Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005345**

ID профиля: **901179**

Вариант 9

Чистовик.

№2. $-4 \le x \le 6$.

Замена:

$a = \sqrt{x+4}$
$b = \sqrt{6-x}$.

Тогда $\begin{cases} a-b+4 = 2ab \\ b^2 = 10-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{a+4}{2a+1} \text{ (т.к. } 2a+1>0) \\ b^2 = 10-a^2 \end{cases}$

Тогда: $(a+4)^2 = (2a+1)^2(10-a^2)$

$\Leftrightarrow 2a^4 - 19a^2 + 2a^3 - 16a + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (a-3)(a+1)(2a^2+6a-1) = 0$.

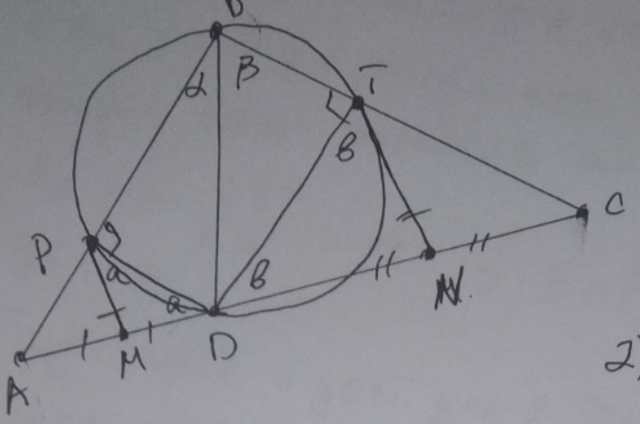
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-1 - \text{неуд.} \\ a = \frac{-6-\sqrt{44}}{4} < 0 - \text{неуд.} \\ a = \frac{-6+\sqrt{44}}{4}. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=5. \\ x = 3\sqrt{44}-15. \end{array}\right.$

Ответ: 5; $3\sqrt{44}-15$.

211005345 (U901179 M1273835)

Чистовик.

N1.



а)

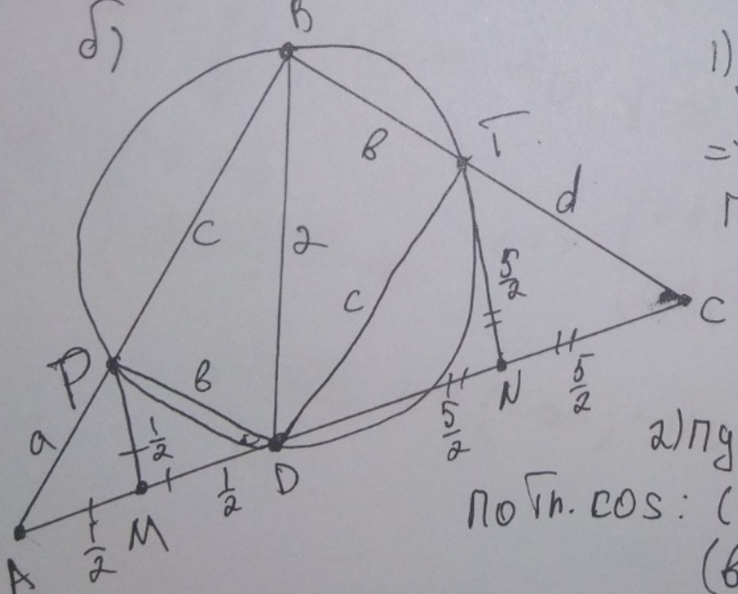
1) Т.к. BD – диаметр окр (PDT), то $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$
$\Rightarrow \angle APD = \angle DTC = 90^\circ$
$\Rightarrow \triangle APD$ и $\triangle DTC$ прямоуг.

2) M – сер. AD $\Rightarrow$ PM – мед. В прям. $\triangle APD \Rightarrow PM = MD$.
Аналог. $DN = TN = CN$.

3) Пусть $\angle ABD = \alpha$, $\angle DBC = \beta$, ~~TK~~, $\angle MPD = \angle MDP = a$, $\angle DTN = \angle NDT = b$, Т.к. PBTD впис., то $\angle PDT = 180^\circ - \alpha - \beta$
$\Rightarrow \angle PDM + \angle TDN = \alpha + \beta$
$\Rightarrow a + b = \alpha + \beta$.

4) $\angle PMD = 180 - 2a$, $\angle TND = 180 - 2b$
и, т.к. $PM \parallel TN$, то $180 - 2a + 180 - 2b = 180^\circ$
$\Rightarrow a + b = 90 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^\circ = \angle ABC$

б)



1) Пусть $AP = a$, $PD = b$, $TD = c$, $TC = d$.
Т.к. $\angle PBT = 90$, то PBTD – прямоугольник
$\Rightarrow PB = c$, $BT = b$. Из Th. Пифагора получим систему.

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 4 \\ a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 25 \\ (a+c)^2 + (b+d)^2 = 36. \end{cases}$$

2) Пусть $\angle BDA = \alpha$, тогда $\angle BDC = 180 - \alpha$.

По Th. cos: $(a+c)^2 = 5 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos\alpha$
$(b+d)^2 = 29 + 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \cos\alpha$.

$$\Rightarrow 5(a+c)^2 + (b+d)^2 = 54 \Rightarrow 4(a+c)^2 = 18 \Rightarrow a + c = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow b + d = \sqrt{36 - \frac{9}{2}} = 3\sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{(a+c)(b+d)}{2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{14}}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{9 \cdot 2 \cdot \sqrt{7}}{8} = \frac{9\sqrt{7}}{4}.$$

Ответ: а) 90° б) $\frac{9\sqrt{7}}{4}$.

Чистовик.

№3.

Рассмотрим первое ур-е отн. x. По усл., оно имеет реш.

$5x^2 + x(8y - 22a) + (4y^2 + 22a^2 - 20ay) = 0$

его дискр равен. $D = -(4y - 6a)^2 \Rightarrow 4y = 6a$ (иначе $D < 0$).

Т.е., $y = \frac{3}{2}a$, тогда $x = a$. Т.е. $A = (a; \frac{3}{2}a)$.

Найдём верш. параболы $ax^2 + 2a^2x - ay + 1 + a^3 = 0$.

$x_в. = -\frac{2a^2}{2a} = -a$.

$y_в. = \frac{1}{a}$. $\Rightarrow B = (-a; \frac{1}{a})$.

Тогда необх. и дост. усл-е того, чтобы т. A и B лежали по разные стороны от прямой $3x - y = 4$ равносильно совокуп. систем.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3a - \frac{3}{2}a < 4 \\ -3a - \frac{1}{a} > 4 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} 3a - \frac{3}{2}a > 4 \\ -3a - \frac{1}{a} < 4 \end{cases} (2) \end{array}\right.$$

(1): $\begin{cases} 3a < 8 \\ \frac{3a^2 + 4a + 1}{a} < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{8}{3} \\ \frac{(a+1)(3a+1)}{a} < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; \frac{8}{3}) \\ a \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; 0) \end{cases}$

$\Leftrightarrow a \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; 0)$.

(2): $\begin{cases} a > \frac{8}{3} \\ \frac{(a+1)(3a+1)}{a} > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (\frac{8}{3}; +\infty) \\ a \in (-1; -\frac{1}{3}) \cup (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow a \in (\frac{8}{3}; +\infty)$

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{3}; 0) \cup (\frac{8}{3}; +\infty)$.

черновик.

$y = \frac{3}{2}a.$

$x_1 = \frac{22a - 8y}{2} = 11a - 4y = 11a - 6a = 5a$

$A = \cancel{(\frac{3}{2}a; 5a)}.(5a; \frac{3}{2}a)$ $a\neq 2$

$B = (-a; \frac{1}{a}).$

$x_B = -\frac{2a^2}{2a} = -a.$

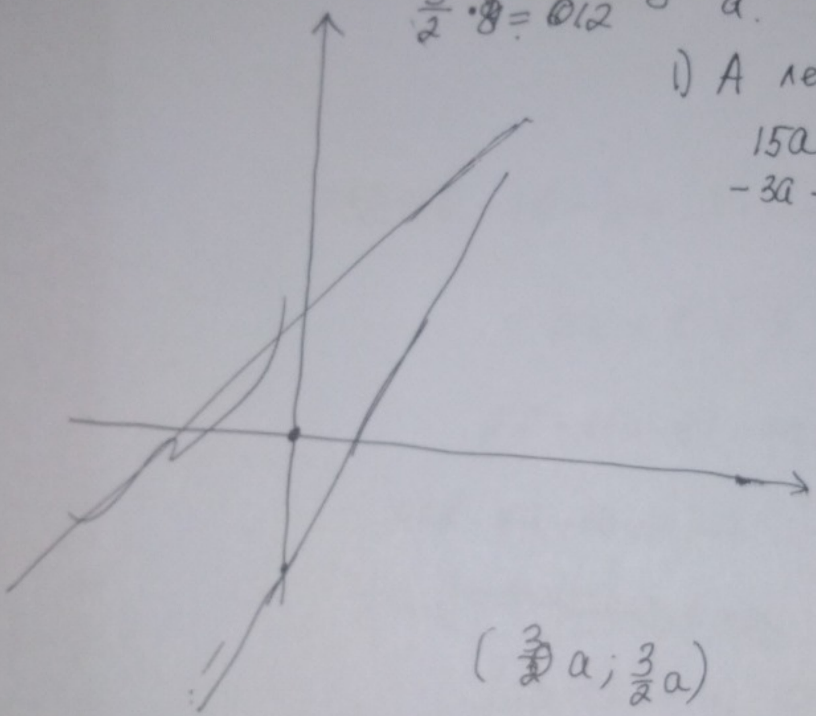
$x = \frac{22a - 8y}{10} = \frac{22a - 6a}{10}$

$= a.$

$y_B = a^3 - 2a^3 - ay + a^3 + 1 = 0.$

$y = \frac{1}{a}.$

$\frac{3}{2} \cdot 8 = 12$



1) A лев., вправ.

$15a - \frac{3}{2}a \le 4 \Leftrightarrow 27a \le 8$

$-3a - \frac{1}{a} \ge 4.$

$a \le \frac{8}{27}.$

$y = 3x - 4.$

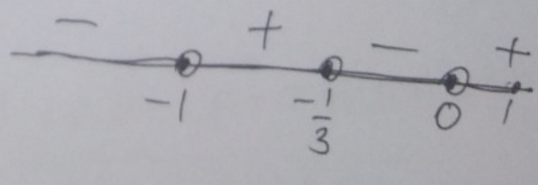
$x = 0.$

$(\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a)$

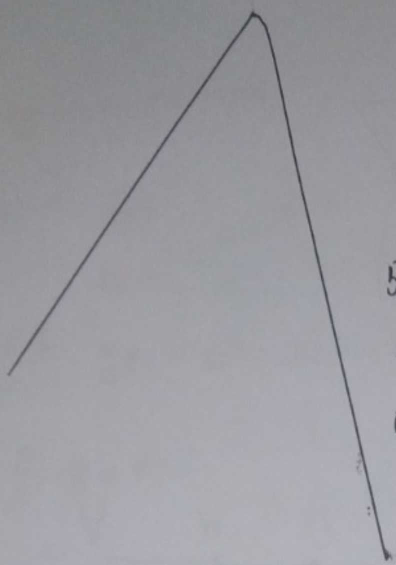
$3a + \frac{1}{a} + 4 \le 0$

$\frac{3a^2 + 4a + 1}{a} \le 0$

$\frac{(a+1)(3a+1)}{a} \le 0.$



черновик.

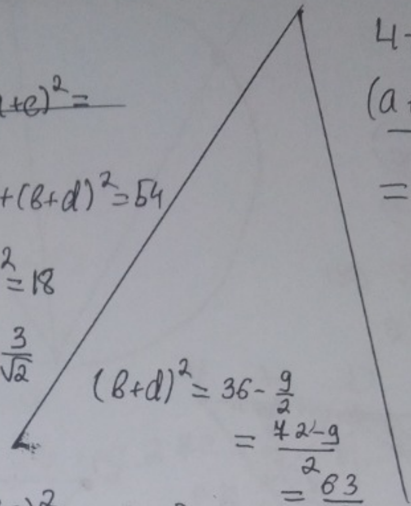


$\cancel{5(a+c)^2=}$

$5(a+c)^2+(b+d)^2=54$

$4(a+c)^2=18$

$(a+c)^2=\frac{3}{\sqrt{2}}$



$(b+d)^2=36-\frac{9}{2}$

$=\frac{72-9}{2}$

$=\frac{63}{2}.$

$10(a+c)^2+(b+d)^2=49.$

$4+1+2\cdot 2\cdot$

$\frac{(a+c)(b+d)}{2}$

$=\frac{3\cdot 3\sqrt{14}}{4}=\frac{9\sqrt{14}}{4}$

$\frac{(a+c)(b+d)}{2}=\frac{\sqrt{281\cdot 43}}{18.}$

$(b+d)=\frac{3\sqrt{14}}{2.}$

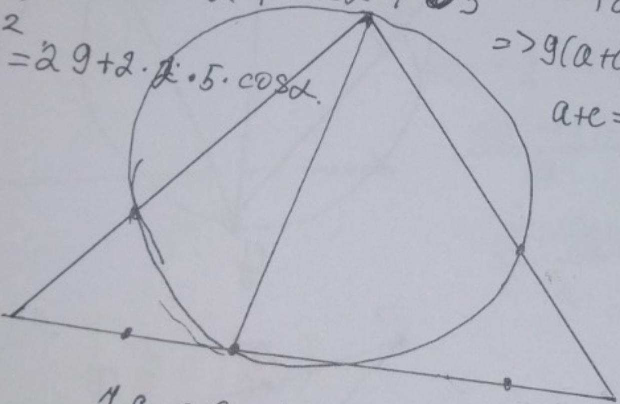
$BD=2.$

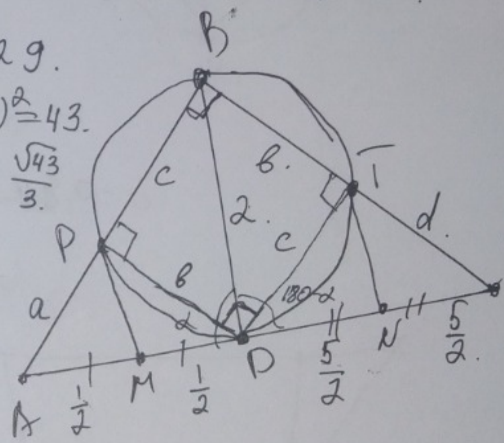
$(a+c)^2=5-2\cdot 1\cdot\cos\alpha\ 1\cdot 5 \quad 50+29.$

$(b+d)^2=29+2\cdot\cancel{2}\cdot 5\cdot\cos\alpha.$

$\Rightarrow 9(a+c)^2=43.$

$a+c=\frac{\sqrt{43}}{3.}$





$\cancel{(a+c)^2=1}$

$79-36=43.$

$a^2+\cancel{b^2+c^2}+d^2=26.$

$a^2+d^2=22.$

$c^2+b^2=4$

$a^2+b^2=1 \quad b^2=1-a^2$

$c^2+d^2=25$

$(a+c)^2+(b+d)^2=36.$

$\frac{b(a+c)}{2.}$

$\cancel{180+54}$

$(a+c)(b+d)-?$

$324-43$

$=300-19\ \cancel{ab+bc+}$

$=281.$

$\underbrace{a^2+c^2+b^2+d^2}_{26}+2ac+2bd=36.$

$ac+bd=5^{c}.$

$\frac{43}{9}+(b+d)^2=36$

$(b+d)^2=\frac{281}{9.}$

$(a+b+c+d)^2 \quad \cancel{c^2-a^2=3.}$

$b+d=\frac{\sqrt{281}}{3.}$

$281+43=$

$0 \le a \le \sqrt{10}$ черновик.

$a-b+4=2ab.$ $0 \le b \le \sqrt{10}.$

$b=-a+10.$

$a=\sqrt{x+4}$

$b=\sqrt{6-x}.$

$\begin{cases} a-b+4=2ab \Rightarrow b=\frac{a+4}{2a+1}. \\ \cancel{b^2=a^2+10}. \\ b^2=10-a^2. \end{cases}$

$(a+4)^2=(2a+1)^2(10-a^2).$

$a^2+8a+16=(4a^2+4a+1)(10-a^2)=$

$=-4a^4-4a^3+39a^2+40a+10.$

$\cancel{5a^4-32a+6-4a^3}$

$4a^4-38a^2+4a^3-32a+6=0.$ $a=5)$

$2a^4-19a^2+2a^3-16a+3=0$ $+12$

$4P$

$\cancel{(a-5)(2a^3 \ldots +12a^2+}$

$(a-3)(2a^3+8a^2+5a-1)=0.$

$-2+8-5-1.$

$(a-3)(a+1)(2a^2+6a-1)$

$x+4=\frac{80-12\sqrt{44}}{4}.$

$x=\frac{64-12\sqrt{44}}{4}.$

$\frac{44+36-12\sqrt{44}}{}$

$\frac{24+12\sqrt{44}-64}{4}$

$b= =\frac{12\sqrt{44}-40}{4}$

$D=36+4\cdot2$
$=44$

$a_1=\frac{-6-\ldots}{4}$

$a_1=\frac{-6+\sqrt{44}}{4}.$

211005345 (U901179 M1273835)

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{(x+4)(6-x)}$. $x=5$ - корень.

$-4 \le x \le 6$

$x=-3$.

$1-3+4$
$\shortparallel$
2.

$x+4=6$ $\quad 16 + x + 4 + 6 - x - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} + 8(\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x}) = 2\sqrt{(x+4)(6-x)}$.

$26 + 8(\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x}) = 4\sqrt{(x+4)(6-x)}$.

$26 + 8(a-b) = 4ab$. $\quad a = \sqrt{x+4}$ $\quad 6 \ge x \ge -4$

$b = \sqrt{6-x}$.

$4ab - 8a + 8b - 26 = 0$.

$\cancel{2ab-4a+4b-13=0}$

$2\sqrt{6-x} \ge 4$.

$\sqrt{6-x} \ge 2 \Rightarrow x \le 2$.

$x=5$.

$(2a+4)(2b-4) - 10 = 0$.

$(2\cdot 3+4)\cancel{12}-1$.

10

$10 - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} = 4((x+4)(6-x) + 16 - 4\sqrt{(x+4)(6-x)})$

$14\sqrt{(x+4)(6-x)} = 4(x+4)(6-x) + 54$. $\quad 96+54$

$7\sqrt{(x+4)(6-x)} = -4x^2 + 8x + 150$.

$49(-x^2+2x+24) = 16x^4 + 64x^2 + 22500 - 1200x^2 - 64x^3 + 2400x$.

$16x^4 \cancel{+113x^2} - 1087x^2 - 64x^3 + 2302x + 22500 = 0$

$(x-5)(16x^3 - 4x^2 - 1107x$

$-4 \quad -10 \quad \cancel{-1107x}$

$\cancel{-5635x}$.

211005345 (U901179 M1273835)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005345**

ID профиля: **901179**

Вариант 9

Чистовик.

№4.

Замена: $a=(xy)^2$, $a \geq 0$

$b=x^2+y^2$, ~~[illegible]~~. $b>0$ (т.к. x^2+y^2 не может быть равно 0)

$$\begin{cases} \frac{2}{b}+a=2 \ (1) \\ b^2+a=5 \ (2), \end{cases}$$ вычтем (1) из (2) и получим:

$$\begin{cases} b^3-3b-2=0 \\ b^2+a=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b^2+2b+1)(b-2)=0; \quad b=-1 - \text{неуд.} \\ b^2+a=5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ (xy)^2=1 \end{cases}$$

Значит числа x^2 и y^2 удовл. корнями ур-я $x^2-2x+1=0$

$\Rightarrow x^2=y^2=1 \Rightarrow$ решения: $(1;1)$; $(-1;1)$; $(1;-1)$; $(-1;-1)$

Ответ: $(1;1)$; $(-1;1)$; $(1;-1)$; $(-1;-1)$.

211005345 (U901179 M1273836)

Чистовик.

№5. Пусть A и B – выбр. точки. Заметим, что $y=59-x$ и $y=x$ – диаг. квадр.
Разобьем задачу на случаи.

1) A и B на одной и той же диаг. (заметим, что здесь любое располож. удовл. условию).

2) A и B на разных диагоналях.

3) A на какой-то из диаг., B ни на одной из диаг.

(случай с B на диаг., а A не на диагонали лишний, поскольку ~~тогда некоторые располож. будут посчитаны дважды~~ варианты, отличающиеся заменой A на B и B на A, очевидно, не являются различными).

1). если A и B на диаг. $y=x$, то способов их расст. – C_{58}^2, аналог., если A и B на $y=59-x$, то способов C_{58}^2. Заметим, что т.к. сторона кв. нечётна, то у диаг. нет общих узлов. Значит в этом случае $2\cdot C_{58}^2$ различных располож.

2). Не наруш. общ. можно считать, что A лежит на $y=x$, а B на $y=59-x$. Способов выбрать A – 58, и независимо от них B выбир. 56 способами (т.к. на $y=59-x$ есть две точки C и D такие, что $AC \parallel Ox$ и $AD \parallel Oy$). Итого в этом случае $58\cdot56$ способов.

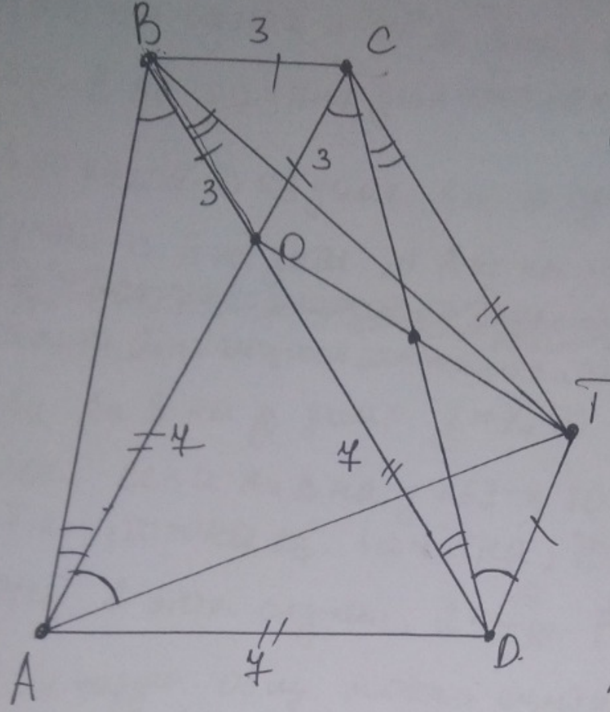
3). Найдём кол-во расст. для случая, когда A лежит на $y=x$ и умножим на 2 (ничего не посчит. дважды, т.к. B не леж. ни на одной из диаг.). Способов выбрать A – 58. Теперь в квадрате ост. 58^2-1 клетка. Нам нельзя ставить на прямые $y=x$ и $y=59-x$ — ещё минус $(57+58)$ клеток, а так же на одну вертикаль и горизонталь с A – минус $(56+56)$ клеток.
Итого способов выбрать B: $58^2-4\cdot57$.
Тогда всего в этом случае: $2\cdot58\cdot(58^2-4\cdot57)$

И в итоге: $58(56+57+2\cdot58^2-8\cdot57)=340\,330$ способов.

Ответ: 340 330.

Чистовик.

N 8.



а)

1) $\angle BDA = \angle DBC = 60°$

$\Rightarrow$ ABCD – трапеция.

И т.к. AC = BD, то она равнобокая, а значит вписана в окр.

$\Rightarrow \angle ACD = \angle ABD$, $\angle CDB = \angle CAB$.

2). OCTD – параллелограмм, т.к. диаг. т. пересеч. делятся пополам.

$\Rightarrow CT \parallel BD$, $OC = TD = OB = BC$.

$\Rightarrow$ BCTD – равнобокая трапеция

Аналогично ACTD – равноб. трап.

3). $\angle OCD = \angle CDT$, и, т.к. ACTD равноб. трапеция, то $\angle CDT = \angle CAT$.

$\angle ODC = \angle DCT = \angle BTC$, т.к. BCTD равнобокая трапеция.

Тогда: $\angle BAT = \angle ABT = \angle OCD + \angle ODC = 180° - \angle COD = \angle AOD = 60°$

$\Rightarrow \triangle ABT$ – правильный, чтд.

б). $S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD \cdot \sin 60°}{2} = \frac{10 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 25\sqrt{3}$.

$S_{BAT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$ (т.к. $\triangle ABT$ – прав.)

По т. cos. для $\triangle AOB$: $AB^2 = 7^2 + 3^2 - 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot \cos 120°$

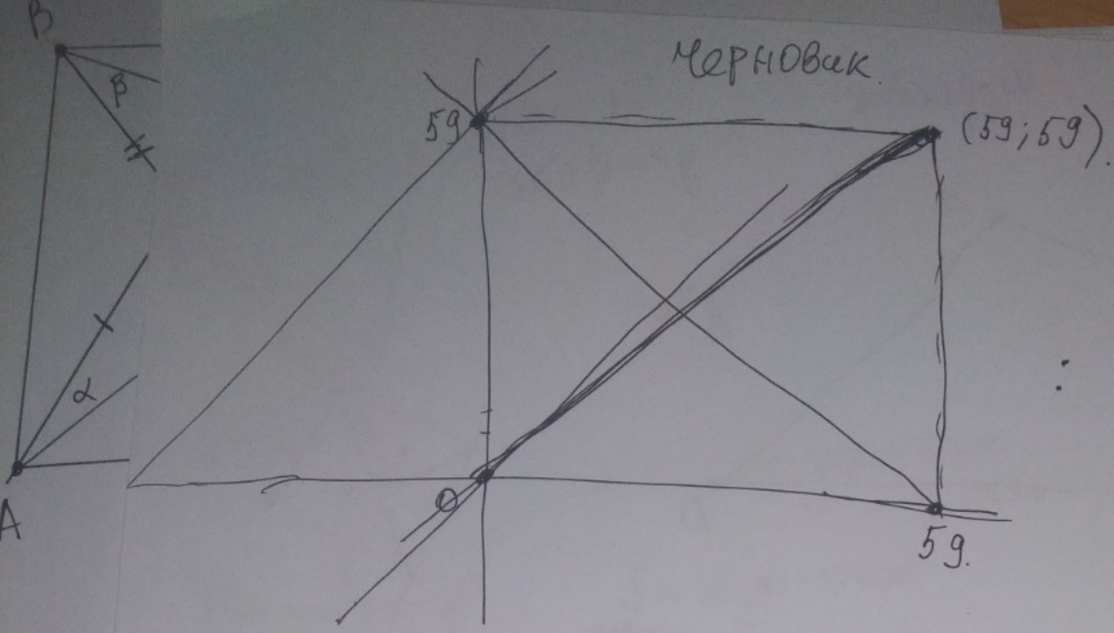
$= 49 + 9 + 21 = 79$. $\Rightarrow S_{BAT} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{25\sqrt{3}} = \frac{79}{100}$

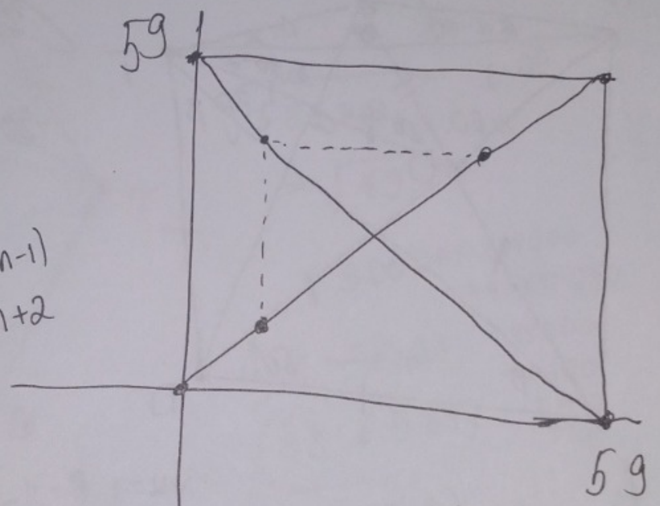
Ответ: б) $\frac{79}{100}$.

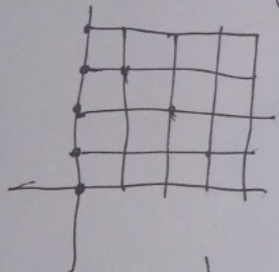
211005345 (U901179 M1273836)

черновик.



$(x_1; y_1)$
$(x_2; y_2)$





$(n-1)^2-(n-1)$
$=n^2-n+2$

$(n-1)\cdot(n^2-n+2)$

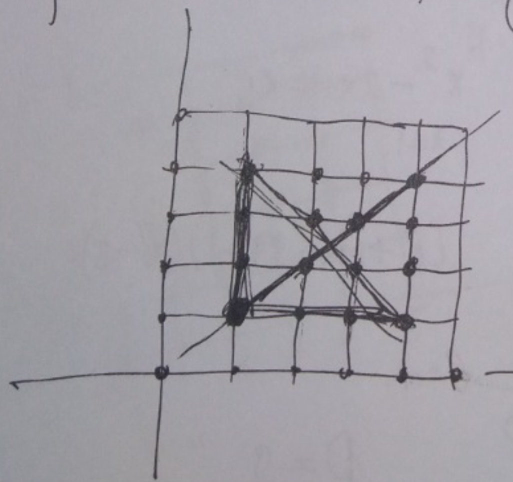
~~58·58~~

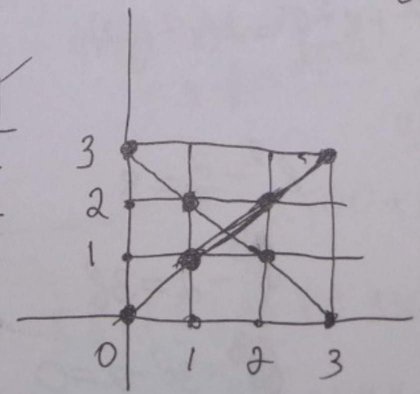
$2\cdot(1+2\cdot 2^2-8\cdot 1)$
$=2\cdot(1+8-8)=8.$

60 узлов на кажд. диаг.

~~$4\cdot 4-4\cdot 2=8.$~~

$2\cdot 2-$





58·

$\frac{57\cdot 58}{2}$

$4\cdot 4$

1) Т. на одн. диаг.

2) Не на од. диаг.

3) Т. на разн. диаг.

1) $57\cdot 58$

~~$4\cdot 2$~~

$58^2-1.-2\cdot 57$

$58^2-58-58-56-56.=58^2-2\cdot 57.$

2). $58\cdot 56.$

3) $2\cdot(58\cdot(58^2-4\cdot 57))$.

$4^2-4-4-2-2=5.$

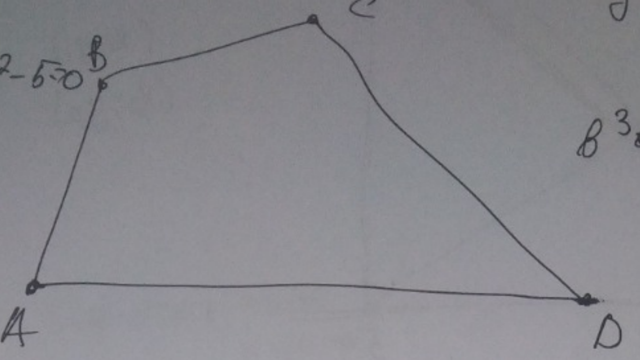
$\frac{2}{a+b}+ab=2.$ Черновик.

$x^2=a,\ a\geq 0$

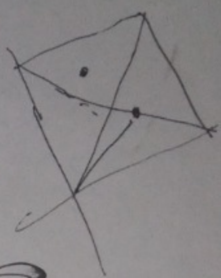
$y^2=b,\ b\geq 0.$

x^2+3

$a^2+3ab+b^2-5=0$



b^3

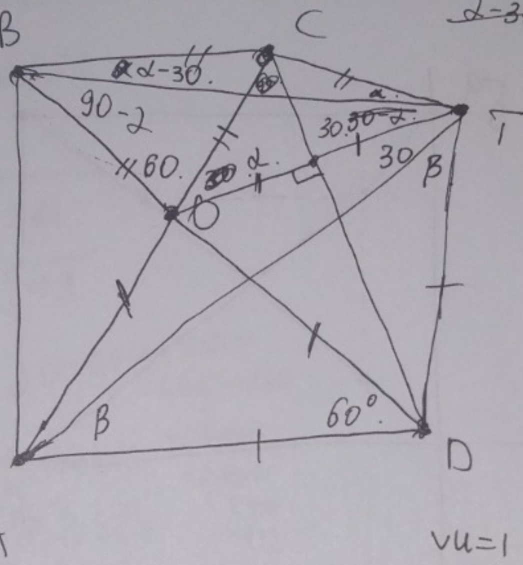


$D=9b^2-4b^2+20$

$\cancel{=5b^2+20}$

$\cancel{\alpha=30}$

$120-2\alpha.$



$-1;\ 1.$

$\frac{2}{2}+1$

$1+1+3$

$x^2y^2=a$

$x^2+y^2=b$

$2+x^4y^2+x^2y^4=2(x^2+y^2)$

$vu=1$

$u+v=2.$

$x^2-2x+1=0.$

$x=1.$

$\frac{2}{b}+a=2.$

$b^2+a=5.$

$b^2-\frac{2}{b}=3$

$b^3-2=3b$

$b^3-3b-2=0$

$(b+1)(b+1)(b-2)$

$b=2.$

$a=1$

$b=-1.$

$D=9$

$b_1=\frac{1-3}{2}=$

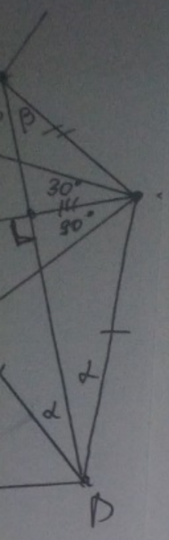
$x^2y^2=1$

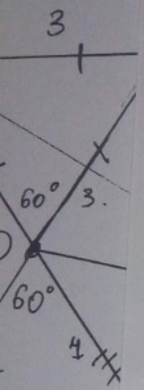
$x^2+y^2=2$

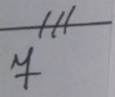
$x^2=y^2=1$

$\cancel{(b+1)(b^2-b-2)}=0.$

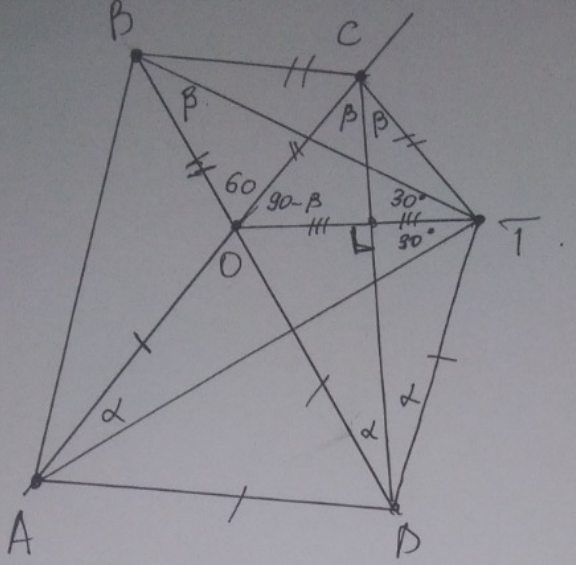
$(b+1)(b^2$



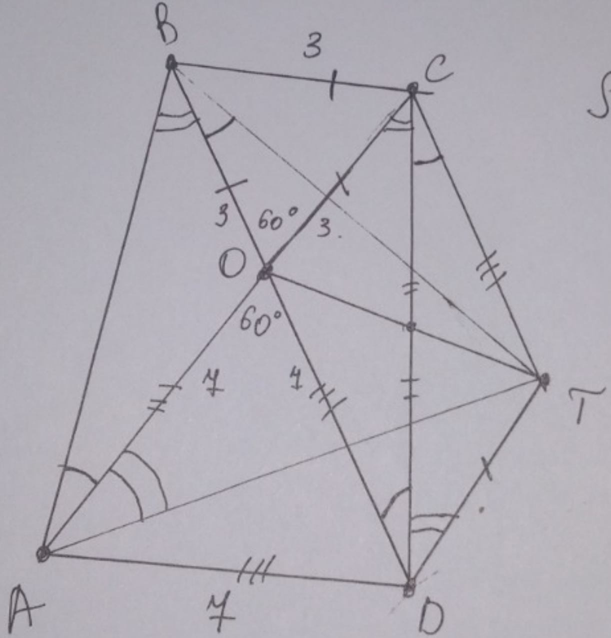




Черновик.



$364000 + 3330 = 340330$



$$S = \frac{10 \cdot 10}{2} \cdot \sin 60 = 25\sqrt{3}$$

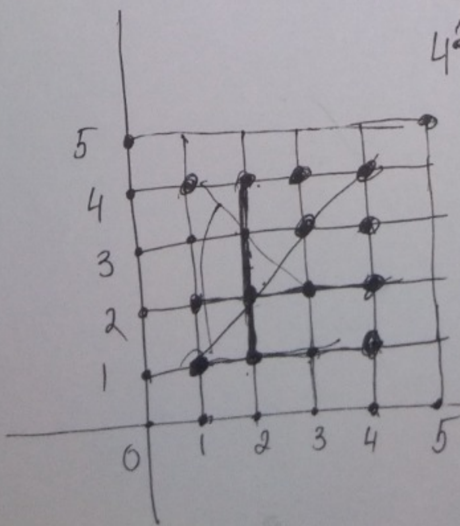
$$\sqrt{58 + 321} = \sqrt{49}$$

$300000 + 15000 + 4000 + 250 + 48000 + 2400 + 640 + 40$

$58 \cdot \cancel{3021}$

$58 \cdot 6335$

$4^2 - 4 \cdot 3 = 4$



$$4 \cdot (2 + 3 + 2 \cdot 4^2 - 8 \cdot 3) = 4 \cdot (5 + 32 - 24) = 4 \cdot 13 = 52$$

3021

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$2500 + 800 + 64 = 3364$$

$$58 \cdot (\underbrace{56 + 57}_{113} + 3364 - 456 = 3477 - 456)$$

211005345 (U901179 M1273836)