 2 \Rightarrow x^2y^2 = 1.$$

Сделаем замену $x^2 = a$, $y^2 = b$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 1 \end{cases} \quad \boxed{\begin{matrix} a = 1 \\ b = 1. \end{matrix}}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1. \end{cases}$$

Проверка:

$$\begin{cases} \frac{2}{2} + 1 = 2 \\ 1 + 1 + 3 = 5 \end{cases} - \begin{cases} 2 = 2 \\ 5 = 5 \end{cases}$$

Значит: Есть 4 пары корней

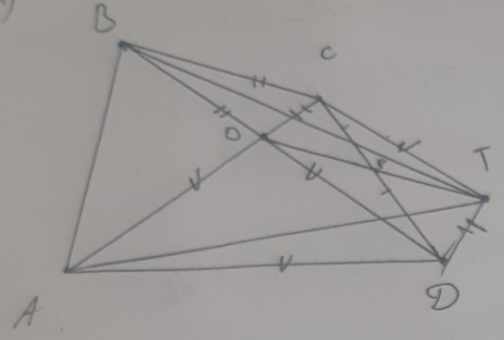
$(1; 1)$; $(-1; -1)$; $(-1; 1)$; $(1; -1)$

Ответ: $(-1; -1)$; $(-1; 1)$; $(1; -1)$; $(1; 1)$

211005446 (U852505 M1274299)

№6.

а)



Дано:
ABCD - выпуклый четырехугольник.
$AC \cap BD = O$
F - середина CD.
T симметр. O отн. F.
$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ - равност.
Доказать:
ABT - равносторонн.

решение:

1. Д.П.: DT, CT, OT.

2. OCTD - пар-мм, по призн. ($CD \cap OT$; F - сер. OT и CD)

⇓ пар.-мм

TD = OC = CB = OB. ($\triangle OCB$ - прав.)

CT = OD = AO = AD (пар.-мм; $\triangle AOD$ равност.)

3. $\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT = 60^\circ + 180^\circ - \angle COD = 60^\circ + \angle COB = 120^\circ$

$\angle BOA = 180^\circ - \angle BOC = 120^\circ$

$\angle ADT = \angle TDO + \angle ODA = 120^\circ$ (Аналогично $\angle BCT$)

4. Из 3. и 2. $\triangle ADT = \triangle BCT = \triangle BOA$ (по СУС)

5. Из 4 $AB = AT = BT \Rightarrow \triangle ABT$ - равност. ч. т. д.

211005446 (U852505 M1274299)

б) Дополнительно Дано:

$BC = 3$

$AD = 7$

Найти:

$$\frac{S(\triangle ABT)}{S(ABCD)}$$

Решение:

6. По теореме косинусов в $\triangle BOA$

$$AB^2 = BO^2 + AO^2 - 2\cos 120^\circ \cdot AO \cdot BO$$

$$AB^2 = 9 + 49 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 21$$

$$AB^2 = 79 \Rightarrow AB = \sqrt{79}$$

7.

$$S(ABCD) = S(\triangle ADB) + S(\triangle DBC)$$

8.

$$S(\triangle ADB) = \frac{AD \cdot BD \cdot \sin \angle BDC}{2} = \frac{7 \cdot 10 \cdot \sin 60^\circ}{2}$$

$$S(\triangle DBC) = \frac{BC \cdot BD \cdot \sin \angle DBC}{2} = \frac{3 \cdot 10 \cdot \sin 60^\circ}{2}$$

$$S(ABCD) = \frac{100 \sin 60^\circ}{2}.$$

9.

$$S(\triangle ABC) = \frac{AB \cdot AT \cdot \sin 60^\circ}{2}$$

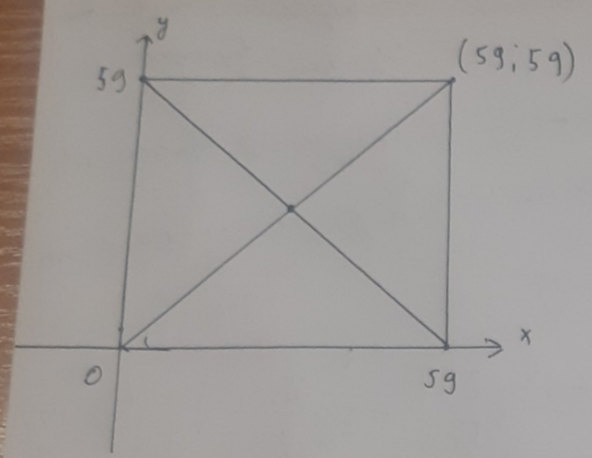
10.

$$\frac{S(\triangle ABT)}{S(ABCD)} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} : \frac{100 \sin 60^\circ}{2} =$$

$$= \frac{79}{100}.$$

Ответ: $\frac{S(\triangle ABT)}{S(ABCD)} = \frac{79}{100}$

№5



Прямые $y = x$ и $y = 59 - x$ – это диагонали квадрата.

Условие, что узел не лежит на прямой ∥ оси координат, ⇒ "что она в столбц x и y координаты должны отличаться.
~~На $x_?$, также, скажем, что пусть точки не~~;

~~Пусть x_i (x~~; $i \in \mathbb{Z}$ и $i \in [1; 58]$

$(i; i)$ – это i решение $y = x$ (точки T_i). В пару к t_i в пару есть выбор, из

(57×57 – вариантов. (57 – выборов x координат.

57 – выбор y координаты.)

Но я посчитал варианты, что точки на прямой $y = x$ по два раза. ⇒ надо вычесть C_{58}^2 (каждую пару точек на диагонали)

Теперь также посчитаем, но теперь, что первая ~~точка~~ у. Мы ~~бы~~ выбераем на прямой $y = 59 - x$. На ней варинты ~~их~~ считаются аналогично: $58 \cdot 57 \cdot 57 - C_{58}^{2}$. А теперь я посчитал каждую пару, что одна точка на $y = x$, а други $y = 59 - x$, по два раза.

⇓

общее кол-во варинтов $2 \cdot (58 \cdot 57^2 - C_{58}^{2}) - 58^2$.

Пояснение Еще-раз.

$58 \cdot 57^2 - C_{58}^{2}$ – это мы выбераем ~~точку~~ ~~на~~ ~~пару~~ точку по конкретной прямой (для каждой точки 57^2 – пар, а точек 58) ~~к~~

~~А вычетаем C_{58}^{2}, потому-что ~~ ~~точки~~ ~~пары~~ ~~каждой~~ ~~прямой~~

А вычетаем C_{58}^{2}, потому-что пары точек на прямой а мы пощит по два раза.

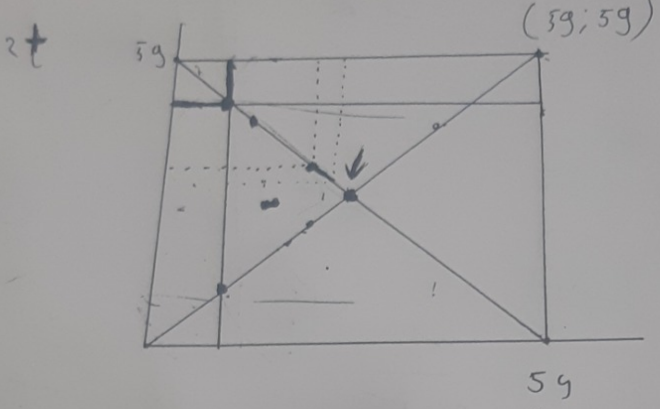
У нас две прямые поэтому умножаем на два.

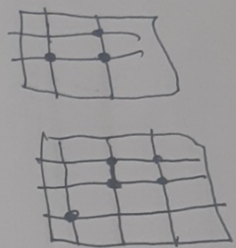
А вычетаем $58 \cdot 58$ – потому-что пары когда одна $\in y = x$, а другая $\in y = 59 - x$ мы посчитали дважды.

Ответ: $2 \cdot (58 \cdot 57^2 - C_{58}^{2}) - 58^2 =$

$= 373520$.

Черновик





$y = x$

$y = 59 - x$

$x = 59 - x$

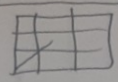
58 C^2_{58}

C

58 58

58 58

$\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$. $y = \cancel{x}$ Черновик



$\frac{3+\sqrt{17}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{17}}{2} = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

$= \frac{9-17}{4} = \boxed{-8}$ $\frac{1}{3+\sqrt{17}}$

$5 \cdot \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) - t_2^2 = 20$

$t_2 = \cancel{20}\ \frac{15+5\sqrt{17}}{2} - 20$

$t_2^2 = \frac{15+5\sqrt{17}-40}{2}$

$t_2 = \frac{5\sqrt{17}-25}{2}$.

$(t-2)(t+1)^2$

$t=-2$
$t=-1$

$\frac{t^3-3t-2}{t} = 0$.

$t^3-3t-2=0$.

$t=2 \quad 8-6-2$

$\cancel{t-2}$

$t^3-3t-2 \mid t-2$
$t^3-2t^2 \mid t^2+2t+1$
$2t^2-3t-2$
$2t^2-4t$
$t-2$

$1+x^2y^2=2 \quad a+b=2$
$x^2 \cdot y^2 = 1 \quad ab=1 \quad b=1;\ a=1$.

$a = \frac{1}{b} \quad \frac{1}{b}+b=2$.

211005446 (U852505 M1274299)

~~3.1~~ Черновик.

№4

$$\begin{cases}\frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2.\\ x^4+y^4+3x^2y^2=5\end{cases}$$

$x^2+y^2=t_1$

$x^2-y^2=t_2$

$$\begin{cases}\frac{2}{t_1}+\frac{t_1^2-t_2^2}{4}=2\\ \frac{t_1^2+t_2^2}{2}+\frac{3(t_1^2-t_2^2)}{4}=5.\end{cases}$$

$2t_1^2+2t_2^2+3t_1^2-3t_2^2=20$

$5t_1^2-t_2^2=20$

$\boxed{\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}.}$

$\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}.$

$(x^2+y^2)^2=3+\frac{2}{x^2+y^2}.$

$t^2=3+\frac{2}{t}$

$t-\frac{2}{t}-3=0$

$\frac{t^2-3t-2}{t}=0$

~~$t\pm\sqrt{11}$~~

$t=9+8$

$\frac{3\pm4}{2}=\frac{7}{2},\ \cancel{3}\ -\frac{1}{2}.$

$\frac{49}{4}-\frac{21}{2}-2.$

$\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-2.$

211005446 (U852505 M1274299)

черновик.

$2\cdot\left(58\cdot 57^2-\frac{58!}{56!\cdot 2!}\right)$

$2\cdot\left(58\cdot 57^2-\frac{58\cdot 57}{2}\right)-58^2$

$2\cdot 58\cdot 57^2-58\cdot 57-58^2$

$58(2\cdot 57^2-57-58)$

$58(57\cdot 114-58)$

$$\begin{array}{r} 114 \\ \cdot\ 57 \\ \hline 798 \\ 570 \end{array}$$

$6498-58=6440\cdot 58$

$$\begin{array}{r} 644 \\ \cdot\ 60 \\ \hline 38640 \end{array}$$

1288

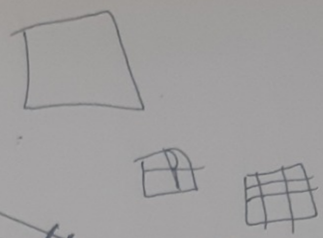
$$\begin{array}{r} 38640 \\ 1288 \\ \hline 373520 \end{array}$$

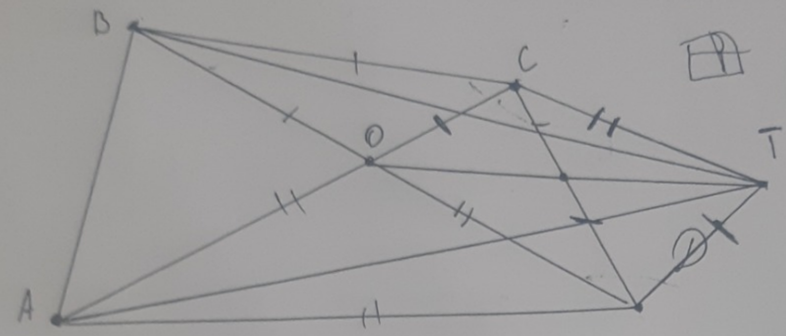
$$\begin{array}{r} 644 \\ \cdot\ 58 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 58 \\ \cdot\ 644 \end{array}$$

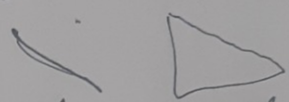
$$\begin{array}{r} 644 \\ \cdot\ 58 \\ \hline 5152 \\ 3220 \\ \hline 37352 0 \end{array}$$

Черновик

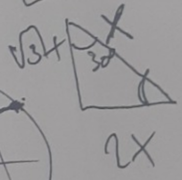




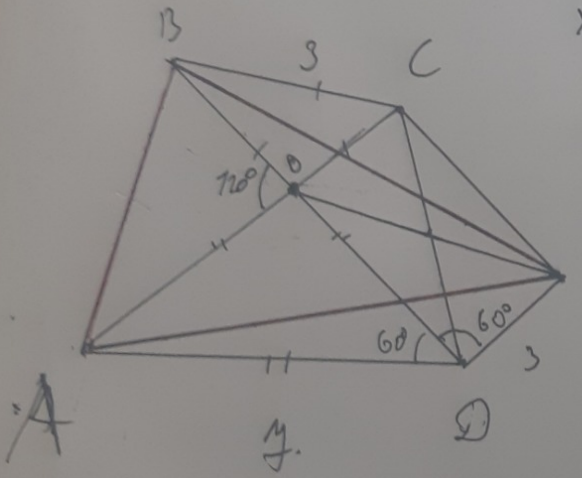
$\cos \cancel{120^\circ}\ 60^\circ =$



$x^2 = 49 + 9 + 2 \cdot 21 \cdot \frac{1}{2}$



$x^2 = 49 + 9 + 21$



$x^2 = 79$

$x = \boxed{\sqrt{79}}$

$\frac{\sin 60^\circ}{2}$