Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005376**

ID профиля: **854733**

Вариант 9

$N^o 2$

6. 1. $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -3$; Черновик

$-3+4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

$\sqrt{24+2x-x^2} = \frac{1}{2}$

$-x^2+2x+24 = \frac{1}{4}$

$-x^2+2x+\frac{95}{4} = 0$

$D = 4 + \frac{95}{4} \cdot 4 = 99$

$x = \frac{-2 \pm 3\sqrt{11}}{-2} = \frac{2 \pm \sqrt{99}}{2}$

$3 = \sqrt{9} < \sqrt{11}$

$\sqrt{99} < \sqrt{100} = 10$;

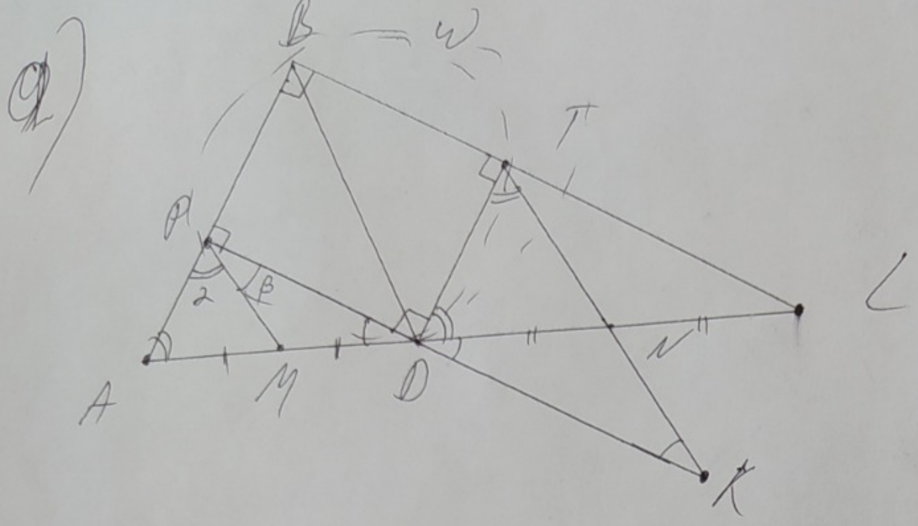
$\frac{2-3\sqrt{11}}{2} > \frac{2-\sqrt{100}}{2} = \frac{2-10}{2} = -4 \geq -4$

$\frac{2-3\sqrt{11}}{2} < \frac{2-3\sqrt{9}}{2} = -3,5 < 6$ — подходит.

5.

Чистовик №1.

а)



$\cdot\ PD \cap TN = K$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

1. $\angle BPD = \angle BTD = \frac{\pi}{2}$, как вписанные углы, опирающиеся на диаметр.
2. $\angle APD = \cancel{\pi} - \angle BPD = \cancel{\ldots}\ \frac{\pi}{2}$
   $\angle DTC = \cancel{\pi} - \angle BTD = \cancel{\ldots}\ \frac{\pi}{2}$
3. PM; TN – медианы $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ соответственно
   $\triangle APD$, $\triangle DTC$ – прямоугольные
   $\angle APD = \frac{\pi}{2}$; $\angle DTC = \frac{\pi}{2}$
   $\Downarrow$
   $PM = AM = MD$; $DN = TN = NC$ по свойствам медианы прямоугольного треугольника.
4. Из пункта 3 $\triangle MPD$ и $\triangle DNT$ – равнобедренные.
   $\angle MPD = \angle MDP = \beta$
   $\angle NDK = \angle PDM = \beta$
5. $\angle TKP = \angle MPK = \beta$ как накрест лежащие при пар. прямых $MP \parallel TN$.
6. По пункту 5 и 4.:
   $\angle TND = \beta + \beta = 2\beta$ по внешнему углу.

1.

7. По пункту 4. ΔDNT - равнобед. $\rightarrow \angle TDN = \angle DTN$

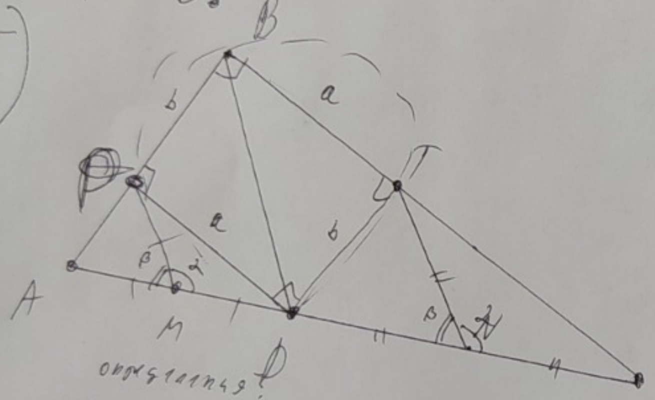
$\boxed{\text{иибоик}}$

$\angle TDN = \angle DTN = \frac{\pi - 2\beta}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$

8. $\angle PDT = \pi - \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$

9. $\angle ABC = \angle PBT = \pi - \angle PDT = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ как противолежащие углы вписанного четырёхугольника PBTD.

б)



определения:
$\alpha + \beta = 180°$

$BT = a$
$BP = b$

~~$\angle PMD = \angle TNC = \alpha$~~

~~$\angle PMA = \angle TND = \beta$~~

$\angle PMD = \alpha$

$\angle TND = \beta$ т.к. $\angle PMD = \pi - 2\angle PDM$

$\angle TND = 2\angle PDM$

из пункта а

1. PBTD – прямоугольник по 4-м углам (пункт а)

↓

$PD = BT = a$

$TD = BP = b$

2. $a^2 + b^2 = BD^2 = 4$, т.к. ΔBPD – прямоуг., по теореме Пифагора.

3. $PM = MD = AM = \frac{1}{2}$

$ND = NT = NC = \frac{5}{2}$ по пункту а. 3

4. $a^2 = PM^2 + MD^2 - 2\cos\alpha \, PM \cdot MD =$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4}\cos\alpha =$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha$

$b^2 = TN^2 + ND^2 - 2\cos\beta \cdot TN \cdot ND =$

$= \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + 2 \cdot \frac{25}{4} \cdot \cos\alpha =$

$= \frac{25}{2} + \frac{25}{2}\cos\alpha$

Чистовик

$$\frac{1}{2}+\frac{25}{2}+\frac{25}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha=4$$

$$13+12\cos\alpha=4$$

$$\cos\alpha=-\frac{9}{12}=-\frac{3}{4}$$

$$a^2=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{1}{8} \qquad a=\sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$b^2=\frac{25}{2}-\frac{25\cdot 3}{8}=\frac{25}{8} \qquad b=\sqrt{\frac{25}{8}}$$

5. $AP^2+PD^2=AD^2=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2=1$ По пифагору.

$$TD^2+TC^2=DC^2=\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\right)^2=25$$

$AP^2+a^2=1$ $\qquad AP^2=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8} \qquad AP=\sqrt{\frac{7}{8}}$

$TC^2+b^2=25$ $\qquad TC^2=25-\frac{25}{8}=\frac{175}{8} \qquad TC=\sqrt{7}\cdot\sqrt{\frac{25}{8}}$

6. $S_{ABC}=AB\cdot BC=\left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{8}}+\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{25}}{\sqrt{8}}\right)\left(\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{8}}+\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}\right)=$

$=\frac{\sqrt{7}}{8}\left(1+\sqrt{25}\right)\left(1+\sqrt{25}\right)=\frac{\sqrt{7}\cdot 6^2}{8}=\frac{36\sqrt{7}}{8}=\frac{9}{2}\sqrt{7}$

т.к. ABC — прямоугольный.

3_

№2. Чевсовик

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$$

1. $x \geq -4$ $\qquad$ $x \leq 6$

2. $24+2x-x^2 = -(6-x)(-x-4) = (6-x)(x+4)$

т.к. 6 и -4 - корни уравнения $-x^2+2x+24$.

3. $\frac{-4\cdot 6\cdot}{-1} = 24$ $\qquad$ $\frac{(+4-6)}{1} = 2$

$\sqrt{(6-x)(x+4)} = \sqrt{6-x}\cdot\sqrt{x+4}$ т.к. по пункту 1.

$x \geq -4 \to x+4 \geq 0$

$x \leq 6 \to 6-x \geq 0$

4. $a = \sqrt{x+4}$

$b = \sqrt{6-x}$

$a - b + 4 = 2ab$

$a - b + a^2 + b^2 - 2ab + 4 = a^2 + b^2$

$a - b + (a-b)^2 + 4 = a^2 + b^2$

~~$(a-b)(1+(a-b)) + 4 =$~~

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + (\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x})^2 = x+4+6-x-4 = 6$

5. $t = \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x}$

$t + t^2 - 6 = 0$ $\quad$ $D = 1+24 = 25$

$t = \frac{-1 \pm 5}{2} = -3; 2$ $\qquad$ И.

211005376 (U854733 M1273575)

№2

числовик.

$x = \frac{2+\sqrt{99}}{2}$

$\frac{2+\sqrt{99}}{2} > \frac{2-\sqrt{99}}{2} \geq -4$

— подходит.

$\frac{2+\sqrt{99}}{2} < \frac{2+\sqrt{100}}{2} < 6$

6.2. $t = 2$.

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

$\Downarrow$

$6 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

$24+2x-x^2 = 9$

$-x^2+2x+15 = 0$

$D = 4+60 = 64$

$x = \frac{-2\pm 8}{-2} = \frac{2\pm 8}{2} = 1\pm 4$

$x = -3 \quad -4 < -3 < 6$ — подходит

$x = 5 \quad -4 < 5 < 6$ — подходит.

Ответ: $x = \frac{2\pm\sqrt{99}}{2}; -3; 5$

6.

Цуртовиа

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$$

$\frac{-2-10}{-2} = 6$

$\frac{-2+10}{-2} = -4$

$$\cancel{\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{6-x}\sqrt{-4-x}}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{-(6-x)(-4-x)}$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2\sqrt{(6-x)(x+4)}$$

$x \geq -4$

$x \leq 6$

$\cancel{a - b = 2ab}$

$$\cancel{\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} - 2\sqrt{6-x}\sqrt{x+4} = 0}$$

$a - b + 4 = 2ab$

$$\cancel{\sqrt{x+4}\left(1-\sqrt{6-x}\right) + \sqrt{6-x}\left(-1-\sqrt{x+4}\right) = 0}$$

$$\cancel{\sqrt{x+4} = \sqrt{6-x}\left(2\sqrt{x+4}+1\right)}$$

$a - b + 4 = 2ab$

[illegible]

211005376 (U854733 M1273575)

Чернови

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{6x}$$

$$\sqrt{3+1}=$$

$$\cancel{=\sqrt{3}+\sqrt{3\cdot1}+\sqrt{1}}$$

$$\cancel{2\sqrt{3}+1}$$

$$\cancel{\sqrt{x+4}+x+4-\sqrt{6-x}+6-x+4=(\sqrt{x+4}+\sqrt{6-x})^2}$$

$$\cancel{\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+(x+4)-}$$

$$\sqrt{x+4}+(x+4)\ 7$$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+(x+4)-2\sqrt{x+4}\sqrt{6-x}+(6-x)+4=x+4+6-x$$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+(\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x})^2=6$$

$$(\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x})(1+\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x})=6$$

$$D=1+24=25$$

$$a(1+a)=10$$

$$a+a^2-6=0$$

$$1+40=41$$

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=\frac{-1\pm5}{2}$$

$$y=\frac{\sqrt{123}}{2\sqrt{2}}$$

$$a^2+b^2=2$$

$$a^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cos\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\alpha$$

$$b^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + 2 \cdot \frac{25}{4} \cos\alpha = \frac{\cancel{25}}{2} + \frac{\cancel{25}}{2} \cos\alpha$$

$$\frac{26}{2} + \frac{24}{2} \cos\alpha = 4$$

$$13 + 12\cos\alpha = 4$$

$$12\cos\alpha = -9$$

$$\cos\alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\sqrt{\frac{175}{8}} + \sqrt{}$$

$$a^2 + b^2 = 4$$

$$y = \frac{\sqrt{175}}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{25}{8} + y^2 = \cancel{25}$$

$$y^2 = \frac{175}{8}$$

$$S_{BPDT} = \sqrt{\frac{1}{8}}\sqrt{\frac{25}{8}} = $$

$$= \frac{\sqrt{175}}{8}$$

$$\frac{7}{8} + x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{8}$$

$$x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$a^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{32}{8} = 4$$

$$b^2 = \frac{25}{2} - \frac{25}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{25}{2} - \frac{75}{8} = \frac{25}{8}$$

Чуновича

$$S = \frac{\sqrt{25}+\sqrt{1}}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{175}}{\sqrt{8}} =$$

$$(\sqrt{25}+1)\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{175}) =$$

$$= \sqrt{175} + 25\sqrt{7} + \sqrt{7} + \sqrt{175} =$$

$$= \text{\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$$= \sqrt{7}\,(\sqrt{25}+1)(\cancel{1}+\sqrt{25}) =$$

$$= \sqrt{7}\,(25+\sqrt{25}+\sqrt{25}+1) = \frac{\sqrt{7}\cdot 36}{8}$$

$x^2+x^2=4$

$5^2\cdot 7$

$a^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=$

$=\frac{1}{2}-\frac{6}{16}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

$a=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$b^2=\frac{25}{2}+\frac{25}{2}\cdot\frac{3}{4}=$

$=\frac{25}{2}+\frac{75}{8}=$

$\frac{175}{8}$

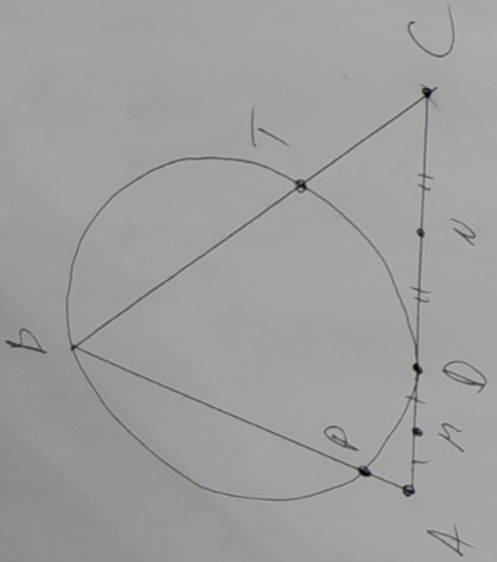
$S=\frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

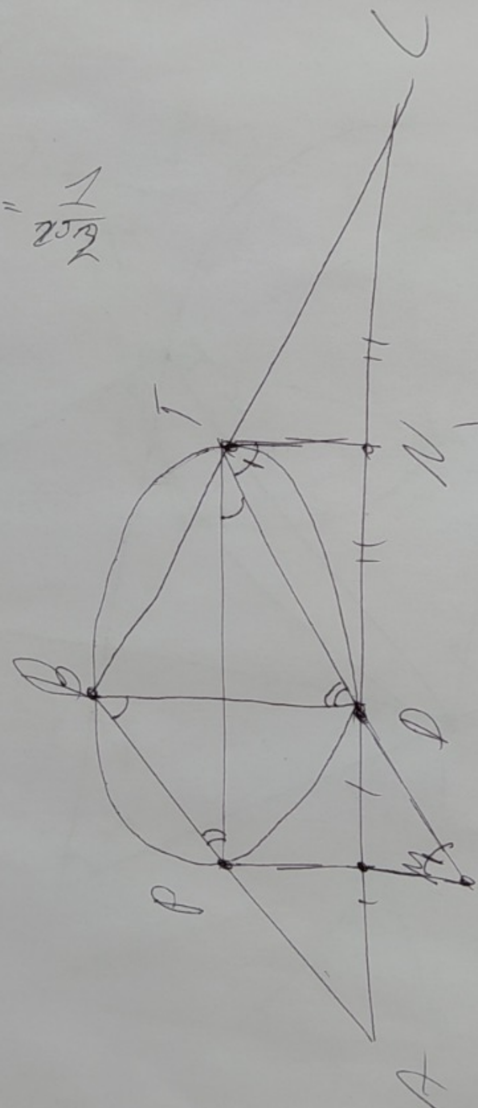
$\frac{175}{8}+\frac{1}{8}=\frac{176}{8}=$

$=$

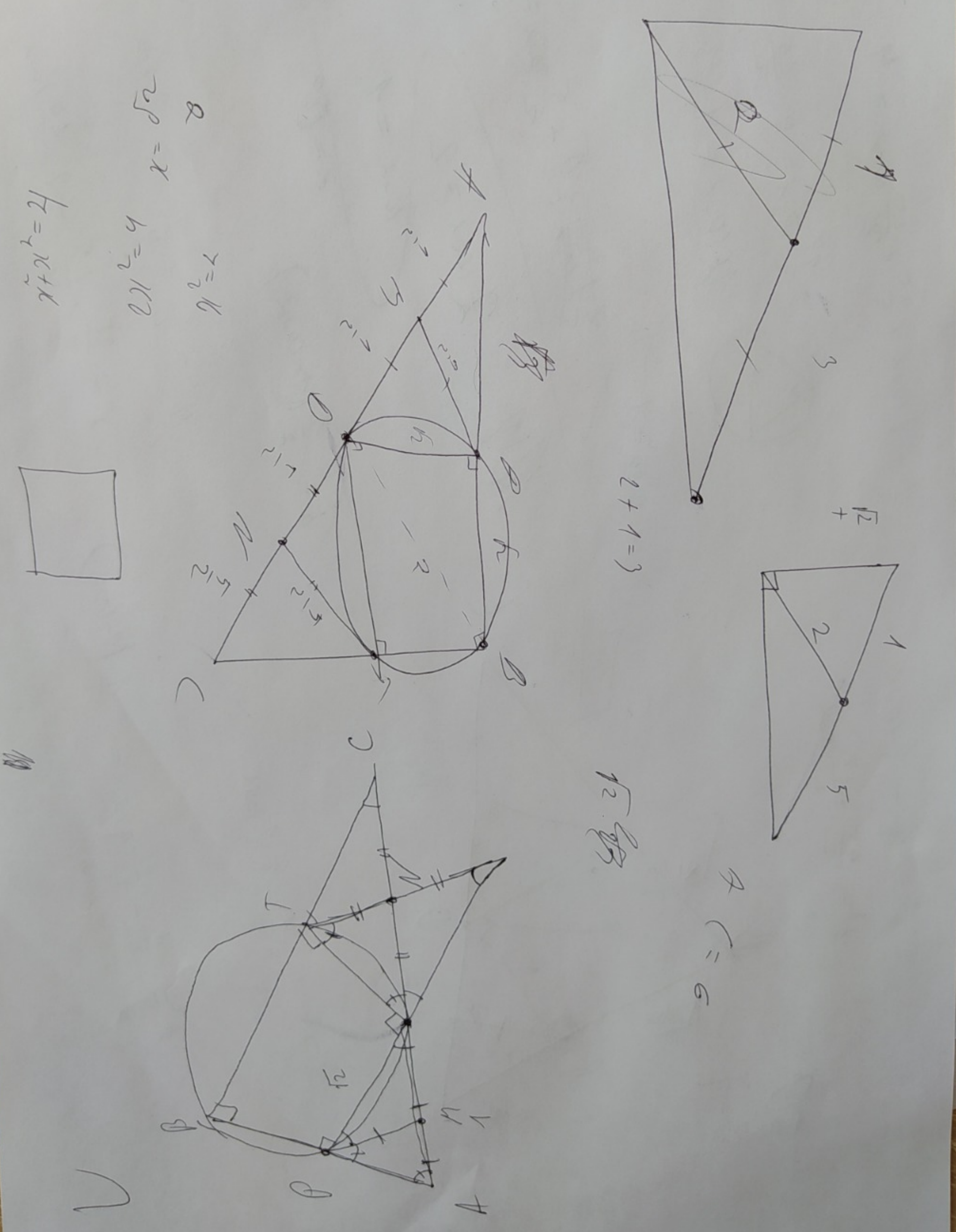
$176 \,|\, 8$, -16, 22, 16

черновик





Черновик

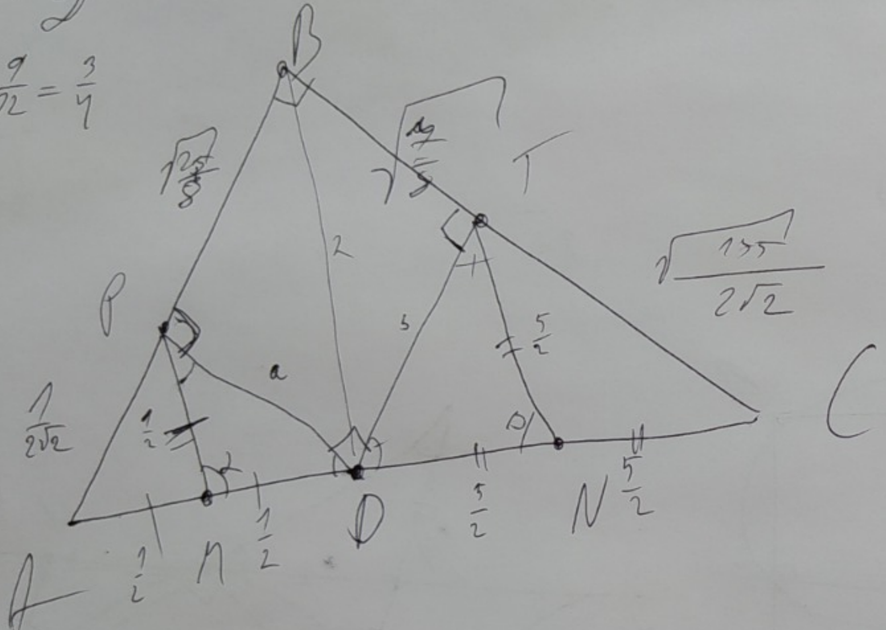


$a^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha$

$b^2 = \frac{25}{2} + \frac{25}{2}\cos\alpha$

$\cos\alpha = \cancel{4}\ 9$

$\cos\alpha = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$



$a^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{4}\cos\alpha$

$a^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{25}{2} + \frac{25}{2}\cos\alpha = 4$

$\frac{24}{2}\cos\alpha = 4 - \frac{26}{2}$

$12\cos\alpha = 4 - 13$

$a^2 + b^2 = 4$

$\cancel{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\alpha} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}\cos\alpha = 4$

$\frac{4}{2}\cos\alpha = 2$

$\cos\alpha = 1$

$\alpha = 0°$

$b^2 = \frac{5}{2}(1+\cos\alpha)$

Черновик

$a^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 2\cdot\frac{1}{4}\cos\alpha$

$b^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + 2\cdot\frac{25}{4}\cos\alpha$

Черновик

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -3$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2$$

$$2 + 4 = 2\sqrt{x+4}\,\sqrt{6-x}$$

$$\sqrt{x+4}\,\sqrt{6-x} = 3$$

$$(x+4)(6-x) = 9$$

$$-x^2 + 2x + \cancel{24} - 9 = 0$$ (15)

$$D = 4 + 60 = 64$$

$$x = \frac{-2 \pm 8}{-2} = \frac{-10}{-2} \to 5 \qquad \frac{6}{-2} \to -3$$

$$2 - x < -8$$

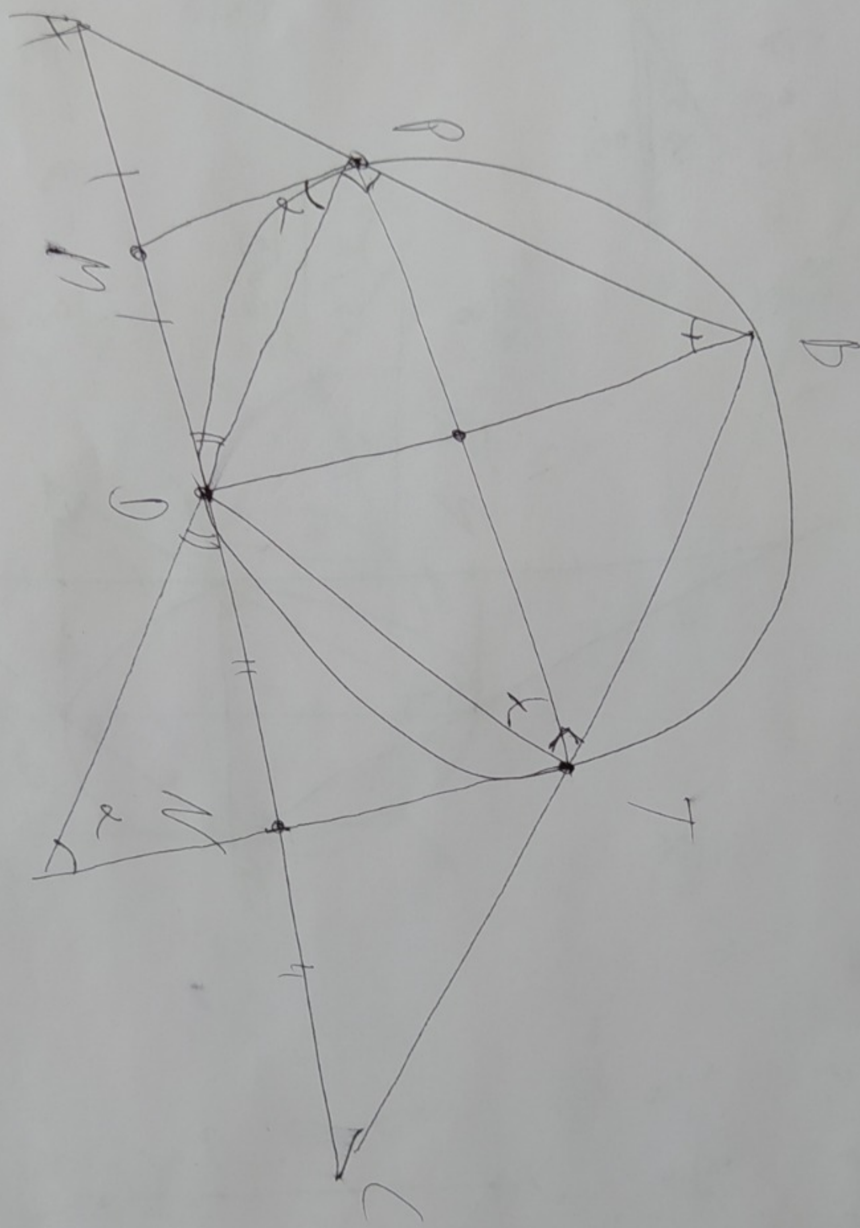
$$\frac{2-}{2} < -3 \qquad x < -10$$

$$2 - x < -6$$

$$x > 4$$

211005376 (U854733 M1273575)

Чертеж



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

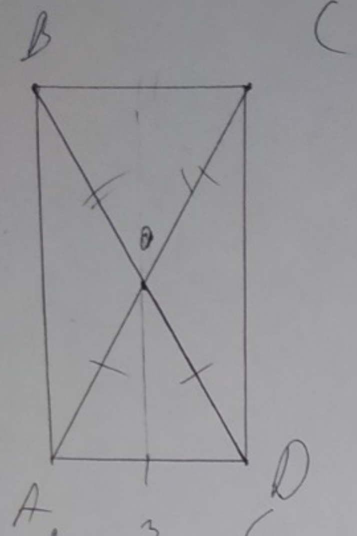
Шифр: **211005376**

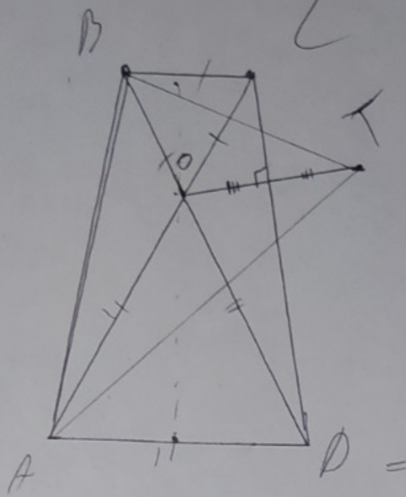
ID профиля: **854733**

Вариант 9

чертеж

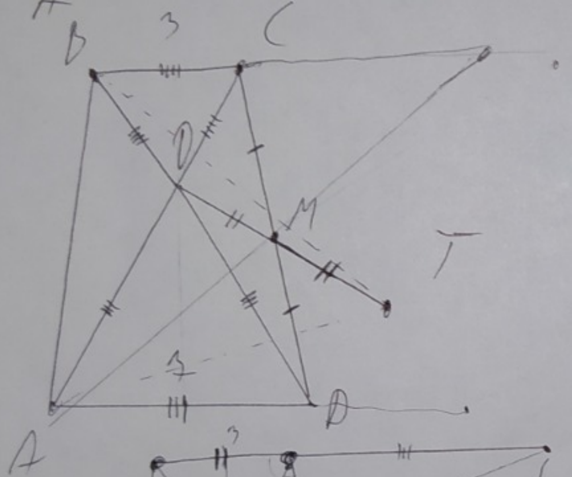
$\frac{21\cdot 4}{\sqrt{3}}\sin\alpha + 58\frac{\sqrt{3}}{2}$





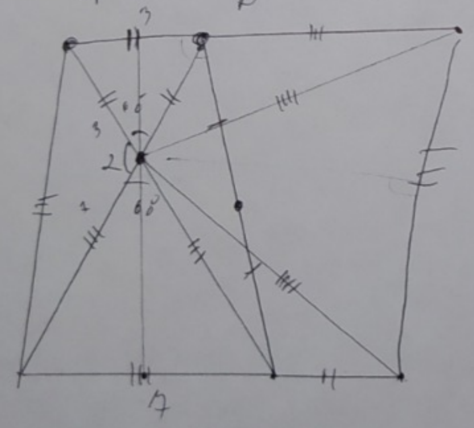
$\cancel{21\sin\alpha\ 58\frac{\sqrt{3}}{4}} =$

$= \cancel{21\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}}$



$\sqrt{24 + \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{49\sqrt{3}}{4}}$

$3\cdot 7\cdot\sin\alpha + \frac{3^2\cdot\sqrt{3}}{4} + \frac{7^2\cdot\sqrt{3}}{4}$



$\sqrt{21\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 20}$

M

$a^2 = 9+49-2\cos\alpha\, 21 =$

$= 58 - 42\cos\alpha$

$a = \sqrt{58-42\cos\alpha}$

$S = \left(\frac{\sqrt{58-42\cos\alpha}}{\cancel{}}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} =$

$= \frac{58-42\cos\alpha}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}(58-42\cos\alpha)}{8}$

$t=-1$ no $x^2+y^2 \neq -1$

$t^3-3t-2 \,|\, t+1$

$-\; t^3+t^2 \qquad t^2-t-2$

$-t^2-3t$

$-t^2-t$

$-2t-2$

$t^2-t-2=0$

$D=1+8=9$

$t=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=-1;\ 2$

$x^2+y^2=2$

$x^2y^2=1$

$a=\frac{1}{b}$

$b+\frac{1}{b}=2$

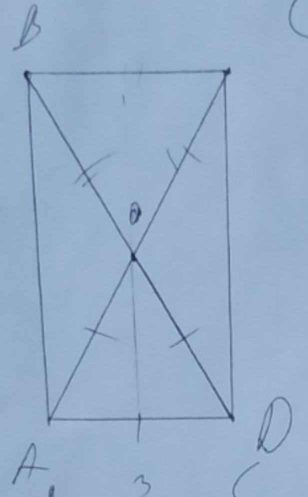
$b^2-2b+1=0 \quad D=4-4=0$

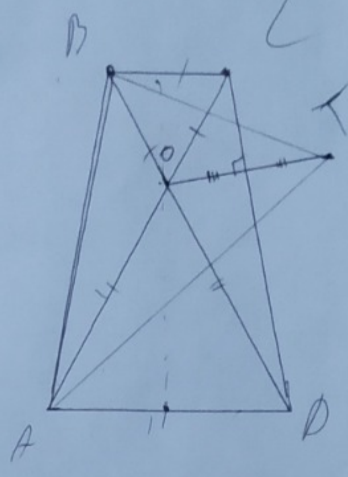
$x^2=1 \rightarrow y^2=1$

$x=\pm1 \quad y=\pm1$

чертежи

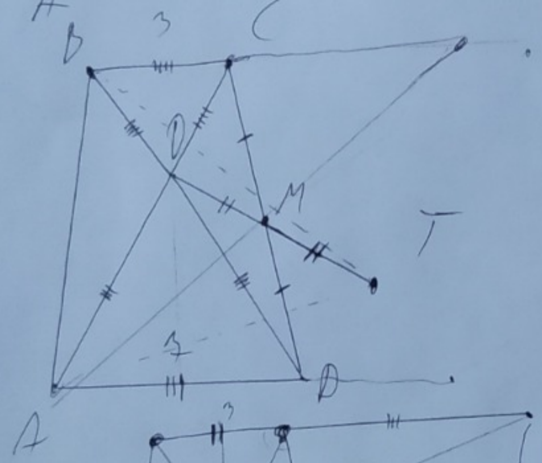
$\frac{21\cdot 4}{\sqrt{3}}\sin\alpha + 58\frac{\sqrt{3}}{2}$





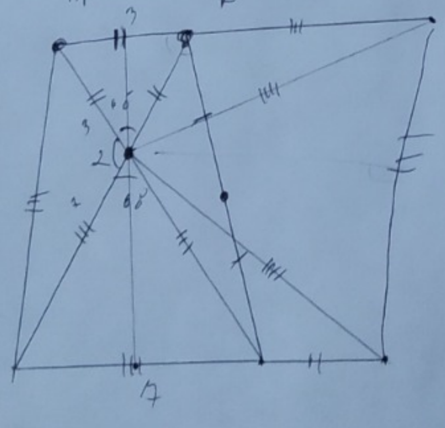
$21\sin\alpha + 58\frac{\sqrt{3}}{4} =$

$= \cancel{21\sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}}$



$\cancel{21} + \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{49\sqrt{3}}{4}$

$3\cdot 7\cdot \sin\alpha + \frac{3^2\cdot\sqrt{3}}{4} + \frac{7^2\cdot\sqrt{3}}{4}$



$\cancel{21\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 10}$

$a^2 = 9+49-2\cos\alpha\, 21 =$

$= 58 - 42\cos\alpha$

$S = \left(\frac{\sqrt{58-42\cos\alpha}}{\cancel{2}}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} =$

$a = \sqrt{58-42\cos\alpha}$

$\cancel{= \frac{58-42\cos\alpha}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\,(58-42\cos\alpha)}{8}}$

Чистовик

№4

1. $\frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 \rightarrow x^2y^2=\frac{2(x^2+y^2)-2}{x^2+y^2} \rightarrow x^2+y^2\neq 0$

2. $x^4+y^4+3x^2y^2=5 \rightarrow (x^2+y^2)^2+x^2y^2=5$

3. Из пунктов выше:

$$(x^2+y^2)^2+\frac{2(x^2+y^2)-2}{x^2+y^2}=5 \qquad t=x^2+y^2$$

$$t^2+\frac{2t-2}{t}=5$$

$$\frac{t^3-3t-2}{t}=0 \qquad t\neq 0$$

$$t^3-3t-2=0$$

$t=-1$ – корень уравнения, но $x^2\geq 0$, $y^2\geq 0 \rightarrow x^2+y^2\geq 0$ – т.к. это квадраты.

– не подходит.

$$\begin{array}{l|l} t^3-3t-2 & t+1 \\ \underline{-\;t^3+t^2} & t^2-t-2 \\ \quad -t^2-3t & \\ \quad \underline{-\;-t^2-t} & \\ \qquad -2t-2 & \\ \qquad \underline{-\;-2t-2} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} t^2-t-2=0 \\ D=9 \\ t=\frac{1\pm 3}{2}=-1;\,2 \end{array}$$

$t=-1$ не подходит.

4. $t=2$

$$x^2+y^2=2$$

$$\frac{2}{2}+x^2y^2=2 \qquad x^2y^2=1$$

5. $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \end{cases} \rightarrow y^2=\frac{1}{x^2} \longrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=2$

$$x^4-2x^2+1=0$$

$$D=0$$

$$x^2=\frac{2}{2}=1$$

$1+y^2=2$

$y^2=1$

6. $x^2=1 \rightarrow x=\pm 1 \qquad y^2=1 \rightarrow y=\pm 1$

Ответ: $x=\pm 1$; $y=\pm 1$

1.

$-4+4\sqrt{5}+\cancel{a^2+\sqrt{5}}\;a^2$

$(-2+2\sqrt{5})+a^2(1+\sqrt{5})+\frac{(1+\sqrt{5})^2}{\cancel{4}}a=0$

$D=(1+\sqrt{5})^2+4\cdot\frac{2(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{2}=$

$=(1+\sqrt{5})^2+4(5-1)(1+\sqrt{5})=$

$=(1+\sqrt{5})^2+4\cdot4(1+\sqrt{5})=$

$=1+2\sqrt{5}+5+16+16\sqrt{5}=$

$=22+18\sqrt{5}+5=27+18\sqrt{5}=9(3+2\sqrt{5})$

$a=$

[illegible]

$\frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2$

$x^4+y^4+3x^2y^2=5$

$\frac{2}{x^2+y^2}=2-x^2y^2$

$\cancel{\frac{x^2+y^2}{2}}=\frac{2}{2-x^2y^2}$

$x^2y^2=2-\frac{2}{x^2+y^2}=\frac{2(x^2+y^2)-2}{x^2+y^2}$

$\frac{(x^2+y^2)^3}{x^2+y^2}+\frac{2(x^2+y^2)-2}{x^2+y^2}-\frac{5(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=0$

$\frac{t^3-3t-2=0}{t}$ $t\neq 0$

$t=-1$ но $x^2+y^2\neq-1$.

$t^3-3t-2 \,|\, t+1$

t^3+t^2 $\quad t^2-t-2$

$-t^2-3t$

$-t^2-t$

$-2t-2$

$t^2-t-2=0$

$D=1+8=9$

$t=\frac{1\pm 3}{2}=\cancel{-1};2$

и проверка

$x^2+y^2=2$

$x^2y^2=1$

$\frac{2}{2}+x^2y^2=2$

$x^2y^2=1$

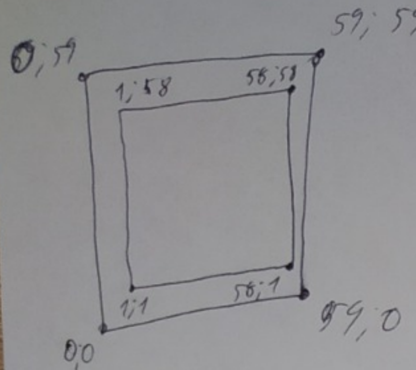
$a=\frac{1}{b}$

$b+\frac{1}{b}=2$

$b^2-2b+1=0$ $D=4-4=0$ $\frac{2}{2}=1$

$x^2=1 \to y^2=1$ $x=\pm1$ $y=\pm1$

№5 Рисунок



1. Узлов на каждой стороне 59+1=60.
2. Сетки внутри квадрата (без границ) — 58 узлов на каждой стороне и 58^2 узлов всего.

3. Внутри квадрата на $y=x$ лежат точки:

$(n;n)$ $n\in[1;58]$, $n\in N$ $\longrightarrow$ 58 узлов.

Внутри квадрата на $y=59-x$ лежат точки:

$(n;59-n)$ $n\in[1;58]$, $n\in N$ $\longrightarrow$ 58 узлов.

Т.к. 59 — нечётное, то множества узлов не пересекаются: $\longrightarrow$ Выбираем из $58+58=116$ точек.

$y=x$

$y=59-x \rightarrow y=59-y$ $\quad 2y=59 \rightarrow$ в целых числах не решается

4. После выбора 1-ой точки, что лежит на диагоналях выбираем вторую. — Это любая точка:
   1. лежащая в квадрате
   2. не лежащая на одной гориз. с 1-ой ~~[illegible]~~
   3. не лежащая на одной верт. с 1-ой.

Под пункт 2 попадают точки:

$(n;y_0)$ $n\in[1;58]$, $n\in N$ — 58 штук

$(x_0;y_0)$ — 1-ая точка диагоналы.

Под пункт 3:

$(x_0;n)$ $n\in[1;58]$, $n\in N$ — 58 штук

Всего $58+58-1=115$ точек.

Тогда ~~[illegible]~~ таких: 58^2-115.

5. К каждой паре $((x_1;y_1);(x_2;y_2))$

2.

$$-4+4\sqrt{5} + \cancel{a^2+\sqrt{5}}\ a^2$$

$$(-2-2\sqrt{5}) - a^2(1+\sqrt{5}) - \frac{(1+\sqrt{5})^2}{\cancel{4}}a = 0$$

$$D = (1+\sqrt{5})^2 + 4\cdot\frac{2(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^2}{2} =$$

$$= (1+\sqrt{5})^2 + 4(5-1)(1+\sqrt{5}) =$$

$$= (1+\sqrt{5})^2 + 4\cdot 4(1+\sqrt{5}) =$$

$$= 1+2\sqrt{5}+5 + 16+16\sqrt{5} =$$

$$= 22 + 18\sqrt{5} + 5 = 27 + 18\sqrt{5} = 9(3+2\sqrt{5})$$

$a =$

Чернетка

$$\frac{2}{x^2+y^2}+x^2+y^2=2$$

$$x^4+y^4+3x^2y^2=5$$

$$\downarrow$$

$$(x^2+y^2)^2+x^2y^2=5$$

$$x^2+y^2+2-\frac{2}{x^2+y^2}=5$$

$$\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}-3x^2-3y^2=0$$

$$(x^2+y^2)^2=3(x^2+y^2)$$

$$t^2=3t$$

$$t^2-3t=0$$

$$t(t-1)=0$$

$$x^2y^2=2-\frac{2}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{2x^2+2y^2-2}{x^2+y^2}$$

Игролки

1) $\cancel{x^2+y^2=0}$

2) $\cancel{x^2+y^2=3}$

$$\frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2$$

$\Downarrow$

$$x^2y^2=2-\frac{2}{x^2+y^2}=\frac{2(x^2+y^2)-2}{x^2+y^2}$$

$$x^4+y^4+3x^2y^2=5$$

$\Downarrow$

$$(x^2+y^2)^2+x^2y^2=5$$

$\Downarrow$

$$(x^2+y^2)^2+\frac{2(x^2+y^2)-2}{x^2+y^2}=5$$

$$\frac{(x^2+y^2)^3+2(x^2+y^2)-5(x^2+y^2)-2}{x^2+y^2}=0$$

$$t^3-3t-2=0 \qquad t=-1$$

Черновик

$$x^2+y^2=\frac{2x^2+2y^2-2}{x^2+y^2}$$ Упрощаем,

$$(x^2+y^2)^2+\frac{2x^2+2y^2-2}{x^2+y^2}=5$$

$$\frac{(x^2+y^2)^3+2x^2+2y^2-2-5x^2-5y^2}{x^2+y^2}=0$$

$t^3-3t-2=0$

$\cancel{1 \quad 3 \quad -2}$

$t=-1$

$$\begin{array}{r|l} t^3-3t-2 & t+1 \\ \hline -(t^3+2t^2) & t^2-2t \\ -2t^2-3t & \\ -(-2t^2-2t) & \\ -t-2 & \end{array}$$

$x^2+y^2=-1$

$\frac{2}{-1}+$

$\frac{2}{-1}+x^2y^2=2$

$-2+x^2y^2=2$

$x^2y^2=4$

$ty=\pm 2$

$$x^2+y^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ширович

$$\frac{4}{1+\sqrt{5}}+x^2\cancel{+y^2}=2 \qquad ab=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x^2y^2=\frac{2+2\sqrt{5}-4}{1+\sqrt{5}} \qquad ab=\frac{-2+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$$

$$\cancel{xy=\pm\sqrt{2-\frac{4}{1+\sqrt{5}}}}$$

$$x^2y^2=\pm\sqrt{\frac{-2+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}} \qquad b=\frac{-2+2\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})a}$$

$$x^2y^2=\frac{-2+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$$

$$\frac{-2+2\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})a}+a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$-2+2\sqrt{5}+a^2(1+\sqrt{5})=\frac{(1+\sqrt{5})^2a}{2}$$

$$\frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2$$

$\Updownarrow$

$$x^2y^2 = 2 - \frac{2}{x^2+y^2} = \frac{2(x^2+y^2)-2}{x^2+y^2}$$

$$x^4+y^4+3x^2y^2 = 5$$

$\Updownarrow$

$$(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5$$

$\Updownarrow$

$$(x^2+y^2)^2 + \frac{2(x^2+y^2)-2}{x^2+y^2} = 5$$

$$\frac{(x^2+y^2)^3 + 2(x^2+y^2) - 5(x^2+y^2) - 2}{x^2+y^2} = 0$$

$$t^3 - 3t - 2 = 0 \qquad t = -1$$

Черновик

Черновик

1) $x^2+y^2=\sqrt{3}$

$\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = 2$

x^{4}

$\frac{2+3}{\sqrt{3}}$ $\frac{5}{\sqrt{3}}$

$(x^2+y^2)^2 + 2 - \frac{2}{x^2+y^2} = 5$

$\frac{(x^2+y^2)^3 - 3x^2 - 3y^2}{x^2+y^2}$

$(x^2+y^2)^3 = 3(x^2+y^2)$

$t^3 - 3t = 0$ $t = \pm\sqrt{3}$

$t(t^2-3) = 0$

$x^2y^2 =$

58^2

58×58

464

$+290$

3364

[illegible]

[illegible]

Черновик

$\frac{21\cdot 4}{\sqrt3}\cdot\sin\alpha + 58$

$-41\cos\alpha + 58$

$x^2+y^2-1\neq 0$

$x^2+y^2\neq 1$

$\cancel{t^3-3t}-2 \quad \frac{-1-t}{-t^2}$

$a^2=9+49-\frac{42}{2}=37$

$a=\sqrt{37}$

$S=\frac{37}{}\cdot\frac{\sqrt3}{4}$

$x^2+y^2=\frac{7+\sqrt5}{2}$

$x^2+2x+1=0$

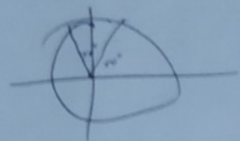
$D=4-4=0$

$x=1$

$\frac{3}{4}$

$(x-1)(x-1)$

$\frac{3\cdot 7\cdot\sin 120^\circ}{2}=\frac{21\sqrt3}{4}$



$\boxed{21\cdot\frac{\sqrt3}{4}+9\frac{\sqrt3}{4}+49\frac{\sqrt3}{4}=79\frac{\sqrt3}{4}}$

$$
\begin{array}{l|l}
t^3-3t-2 & t+1 \\
\hline
-(t^3+t^2) & t^2-t-1 \\
-t^2-3t & \\
-(-t^2-t) & \\
-2t-2 & \\
-(-2t-2) & \\
0 &
\end{array}
$$

$t^2-t-1<0$

$1+4=5$

$\frac{1\pm\sqrt5}{2}$

$\sqrt5>1 \to \cancel{\frac{1-\sqrt5}{2}}$

$(58-41\cos\alpha)\frac{\sqrt3}{4}$

$$\frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2$$

$$x^2y^2=2-\frac{2}{x^2+y^2}=$$

$$x^4+y^4+3x^2y^2=5$$

$$=\frac{2x^2+2y^2-2}{x^2y^2}$$

$$(x^2+y^2)^2+x^2y^2=5$$

Шрполин

$$x^2+y^2+2-\frac{2}{x^2+y^2}=5$$

$$\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}-3x^2-3y^2=0$$

$$(x^2+y^2)^2=3(x^2+y^2)$$

$$t^2=3t$$

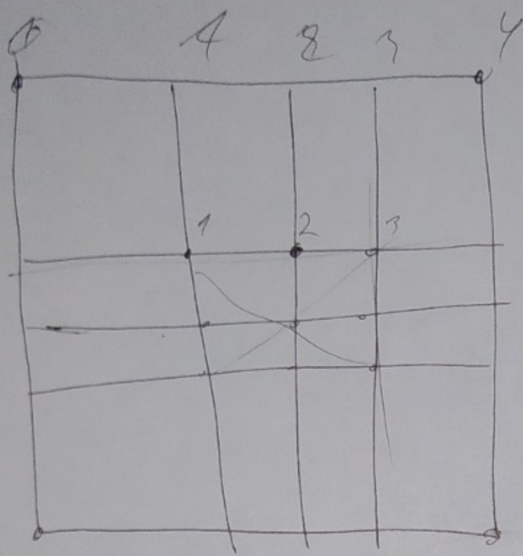
$$t^2-3t=0$$

$$t(t-1)=0$$

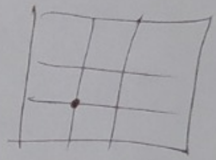
1) $\cancel{x^2+y^2=0}$

2) $\cancel{x^2+y^2=3}$

Черновик

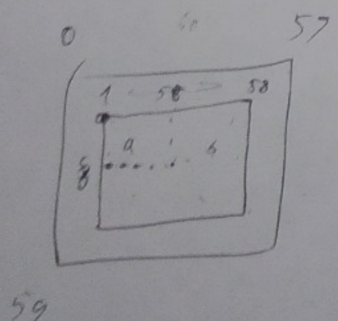


$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$



$\frac{4 \cdot 1}{2} = 2$

$\frac{9 \cdot 4}{2} = \frac{36}{2} = 18$



$58^2 - 57^2$

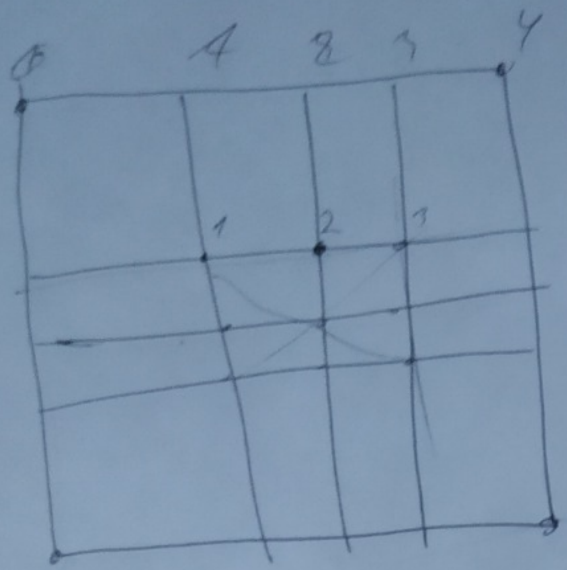
$(58+57) \cdot (58^2 - (58+57))$

$115 \cdot (58^2 - 115)$

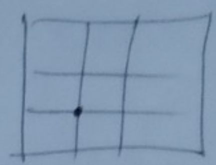
$a + b + 1 = 58$

$a + b = 57$

Чистовик



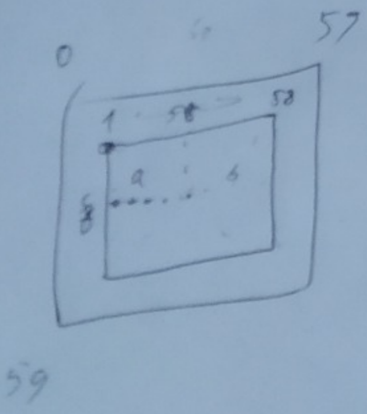
$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$



$\frac{4 \cdot 1}{2} = 2$

$\frac{9 \cdot 4}{2} = \frac{36}{2} = 18$

$\cancel{59}$



$58^2 \; 2 \; 157^2$

$(58+57) \cdot 158^2 - (58+57)$

59

$a+b+1=58$

$1 \quad 115 \cdot 158^2 - 115$

$a+b=54$

Чернова

Чистовик.

соответствует пара $((x_2;y_2);(x_1;y_1))$, что мы считали одинаковыми. Такая пара 1 → разных пар $\frac{S}{2}$, где

S - число способов выбрать 1 и 2 машины.

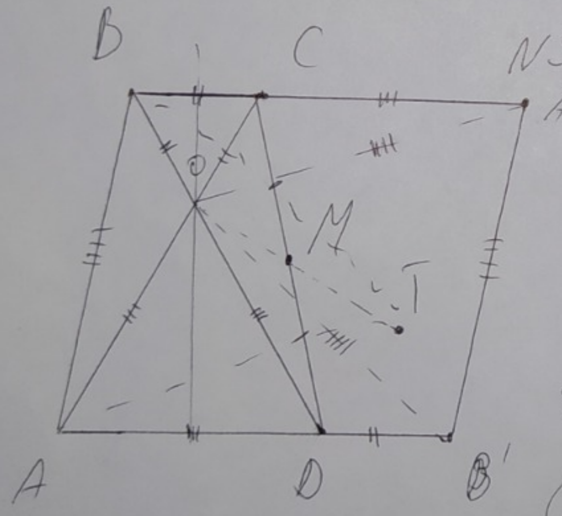
6. Всего способов:

$$\frac{116\cdot(58^2-115)}{2} = \frac{58(58^2-115)}{\cancel{2}} =$$

$$= 58(58^2-115)$$

Ответ: $58(58^2-115)$

№ 6



а) 1. $\angle ACB = \angle CAD = 60^\circ$

$\Downarrow$

$BC \parallel AD$ по углам.

$AO = OD$, $BO = OC$ (из равносторонних)

→ $ABCD$ — равнобокая трапеция.

2. M - центр симметрии

$A \xrightarrow{M} A'$ (A переходит в A')

$B \xrightarrow{M} B'$

~~$AB \to A'B'$~~

$AB \xrightarrow{M} A'B' \to AB = A'B'$.

$O \xrightarrow{M} T$

$D \xrightarrow{M} C$

$C \xrightarrow{M} D$.

$\triangle ATD \xrightarrow{M} \triangle A'OB' \to$

$\to \triangle ATB = \triangle A'OB'$.

$AD \xrightarrow{M} A'C$

$AD = A'C$

$BC \xrightarrow{M} B'D$

$BC = B'D$.

Из соображений симметрии.

1) $x^2+y^2=\sqrt{3}$

$\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}=2$

$\frac{2+3}{\sqrt{3}}$ $\frac{5}{\sqrt{3}}$

$(x^2+y^2)^2+2-\frac{2}{x^2+y^2}=5$

$\frac{(x^2+y^2)^3-3x^2-3y^2}{x^2+y^2}$

$(x^2+y^2)^3=3(x^2+y^2)$

$t^3-3t=0$ $t=\pm\sqrt{3}$

$t(t^2-3)=0$

$x^2y^2=$

Игровые

58^2

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times\ 58 \\ \hline 464 \\ +\ 290 \\ \hline 3364 \end{array}$$

3. $B'D = BC = OC$ ← из равносторонности

$CA' = AD = OD$

$\angle OCA' = \pi - \angle BCO = 120°$

$\angle ODB' = 180° - \angle ODA = 120°$

→ $\triangle OCA' = \triangle ODB'$ по 2 сторонам и углу между ними.

$OA' = OB'$.

4. $\angle BOA = 180° - \angle BOC = 120°$ ← из равносторонности.

$\angle A'CO = \; = 120°$

$CA' = AD = OA$

$OC = OB$

→ $\triangle OCA' = \triangle BOA$ по 2-м сторонам и углу между ними.

$AB = OA'$

5. $A'B' = AB = OA' = OB'$ → $\triangle A'OB'$ - равносторонний.

$\triangle ATB = \triangle A'OB'$ → $\triangle ATB$ → равносторонний

#

д) 1. $AB^2 = BO^2 + OA^2 - 2\cos 120° \cdot BO \cdot OA =$

$= BC^2 + AD^2 - 2\cos 120° \cdot BC \cdot AD = 9 + 49 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 3 = 58 + 21 =$
$= 79$

2. $\triangle ABT$ - равносторонний → $\angle ABT = 60°$ → $S_{ABT} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60°}{2} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$

→ $AB = BT$

4.

211005376 (U854733 M1273576)

$$x^2+y^2=\frac{2x^2+2y^2-2}{x^2+y^2}$$ Чиртоки.

$$(x^2+y^2)^2+\frac{2x^2+2y^2-2}{x^2+y^2}=5$$

$$\frac{(x^2+y^2)^3+2x^2+2y^2-2-5x^2-5y^2}{x^2+y^2}=0$$

$t^3-3t-2=0$

$x^2+y^2=-1$

$t=-1$

$\frac{2}{-1}+$

$t^3-3t-2 \,\big|\, t+1$

t^2-2t

$-\ t^3+2t^2$

$-2t^2-3t$

$-\ -2t^2-2t$

$-t-2$

$\frac{2}{-1}+x^2y^2=2$

$-2+x^2y^2=2$

$x^2y^2=4$

$xy=\pm 2$

ничьих.

3. $\Delta AOB = \Delta COD \Leftarrow \begin{cases} BO = OC \\ OA = OD \\ \angle BOA = \angle COD \end{cases}$

$\downarrow$

$$S_{AOB} = S_{COD} = \frac{BO \cdot OA \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{21 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$S_{BOC} = \frac{BO \cdot OC \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{BO^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{AOD} = \frac{AO \cdot OD \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{AO^2\sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} = \frac{21\sqrt{3}}{4} \cdot 2 + \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{49\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{100\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$$

Ответ:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{AOD}} = \frac{25\sqrt{3} \cdot 4}{49\sqrt{3}} = \frac{100}{49}$$

5.

Черновик

$$\frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2$$

$$\Downarrow$$

$$x^2y^2 = 2 - \frac{2}{x^2+y^2} = \frac{2(x^2+y^2)-2}{x^2+y^2}$$

$$x^4+y^4+3x^2y^2=5$$

$$\Downarrow$$

$$(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5$$

$$\Downarrow$$

$$(x^2+y^2)^2 + \frac{2(x^2+y^2)-2}{x^2+y^2} = 5$$

$$\frac{(x^2+y^2)^3 + 2(x^2+y^2) - 5(x^2+y^2) - 2}{x^2+y^2} = 0$$

$t^3 - 3t - 2 = 0$ $\quad t = -1$

Черновик