Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005324**

ID профиля: **369894**

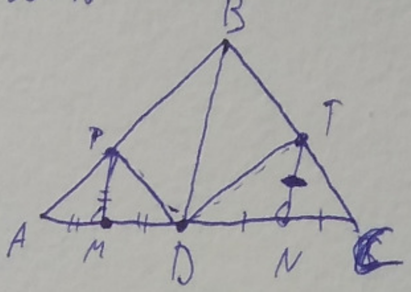
Вариант 9

Чистовик

Бухреев Егор

Задача 1.

а)



т.к. BD – диаметр, то $\angle DPB = \angle DTB = 90°$ => PM и TN – медианы в прямоугольных тр-ках APD и DTC => $PM = AM = MD$
$TN = DN = NC$

т.к. $PM \parallel TN$ то $\angle AMP = \angle DNT = 2\alpha$

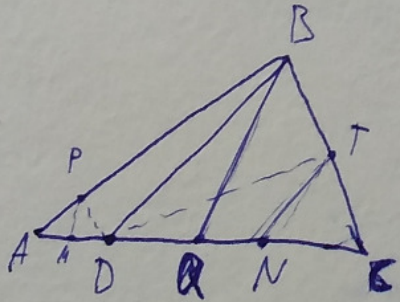
~~так~~ т.к. $PM = DM$ то ~~т~~ $\angle MDP = \alpha$ ($\angle$ AMP внешний смежный к $\angle DMP$)

$\angle NDT = 90° - \alpha$ (т.к. $\angle DNT = 2\alpha$ и $DN = TN$) => $\angle PDT = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$

=> т.к. $BTDP$ – вписанный то $\angle PDT = 180° - \angle PBT = 90°$ => $\angle PBT = 90°$ => $\angle ABC = 90°$

Ответ: $\angle ABC = 90°$

б)



1

т.к. $TN = \frac{1}{2}DC$ то $DC = 5$ аналогично $AD = 1$

проведем медиану BQ тогда $BQ = \frac{1}{2}AC = 3$ $DQ = AQ - AD = 2$ =>

рассмотрим треугольник DBQ пусть $\angle DQB = \alpha$ тогда по теореме косинусов $2^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ => т.к. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ то $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$

=> $S_{AQB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot 3^2 = \frac{9\sqrt{7}}{8}$ т.к. $S_{AQB} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ (BQ – медиана) то $S_{ABC} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$ Ответ: $S_{ABC} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$

Чистовик

Бузуев Егор

Задача 2

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4=2\sqrt{24+2x-x^2}$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=2\sqrt{(x+4)(6-x)}-4$

$\cancel{2x}\ 10-2\sqrt{(x+4)(6-x)}=4(x+4)(6-x)+16-16\sqrt{(x+4)(6-x)}$

пусть $k=\sqrt{(x+4)(6-x)}$

$\Rightarrow\ 2k^2-7k+3=0$

$k=\frac{1}{2}\quad k=3$

$\Rightarrow\ -x^2+2x+24=\frac{1}{4}$ или $-x^2+2x+24=9$ (квозвели в квадрат)

$x=5\quad x=-3$

$D=4+4\cdot 23\frac{3}{4}=4+95=99$

$x=\frac{2\pm3\sqrt{11}}{2}$ $\quad\frac{2-3\sqrt{11}}{2}<-4$ не подходит (т.к. иначе $\sqrt{x+4}$, $x+4<0$)

проверка

$x=5$ $\qquad x=-3$

$9-1+4=2\cdot3$ $\qquad 1-3+4=2\cdot3$

$6=6$ $\qquad 2\neq6$

подходит $\qquad$ не подходит

$x=1+\frac{3}{2}\sqrt{11}$

$\sqrt{5+\frac{3}{2}\sqrt{11}}-\sqrt{5-\frac{3}{2}\sqrt{11}}+4=1$

$\sqrt{5+\frac{3}{2}\sqrt{11}}-\sqrt{5-\frac{3}{2}\sqrt{11}}=-3$

>0

$5-\frac{3}{2}\sqrt{11}<0$ не подходит

$\Rightarrow$ Ответ: 5

211005324 (U369894 M1273729)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211005324**

ID профиля: **369894**

Вариант 9

Чистовик

Треугольники BCT, OTC, ABO равны по 2 сторонам и углу между

ними $S_{OCD} = \frac{1}{2} \cdot \sin 120^\circ \cdot 3 \cdot 7 = \frac{21\sqrt{3}}{4}$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{ADO} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 7 \cdot 7 = \frac{49\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{OCD} + S_{ADO} + S_{BOC} = \frac{(42+9+49)\sqrt{3}}{4} = \frac{100\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{79\sqrt{3}}{4}}{\frac{100\sqrt{3}}{4}} = \frac{79}{100}$$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{79}{100}$

Задача 5

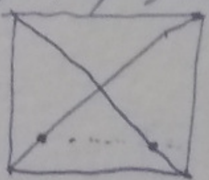
Давайте найдем количество "плохих" пар т.е. количество пар не удовлетворяющих условию

1. найдем количество пар где ни одна точка не лежит на диагоналях квадрата ($y=x$ и $y=59-x$)

всего точек в квадрате 58^2 на диагоналях лежит $2\cdot 58$ => всего точек вне диагоналей $58\cdot 56$ => кол-во пар где ни одна точка не лежит на диагонали $\frac{58\cdot 56(58\cdot 56-1)}{2}$

2. найдем количество пар, где ровно одна лежит на диагонали а другая лежит на той же вертикали или горизонтали

рассмотрим горизонталь



точку которая не лежит на диагонали мы можем выбрать $58-2=56$ (2 — на диаг.)

2 точку (на диагонали) мы можем выбрать 2 способами ($y=x$ или $y=59-x$) => в 1 горизонтали кол-во "плохих" пар где одна лежит на диагонали, а другая нет $56\cdot 2$

всего горизонталей 58 => плохих по горизонталям $58\cdot 56\cdot 2$

аналогично по вертикалям => "плохих" 2 типа $58\cdot 56\cdot 2\cdot 2$

3. Кол-во "плохих" где обе на диагоналях их $58\cdot 2$ (по одной на каждой гориз. и вертикали)

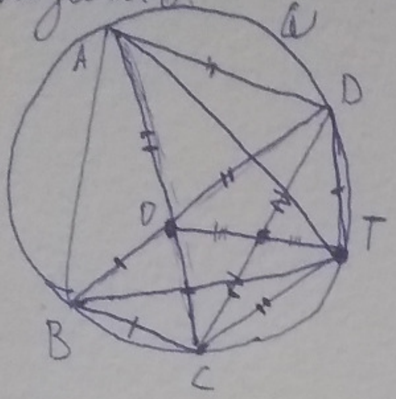
4. всего точек 58^2 => всего расстановок $\frac{58\cdot 58(58\cdot 58-1)}{2}$

=> Кол-во хороших расстановок $\frac{58\cdot 58(58\cdot 58-1)}{2} - \frac{58\cdot 56(58\cdot 56-1)}{2} - 58\cdot 56\cdot 4 - 58\cdot 2 = 3904850$

Ответ: 3904850

Чистовик

Задача 6.



а) Докажем что ABCTD - вписанный

Опишем вокруг ABC окружность т.к. $\angle BCA = \angle ADB = 60^\circ$

то ABCD - вписанный как углы опирающиеся на одну дугу

OCTD - параллелограм (диагонали делятся точкой пересечения пополам)

$\Rightarrow \angle CTD = \angle COD = 180^\circ - \angle COB = 120^\circ$

$\Rightarrow$ т.к. $\angle CTD + \angle CAD = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ то $T \in \omega$

$\Rightarrow \angle ATB = \angle ADB = 60^\circ$ как опирающиеся на одну дугу

$\angle CBT = \angle CDT$ опираются на одну дугу

аналогично $\angle BTC = \angle ODC$

$OC \parallel DT$

$\angle CDT = \angle DCO \Rightarrow$

$OC \parallel DT$

2

$\Rightarrow \angle CBT + \angle BTC = \angle OCD + \angle ODC = 180^\circ - \angle COD = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle BCT = 120^\circ \Rightarrow$ т.к. $\angle BAT + \angle BCT = 180^\circ$ то $\angle BAT = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\Rightarrow$ т.к. $\angle BAT = \angle BTA = 60^\circ$ то ABT - равносторонний ч.т.д.

б) $BC = 3$ $CT = OD = AD = 7$ $\angle BCT = 120^\circ$ (см. выше) $\Rightarrow$

OCDT - параллелограмм; ADO - равносторонний

$\Rightarrow$ по теореме косинусов $BT^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \cos 120^\circ = 58 + 3 \cdot 7 = 79$

$\Rightarrow BT = \sqrt{79}$ $\Rightarrow S_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{79} \cdot \sqrt{79} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$

Чистовик

Задача 4. (1)

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2}+x^2y^2=2 & (1) \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 & (2) \end{cases}$$

$x^4+y^4+3x^2y^2=(x^2+y^2)^2+x^2y^2$

$\Rightarrow (2)-(1) = (x^2+y^2)^2-\frac{2}{x^2+y^2}=3$

пусть $t=x^2+y^2 \geq 0$

$\Rightarrow t^2-\frac{2}{t}=3$

$t^3-2-3t=0$

$t^3-2-3t=(t+1)^2(t-2)$

$t=-1$ не подходит т.к. $t \geq 0$

$\Rightarrow t=2 \Rightarrow x^2+y^2=2$ подставим в (1)

$\frac{2}{2}+x^2y^2=2$

$\Rightarrow x^2y^2=1$

подставим в (2)

~~$x^4+y^4+3=5$~~

~~$x^4+y^4=2 = x^2+y^2$~~

$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x^2y^2=1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теореме виета $(x^2; y^2)$ корни квадратного уравнения $k^2-2k+1=0$

$k_1=1$

$k_2=1$ $\Rightarrow x^2=1$

$y^2=1$

$\Rightarrow x=\pm 1$

$y=\pm 1$

Ответ: $(1;1); (1;-1); (-1;1); (-1;-1)$.