Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005380**

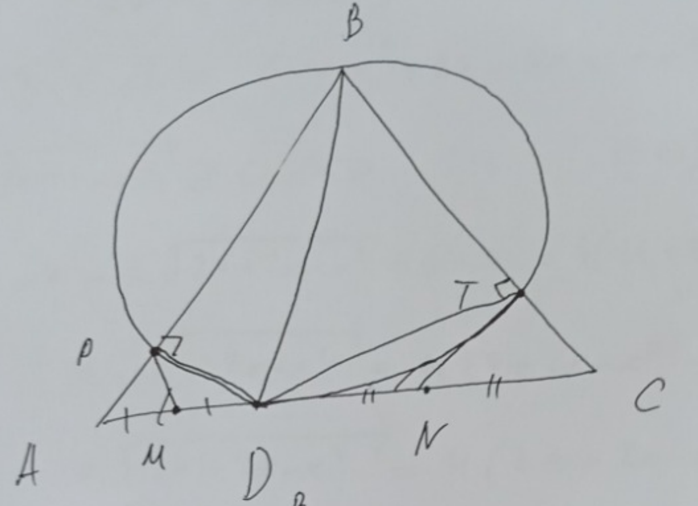
ID профиля: **381585**

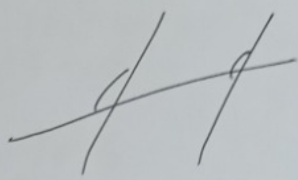
Вариант 9

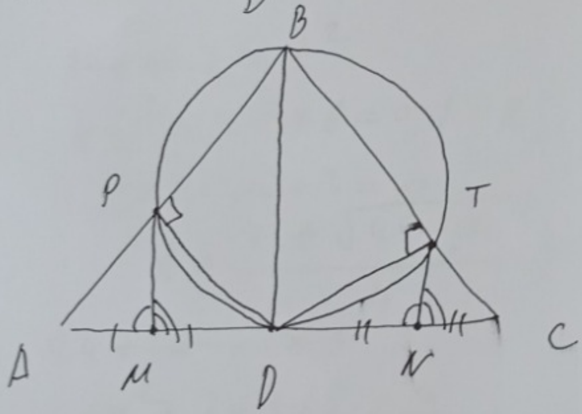
Черновик

$PM \parallel TN$

$\angle ABC - ?$







211005380 (U381585 M1274530)

чер Черновик

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

$a = a$

$a-3 = a-3$

$(x+4)(6-x) = 6x - x^2 + 24 - 4x = -x^2 + 24 + 2x$

$\sqrt{24+2x-x^2} \geq 0 \Rightarrow$

$(x+4)(6-x)$

$x+4 - 2\sqrt{24+2x-x^2} + 6 - x = 4(24+2x-x^2) + 16 - 16\sqrt{24+2x-x^2}$

$14\sqrt{24+2x-x^2} = 4(24+2x-x^2) + 16 - 10$

$14\sqrt{24+2x-x^2} = 4(24+2x-x^2) + 6$

$24+2x-x^2 = t^2$

$4t^2 - 14t + 6 = 0 \mid : 2$

$2t^2 - 7t + 3 = 0$

$t = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} =$ $t_1 = \frac{7+5}{4} = 3$

$t_2 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}$

$24 + 2x - x^2 = 9$

$-x^2 + 2x + 15 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{-2} =$ $\boxed{\begin{matrix} x_1 = -3 \\ x_2 = 5 \end{matrix}}$

$-\begin{array}{r} 24 \\ 9 \\ \hline 15 \end{array}$ 8

$-\begin{array}{r} 24 \\ 9 \\ \hline 15 \end{array}$

$24 + 2x - x^2 = \frac{1}{4}$

$\times\begin{array}{r} 24 \\ 4 \\ \hline 96 \end{array}$ $\frac{95}{4}$ $-a = -a$

$a^2 = a^2$

$99 = 3\sqrt{11}$

$x \in \{-4; 6\}$

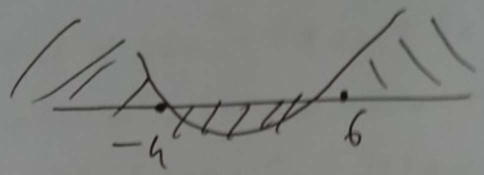
черновик

$x+4 \geq 0$ $x \geq -4$

$6-x \geq 0$ $x \leq 6$

$24+2x-x^2 \geq 0$

~~$24+2x-x^2$~~ $(x+4)(6-x) \geq 0$



3

Черновик

$26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0 \Rightarrow y=x^2+2ax+(a^2+\frac{1}{a})$

$3x-y=4$

$y=3x-4$

$4y^2+y(8x-20a)+26a^2-22ax+5x^2=0$

$D=64x^2+400a^2-320ax-22ax+26a^2+5x^2=$

$=69x^2+426a^2-342ax$

$5x^2+x(8y-22a)-20ay+4y^2+26a^2=0$

$D=64y^2+484a^2-352ay-20ay+4y^2+26a^2=$

$=68y^2+510a^2-372ay$

$D=\sqrt{68y^2+510a^2-372ay}$

$68y^2+510a^2-372ay=0 \quad |:2$

$34y^2+255a^2-186ay=0$

$26a^2+a(-22x-20y)+5x^2+8xy+4y^2=0$

$D=484x^2+400y^2-440xy+5x^2+8xy+4y^2=$

$=489x^2+404y^2-432xy$

$22 \times 22 = 44 + 44\,\_ = 484$

$44 \times 8 = 352$

$69 \,|\, 3 = 23$

$22 \times 20 = 440$

$44 \times 8 = 352$

22×3

$26 \times 5 = 130$

$\times 4 = 520$

$352 \,|\, 12 = 6$

72, 32

$10:10$

$520 - 484 = 136$

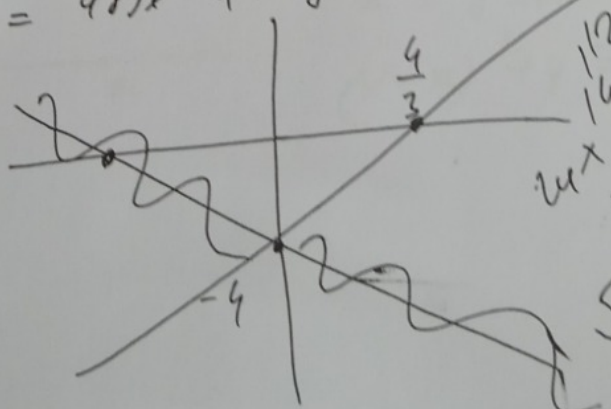
12, 144

$24 \times 4 = 576$

$\sqrt{18}a$

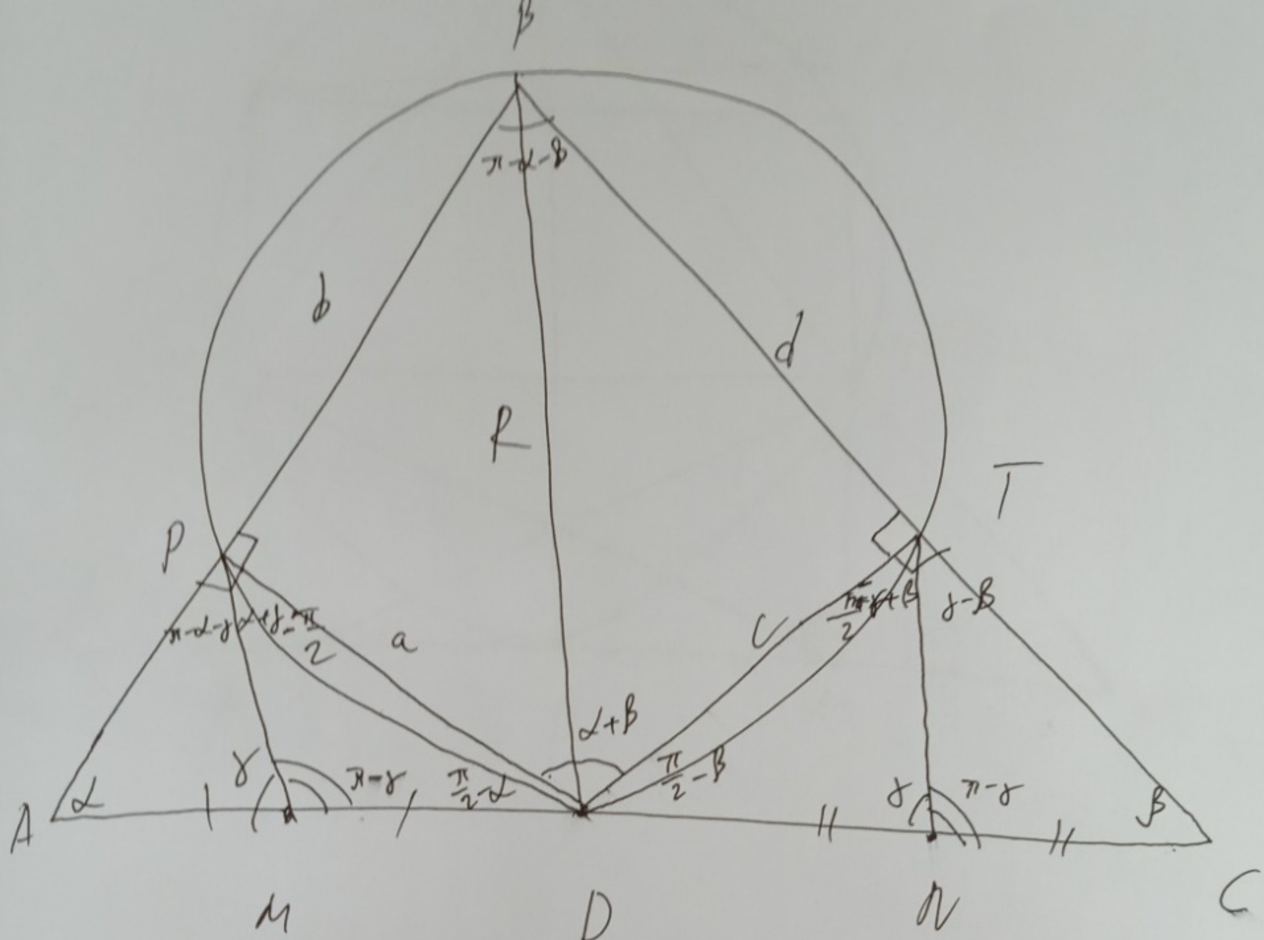
$\sqrt{8}y$

$32 \times 18 = 256 + 32 = 576$



4

черновик

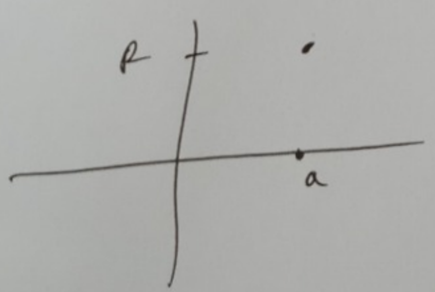


$$\frac{\pi}{2} - \pi + \alpha + \gamma = \alpha + \gamma - \frac{\pi}{2}$$

$$\pi - \gamma + \beta + x = \pi$$

$$x = \gamma - \beta$$

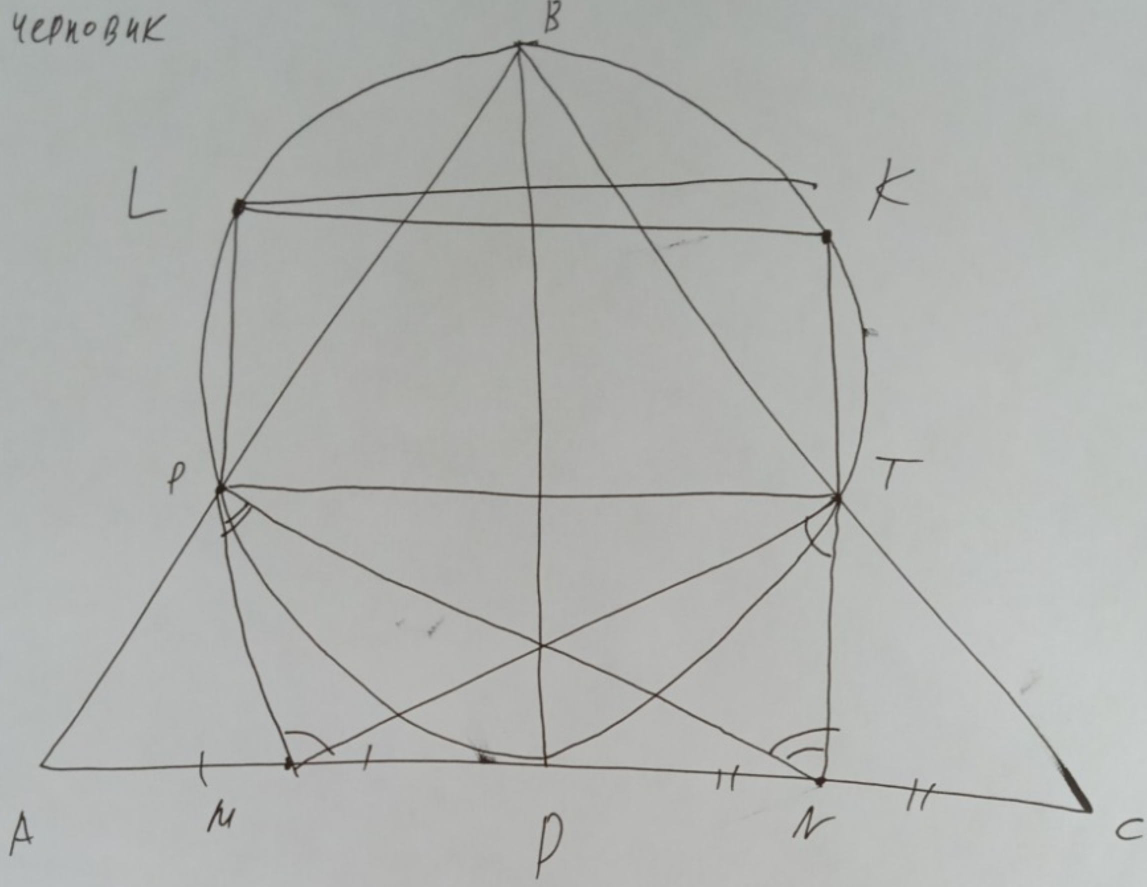
$$\frac{\pi}{2} - \quad \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$$



$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$(x-a)^2 + y^2 = R^2$$

черновик



211005380 (U381585 M1274530)

Чистовик

2 задача

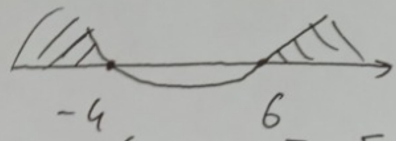
$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x}\,\cancel{4} + \cancel{x}4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

ОДЗ:

$x+4 \geq 0$ $\quad$ $6-x \geq 0$ $\quad$ $24+2x-x^2 \geq 0$

$x \geq -4$ $\quad$ $x \leq 6$ $\quad$ теорема Виета $\rightarrow (x+4)(6-x) \geq 0$

$x \in [-4;+\infty)$ $\quad$ $x \in (-\infty;6]$



$x \in [-4;6]$ $\quad$ $x \in (-\infty;-4] \cup [6;+\infty)$

$\cancel{x \in [-4]; [6]}$

$\cancel{x_{1,2} = -4; 6}$

$x \in \{-4;6\}$

Подставим:

$\sqrt{-4+4} - \sqrt{6-(-4)} + 4 = 2\sqrt{(-4+4)\cdot(6-(-4))}$

$4 - \sqrt{10} = 0$

Ошибка $\Rightarrow x \neq -4$

$\sqrt{6+4} - \sqrt{6-6} + 4 = 2\cdot\sqrt{(6+4)\cdot(6-6)}$

$\sqrt{10} + 4 = 0$

Ошибка $\Rightarrow x \neq 6$

Единственно возможные значения x, при котором подкоренные значения неотрицательны, не подошли $\Rightarrow$ корней нет.

Ответ: корней нет.

Чистовик

3 задача

$$26a^2 - 22ax - 20ay + 5x^2 + 8xy + 4y^2 = 0$$

$$ax^2 + 2a^2x - ay + a^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x^2 + 2ax + a^2 + \frac{1}{a}$$

$$3x - y = 4 \Leftrightarrow y = 3x - 4$$

Координаты вершины: $x_0 = \frac{-2a}{2} = -a$, $y_b = (-a)^2 + 2a\cdot(-a) + a^2 + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$

$$\cancel{5x^2 + x(8y - 22a) + 4y^2 + 26a^2 = 0}$$

$$5x^2 + x(8y - 22a) + 4y^2 - 20ay + 26a^2 = 0$$

A - точка => x единственен => D = 0

$$D = \cancel{64y^2 + 484a^2 - 352ay + 80y^2 - 400ay + 520a^2 =}$$

$$= \cancel{144y^2 - 752ay}\ 64y^2 + 484a^2 - 352ay - 80y^2 + 400ay - 520a^2 = 48ay - 36a^2 - 16y^2 = 0$$

$$-8y^2 + 24ay - 18a^2 = 0 \mid :(-2)$$

$$\cancel{D = (24a)^2 - 18\cdot 8\cdot 4a^2 = 0}$$

$$\cancel{y_{1,2} =}\quad 4y^2 - 12ay + 9a^2 = 0$$

$$(2y - 3a)^2 = 0$$

$$2y - 3a = 0$$

$$2y = 3a$$

$$y_A = \frac{3}{2}a$$

$$5x^2 + x(12a - 22a) + 4\cdot\frac{9}{4}a^2 - 10\cdot 3a^2 + 26a^2 = 0$$

$$5x^2 - 10ax + 9a^2 - 30a^2 + 26a^2 = 0$$

$$5x^2 - 10ax + 5a^2 = 0 \mid :5$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

$$(x - a)^2 = 0$$

$$x_A = a$$

2стр

Чистовик

Координаты (·) A: $x = a$, $y = \frac{3}{2}a$

Координаты (·) B: $x = -a$, $y = \frac{1}{a}$

прямая $y = 3x - 4$

2 варианта:

1) (·) A выше прямой, а (·) B ниже

$\frac{3}{2}a > 3x - 4$, подставим:

$\frac{3}{2}a > 3a - 4$

$4 > \frac{3}{2}a$

$a < \frac{8}{3}$

$\frac{1}{a} < 3x - 4$

$\frac{1}{a} < -3a - 4$

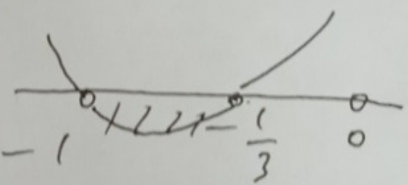
$3a + \frac{1}{a} < -4$

$\frac{3a^2+4a+1}{a} < 0$

$D = 16 - 12 = 4$

$\sqrt{D} = \pm 2$

$a_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \left[\begin{array}{l} a_1 = -\frac{1}{3} \\ a_2 = -1 \end{array}\right.$



$a \in (-1; -\frac{1}{3})$

$a \in (-1; -\frac{1}{3})$

2) (·) B выше прямой, (·) A ниже

$\frac{1}{a} > 3x - 4$

$\frac{1}{a} > -3a - 4$

$\frac{3a^2+4a+1}{a} > 0$

$a \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; 0) \cup (0; +\infty)$

$\frac{3}{2}a < 3x - 4$

$\frac{3}{2}a < 3a - 4$

$4 < \frac{3}{2}a$

$\frac{8}{3} < a$

$a \in (\frac{8}{3}; +\infty)$

Ответ: $a \in (-1; -\frac{1}{3}) \cup (\frac{8}{3}; +\infty)$.

3 стр

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005380**

ID профиля: **381585**

Вариант 9

черновик

$$\frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2$$

$$x^4+y^4+3x^2y^2=5$$

$$\Downarrow$$

$$(x^2+y^2)^2+x^2y^2=5$$

$$(x^2+y^2)^2-\frac{2}{x^2+y^2}=3$$

$$x^2+y^2=t$$

$$t^2-\frac{2}{t}=3 \quad | \cdot t$$

$$t^3-2=3t$$

$$t^3-3t-2=0$$

$t_1=-1 \longrightarrow$ теорема Безу

$$(t+1)^2(t-2)$$

$$(t^2+2t+1)(t-2)=$$

$$=t^3-2t^2+2t^2-4t+t-2$$

$$\cancel{\begin{array}{l|l} t^3-3t-2 & t-1 \\ -\;t^3-t^2 & t^2+t \\ \hline t^2-3t & \\ -\;t^2-t & \\ \hline -2t-2 & \end{array}}$$

$$\begin{array}{l|l} t^3-3t-2 & t+1 \\ -\;t^3+t^2 & t^2-t-2 \\ \hline -t^2-3t & \\ -\;-t^2-t & \\ \hline -2t-2 & \\ -2t-2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$t^2-t-2=0$$

~~$D=1+8=9$~~ $(t-2)(t+1)=0$

$$t_2=2$$

$t_3=-1$ – лишний корень

1 стр

черновик

$x^2+y^2=2$

$4+x^2y^2=5$

$$\begin{cases} x^2y^2=1 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

$x^2=\frac{1}{y^2}$

$\frac{1}{y^2}+y^2=2 \quad |\cdot y^2$

$y^4-2y^2+1=0$

$(y^2-1)^2=0$

$y^2=1$

$y=\pm 1$

$x^2=1$

$x=\pm 1$

$60\times 60 = 3600$

60·

$3600 - 119 = 3481$

$60 + 59 = 119$

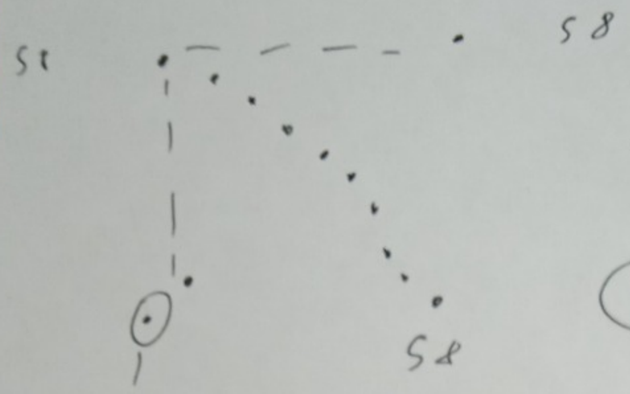
$60\cdot 3481 = 208860$

$3481 \times 60 = 208860$

58×58: $464 + 290\cdot = 3364$

2стр

черновик



$58 + 57 = 115$

$3364 - 115 = 3249$

29

~~3240~~

$3249 + 3248 + 3247$

1 2

$+ 3192$
58

$29 \cdot (3249 + 3192)$

1 – 3240
2 – 3248

$3249 - 58 = 3191$

$3249 + 3192 = 6441$

28
29 30
30 29

$3249 - 57 = 3192$

~~3192·58~~

$29 \cdot 6441$

$3134 + 3191 = 6325$

$3191 + 3190 + \ldots + 3134$

$29 \cdot 6325$

$3191 - 57 = 3134$

2
6
5
5

$6325 + 6441 = 12766$

$3249 - 57 = 3192$

12766×29

$3193 - 57 = 3136$

$3249 - 56 = 3193$

$3192 + 3249 = 6441$

$114894 + 25532 = 370214$

1
1
1

$6441 + 6329 = 12770$

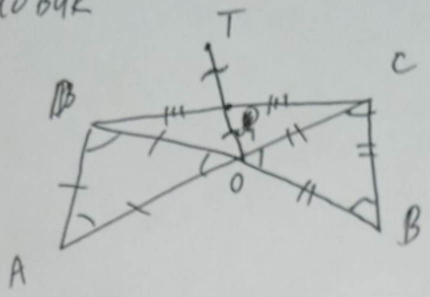
$3193 + 3136 = 6329$

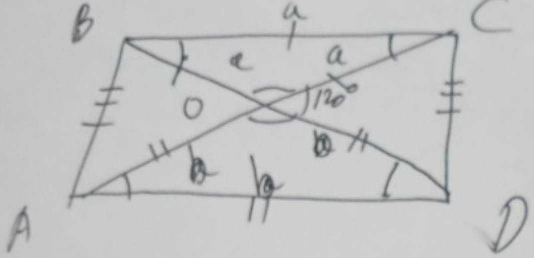
12770×29

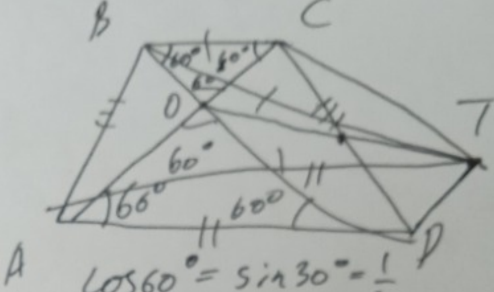
$11493 + 2554 = 370330$

3стр

черновик





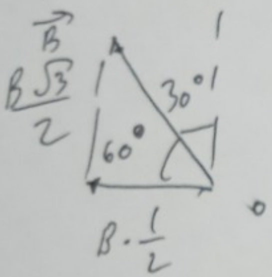


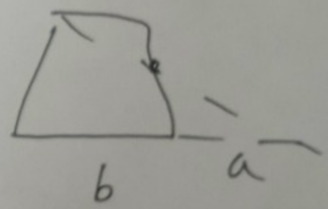
$\cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2}$

$\sqrt{a^2+b^2+ab}$

$\sqrt{a^2+ab+b^2}$

$\sqrt{(a+b)^2-ab}$





$\frac{a^2+b^2-2ab}{4} + \frac{3}{4}(a^2+b^2+2ab)$

$a^2 + \frac{b^2}{4} + ab + \frac{3}{4}b^2$

$h \cdot \frac{a+b}{2}$

$$\begin{array}{r} 49 \\ +\ 9 \\ \hline 58 \\ +\ 21 \\ \hline 79 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 79 \\ \times\ 4 \\ \hline 316 \\ -\ 79 \\ \hline 237 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 49 \\ +\ 9 \\ \hline 58 \\ +\ 21 \\ \hline 79 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 79 \\ \times\ 3 \\ \hline 237 \end{array}$$

4 стр

Чистовик

4 задача

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \quad (1) \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 5 \quad (2) \end{cases}$$

$$x^4+y^4+2x^2y^2=(x^2+y^2)^2$$

(2) уравнение:

$$(x^2+y^2)^2+x^2y^2=5$$

(2) − (1) почленно:

$$(x^2+y^2)^2-\frac{2}{x^2+y^2}=3$$

Замена: $x^2+y^2=t$

$t^2-\frac{2}{t}=3 \quad |\cdot t \neq 0$, т.к. если $x^2+y^2=0$, то (1) выражение не имеет смысла

$$t^3-3t-2=0$$

легко угадывается корень $t_1=-1$

$$(-1)^3-3\cdot(-1)-2=0$$

$$0=0$$

По теореме Безу:

$$\begin{array}{l|l} t^3-3t-2 & t+1 \\ \hline -\;t^3+t^2 & t^2-t-2 \\ \quad -t^2-3t & \\ -\;-t^2-t & \\ \qquad -2t-2 & \\ \quad -\;-2t-2 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$t^3-3t-2=(t+1)(t^2-t-2)$$

$$t^2-t-2=(t-2)(t+1)$$

по теореме Виета.

$t_2=2, \quad t_3=-1$

$x^2+y^2>0 \Rightarrow x^2+y^2=2$

(1): $\frac{2}{2}+x^2y^2=2$

$$x^2y^2=1$$

Чистовик

Имеем:

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{y^2} \end{cases}$$

Подставим:

$$\frac{1}{y^2}+y^2=2 \quad | \cdot y^2$$

$$y^4-2y^2+1=0$$

$$(y^2-1)^2=0$$

$$y^2=1$$

$$y=\pm 1$$

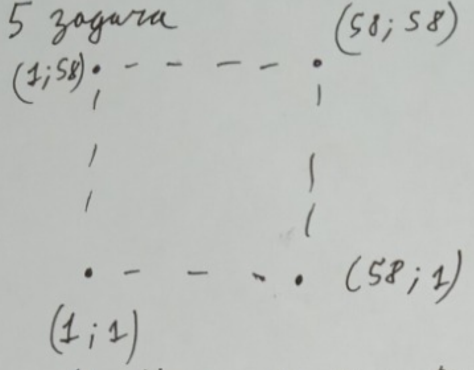
$$x^2=\frac{1}{y^2}=\frac{1}{1}=1$$

$$x=\pm 1$$

Ответ: $x=\pm 1$, $y=\pm 1$

Чистовик

5 задача



Мы имеем дело с квадратом 58 на 58 (исключив границы 0 и 59 вертикалей и горизонталей). Всего точек, с которыми мы имеем дело:

$58 \times 58 = 3364$ точки

Каждый раз мы исключаем точки на одной вертикали, горизонтали и саму точку:

$58 + 57 = 115$ точек

Начнём с $y = x$: точка $(1;1)$ может быть выбрана в паре с: $3364 - 115 = 3249$, точка $(2;2)$ может быть выбрана в паре с: $3364 - 115 - 1 = 3248$ – исключая $(1;1)$. Точка $(3;3)$ может быть выбрана в паре с: $3364 - 115 - 1 - 1 = 3247$ – исключая $(1;1)$ и $(2;2)$. И так далее. Получим всего: арифм. прогрессия с шагом 1.

$$\underset{1}{3249} + \underset{2}{3248} + \ldots \underset{58}{3192} = \frac{58}{2} \cdot (3192 + 3249) = 29 \cdot 6441$$

Перейдём к $y = 59 - x$: $y = 59 - x$ и $y = x$ не пересекаются:

$59 - x = x \Leftrightarrow 2x = 59 \Leftrightarrow x = \frac{59}{2}$, но $x \in N$.

Точка $(1;58)$ может быть спарена с: $3364 - 115 - 56 = 3193$ – исключая все 58 точек $y = x$, среди которых две исключаются из-за одной вертикали и горизонтали с точкой. Точка $(2;57)$ может быть в паре с: $3364 - 115 - 56 - 1 = 3192$ – исключая также саму и точку $(1;58)$. Аналогично так далее. Итого:

$$\underset{1}{3193} + \underset{2}{3192} + \ldots + \underset{58}{3136} = \frac{58}{2} \cdot (3193 + 3136) = 29 \cdot 6329$$

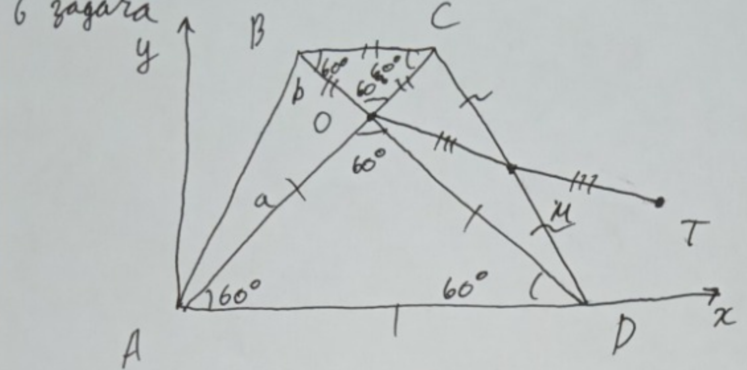
Общее количество способов:

$29 \cdot 6441 + 29 \cdot 6329 = 29 \cdot (6441 + 6329) = 12770 \cdot 29 =$
$= 370330$ способов

Ответ: 370330 способов

Чистовик

6 задача



$\angle AOB$ – смежный с $\angle BOC$

$\angle AOB = 180° - 60° = 120°$

$\angle COD$ – смежный с $\angle AOD$

$\angle COD = 180° - 60° = 120°$

$AO = OD = AD = a$ } по условию

$BO = OC = BC = b$ } DOC

Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle \cancel{COD}$:

1) $AO = OD$; 2) $BO = OC$

3) $\angle AOB = \angle DOC \Rightarrow$

$\triangle AOB = \triangle DOC \Rightarrow \angle BAO = \angle CDO = \alpha$, $\angle ABO = \angle DCO = \beta$, $AB = DC$

Выпуклый 4-угольник ABCD: $\alpha + 60° + 60° + \alpha + \beta + 60° + 60° + \beta = \cancel{720°}\ 360°$

$2(\alpha+\beta) = 120° \Rightarrow \alpha + \beta = 60°$, $\angle BAD + \angle ABC = 60° + \alpha + \beta + 60° = 60° + 60° + 60° = 180°$, односторонние углы в сумме дают $180° \Rightarrow BC \parallel AD$

Введём систему координат, связанную с (·)A: $Ox \uparrow\uparrow \vec{AD}$, $Oy \perp \vec{AD}$

Теорема косинусов для $\triangle AOB$:

$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120° = a^2 + b^2 + ab$, $AB = \sqrt{a^2+b^2+ab}$

$$b^2 = a^2 + a^2 + b^2 + ab - 2a\sqrt{a^2+b^2+ab}\cos\alpha$$

$$2a\cos\alpha\sqrt{a^2+b^2+ab} = 2a^2 + ab \quad |:2a \neq 0$$

$$\cos\alpha = \frac{2a+b}{2\sqrt{a^2+b^2+ab}}$$

$$a^2 = b^2 + a^2 + b^2 + ab - 2b\sqrt{a^2+b^2+ab}\cos\beta$$

$$2b\cos\beta = 2b^2 + ab \quad |:2b$$

$$\cos\beta = \frac{2b+a}{2\sqrt{a^2+b^2+ab}};$$

Координаты точек:

(·)A − $(0;0)$, ~~(·) B − (AB~~ $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$, $\vec{AO} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\vec{OB} = \left(-\frac{b}{2}; \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{AB} = \left(\frac{a-b}{2}; \frac{a\sqrt{3}+b\sqrt{3}}{2}\right)$, (·) B −

$\left(\frac{a-b}{2}; \frac{a\sqrt{3}+b\sqrt{3}}{2}\right)$ − (·)A потому что (·)A − $(0;0)$ и свойств векторов,

(·) C: $\left(\frac{a+b(2-\sqrt{3})}{2}; \frac{a\sqrt{3}+b}{2}\right)$, т.к. $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$, $\vec{BC} = (b;0)$

(·) D: $(a;0)$, (·) O $= \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ − проекция вектора на оси из Δ-ка AOB. $\vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AC} = \left(\frac{a-b(2-\sqrt{3})}{2}; -\frac{a\sqrt{3}+b}{2}\right)$

$\vec{CM} = \frac{\vec{CD}}{2} = \left(\frac{a-b(2-\sqrt{3})}{4}; -\frac{a\sqrt{3}+b}{4}\right)$, $\vec{AM} = \vec{AC} + \vec{CM}$

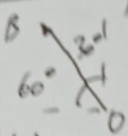
4 стр

Чистовик

$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{2a+2b(2-\sqrt3)+a-b(2-\sqrt3)}{4}; \frac{2a\sqrt3+2b-a\sqrt3-b}{4}\right) = \left(\frac{a+b(2-\sqrt3)}{4}; \frac{a\sqrt3+b}{4}\right)$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AO} = \left(\left(\frac{a+b(2-\sqrt3)}{4}-\frac{a}{2}\right); \frac{a\sqrt3+b}{4}-\frac{a\sqrt3}{2}\right) =$

$= \left(\frac{b(2-\sqrt3)-a}{4}; \frac{b-a\sqrt3}{4}\right)$, $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OM}$ (из условия симметрии) $=$

$= \left(\frac{a+b(2-\sqrt3)+b(2-\sqrt3)-a}{4}; \frac{a\sqrt3+b+b-a\sqrt3}{4}\right) = \left(\frac{b(2-\sqrt3)}{2}; \frac{b}{2}\right)$

$\overrightarrow{OB} = \left(-\frac{b}{2}; \frac{b\sqrt3}{2}\right)$ 

, $\overrightarrow{AB}\left(\frac{a-b}{2}; \frac{\sqrt3(a+b)}{2}\right)$,

$(\cdot)B - \left(\frac{a-b}{2}; \frac{\sqrt3(a+b)}{2}\right)$ – потому что $(\cdot)A - (0;0)$ и из свойств векторов. $(\cdot)C: \left(\frac{a+b}{2}; \frac{\sqrt3(a+b)}{2}\right)$, т.к. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, а $\overrightarrow{BC} = (b;0)$, т.к. $\overrightarrow{BC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AD}$. $(\cdot)D: (a;0)$, $(\cdot)O = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt3}{2}\right)$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC} =$

$= \left(\frac{a-b}{2}; -\frac{\sqrt3(a+b)}{2}\right)$, $\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CD}}{2} = \left(\frac{a-b}{4}; -\frac{\sqrt3(a+b)}{4}\right)$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM} = \left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{4}; \frac{\sqrt3(a+b)}{2}-\frac{\sqrt3(a+b)}{4}\right) = \left(\frac{3a+b}{4}; \frac{\sqrt3(a+b)}{4}\right)$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AO} = \left(\frac{3a+b}{4}-\frac{a}{2}; \frac{\sqrt3(a+b)}{4}-\frac{a\sqrt3}{2}\right) =$

$= \left(\frac{a+b}{4}; \frac{\sqrt3(b-a)}{4}\right)$, $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{OM}$ (из условия симметрии) $=$

$= \left(\frac{3a+b+a+b}{4}; \frac{\sqrt3(a+b)+\sqrt3(b-a)}{4}\right) = \left(a+\frac{b}{2}; \frac{\sqrt3 b}{2}\right)$

$\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{AT}-\overrightarrow{AB} = \left(\left(a+\frac{b}{2}-\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right); \left(\frac{\sqrt3 b}{2}-\frac{\sqrt3(a+b)}{2}\right)\right) =$

$= \left(b+\frac{a}{2}; \frac{\sqrt3 a}{2}\right)$

Если ABT – правильный Δ-ник, то: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BT}| = |\overrightarrow{AT}|$

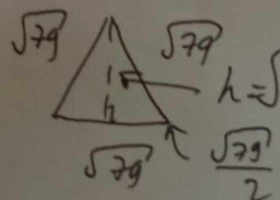
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\frac{a^2+b^2-2ab+3(a^2+b^2+2ab)}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2+4b^2+4ab}{4}} = \sqrt{a^2+b^2+ab}$

$|\overrightarrow{BT}| = \sqrt{b^2+ab+\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}} = \sqrt{a^2+b^2+ab}$

$|\overrightarrow{AT}| = \sqrt{a^2+ab+\frac{b^2}{4}+\frac{3b^2}{4}} = \sqrt{a^2+b^2+ab}$, $\Rightarrow \Delta ABT$ – правильный Δ-ник ч.т.д.

б) $BC = 3 = b$, $AD = 7 = a$

$AB = \sqrt{7^2+3^2+3\cdot7} = \sqrt{79}$

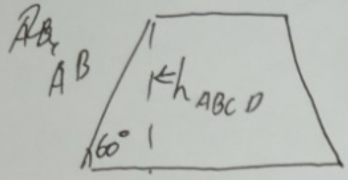


$h = \sqrt{79-\frac{79}{4}} = \frac{\sqrt{237}}{2}$

5 стр

Чистовик

$$S_{ABT} = \sqrt{79} \cdot \frac{\sqrt{237}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{79} \cdot \sqrt{237}$$



$$h_{ABCD} = AB \cdot \sin 60° = \frac{\sqrt{79} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{237}}{2}$$

$$S_{ABCD} = h_{ABCD} \cdot \frac{a+b}{2} = \frac{\sqrt{237}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 = \frac{10\sqrt{237}}{4}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\sqrt{237} \cdot \sqrt{79}}{4} : \frac{10\sqrt{237}}{4} = \frac{\sqrt{79}}{10}$$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\sqrt{79}}{10}$

6 стр