Часть 1

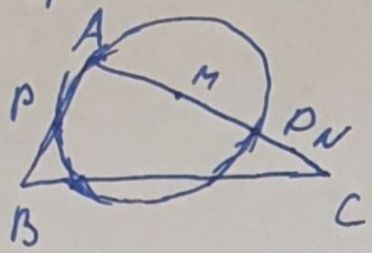
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211005165**

ID профиля: **810690**

Вариант 9

Черновик.



$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

$x \geqslant -4$ $\quad x \leqslant 6 \quad x^2-2x-24\leqslant 0. \Rightarrow \boxed{x\in[-4;6]}$

$\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}+4 = 2\sqrt{(6-x)(x+4)} = (\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x})^2-10$

$u - b + 4 = 2ub.$

$x+4-2\sqrt{(x+4)(6-x)}+6-x = 4(24+2x-x^2)+16-16\sqrt{(x+4)(6-x)}.$

$t^2-10=t+4. \Rightarrow \cancel{t^2-t}$ $\quad t^2-t-14=0$

$\frac{1+\sqrt{57}}{2} = \sqrt{x+4}+\sqrt{6-x}$ $\quad t=\frac{1\pm\sqrt{57}}{2}$ $\quad \sqrt{396}$

$\sqrt{03'96}$,

$\frac{58+2\sqrt{57}}{4} = 10-2\sqrt{(x+4)(6-x)}.$

$396 \mid 4$
$36 \quad 99$
36

$16+4\cdot 95 = 396$

$\frac{4\pm\sqrt{\cancel{36}396}}{4} = \frac{4\pm 6\sqrt{11}}{4} = \frac{2\pm 3\sqrt{11}}{2}.$

$\frac{2+3\sqrt{11}}{2}\leqslant 6$ $\quad 3\sqrt{11}\leqslant 10.$ $\quad 99\leqslant 100.$

$\frac{2-3\sqrt{11}}{2} \geqslant -4 \Rightarrow 10\geqslant 3\sqrt{11}.$ $\quad 100 \geqslant 99.$

$26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0.$

if $a=0$ $\quad 5x^2+8xy+4y^2=0 \Rightarrow 4x^2+(x+y)^2+\cancel{8y}=0.$

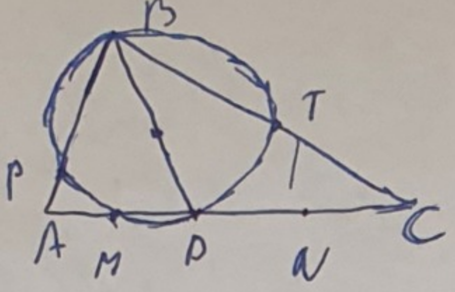
$\cancel{26a^2-2ax}$

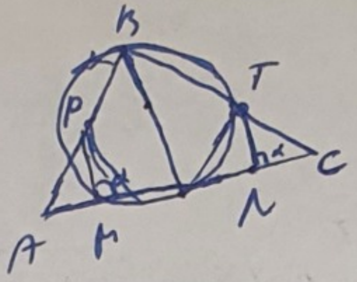
$4(x+y)^2-20a(x+y)+26a^2-2ax+x^2 = 4(x+y)^2-20a(x+y)+(x-a)^2+25a^2=0.$

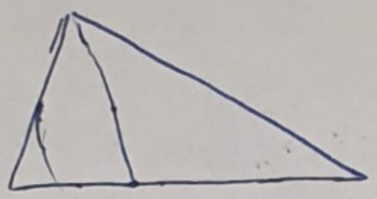
$(2(x+y)-5a)^2+(x-a)^2=0. \Rightarrow x=a.$

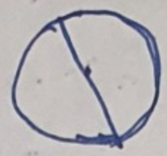
$2a+2y-5a=0. \quad y=-\frac{3}{2}a.$

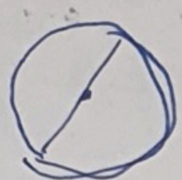
Черновик

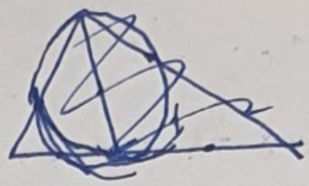


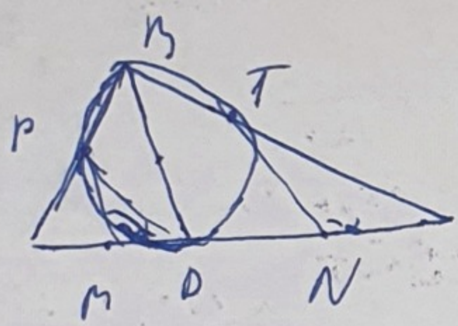


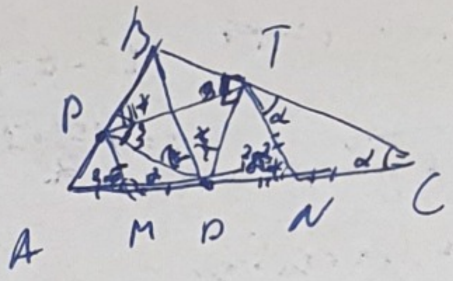




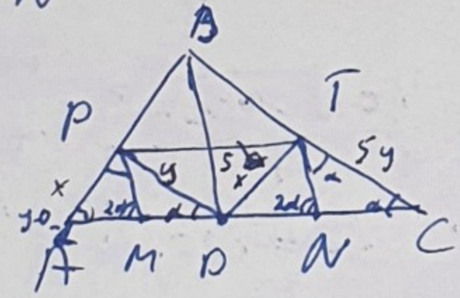








$6\sqrt{y^2+x^2}=6$



$\cos\alpha = y$

$\sin\alpha = x.$

$AD=1 \quad CD=5. \quad BD=2.$

$25y^2+\frac{25}{4}-2\cdot 5y\cdot\frac{5}{2}\cdot y=\frac{25}{4}$

$\sqrt{25x^2+y^2}=4$

$x^2+y^2=1.$

$$\frac{8\pm\sqrt{8^2+4\cdot4\cdot35}}{2\cdot4}=\frac{2\pm\sqrt{4+35}}{2}$$

211005165 (U810690 M1278498)

Чистовик. Лист 1.

№2) $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{24+2x-x^2}$

$\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} + 4 = 2\sqrt{(x+4)(6-x)}$

ОДЗ: $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ (x+4)(6-x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq 6 \\ x \in [-4; 6] \end{cases} \Rightarrow x \in [-4; 6]$

Пусть $t = \sqrt{x+4} - \sqrt{6-x}$, тогда $t^2 = x+4+6-x-2\sqrt{(x+4)(6-x)} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\sqrt{(x+4)(x-6)} = 10 - t^2$.

$t + 4 = 10 - t^2 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -3 \text{ ①} \\ t = 2. \text{ ②} \end{array}\right.$

①: $t = -3$ $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = -3 \Rightarrow x+4+6-x-2\sqrt{(x+4)(6-x)} = 9. \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\sqrt{(x+4)(6-x)} = 1 \Rightarrow 4(24+2x-x^2) = 1 \Rightarrow 4x^2 - 8x - 95 = 0$

$x = \dfrac{4 \pm 6\sqrt{11}}{4} = \dfrac{2 \pm 3\sqrt{11}}{2}$; $\dfrac{2+3\sqrt{11}}{2} > 0$, проверим, что $\dfrac{2+3\sqrt{11}}{2} \leq 6$

$3\sqrt{11} \leq 10 \Rightarrow 99 \leq 100$, т.е неравенство верно.

Проверим, что $\dfrac{2-3\sqrt{11}}{2} \geq -4 \Rightarrow 10 \geq 3\sqrt{11} \Rightarrow 100 \geq 99$, что верно

Т.е оба корня подходят по ОДЗ.

② $t = 2$ $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2 \Rightarrow 10 - 2\sqrt{(x+4)(6-x)} = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3 = \cancel{2}\sqrt{(x+4)(6-x)} \Rightarrow 24+2x-x^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Оба корня подходят по ОДЗ.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 5 \\ x = \dfrac{2 \pm 3\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.$

Чистовик. Лист 2.

№3) 1: $26a^2-22ax-20ay+5x^2+8xy+4y^2=0$ – точки A.

2: $ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$ – параболы.

Заметим, что при $a=0$ ур-ние 2 не имеет решений ($1\neq 0$)

Преобразуем выражение 1.

$4y^2+8xy+5x^2-20ay-22ax+26a^2=0$

$(2y)^2+(2x)^2+(5a)^2+2\cdot 2x\cdot 2y-2\cdot 5a\cdot 2x-2\cdot 5a\cdot 2y+x^2-2ax+a^2=0$

$(2y+2x-5a)^2+(x-a)^2=0$

Т.к $\begin{cases}(2y+2x-5a)^2\geq 0\\ (x-a)^2\geq 0\end{cases}$, то $\begin{cases}2y+2x-5a=0\\ x-a=0\end{cases}$ => $x=a$

$2y+2a-5a=0$ => $y=\frac{3}{2}a$. Итого $A_x=a$ $A_y=\frac{3}{2}a$.

Преобразуем выражение 2.

$ax^2+2a^2x-ay+a^3+1=0$ => $y=x^2+2ax+a^2+\frac{1}{a}$ $(a\neq 0)$.

Т.к т. B – вершина, то $B_x=\frac{-2a}{2}=-a$

$B_y=(-a)^2+2a(-a)+a^2+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$; Итого $B_x=-a$ $B_y=\frac{1}{a}$

Данные прямые $3x-y_e=4$ => $y_e=3x-4$;

Точки лежат по разные стороны от прямой, когда

$\begin{cases}y_e(A_x)<A_y\\ y_e(B_x)>B_y\end{cases}$ ① или $\begin{cases}y_e(A_x)>A_y\\ y_e(B_x)<B_y\end{cases}$ ②

① $y_e(A_x)=3a-4<\frac{3}{2}a$ => $\frac{3}{2}a<4$ => $a<\frac{8}{3}$

$y_e(B_x)=-3a-4>\frac{1}{a}$ => $3a+4+\frac{1}{a}<0$ => $\frac{3a^2+4a+1}{a}<0$.

$\frac{(a+1)(3a+1)}{a}<0$ $\quad$ − -1 + $-\frac{1}{3}$ − 0 + => $a\in(-\infty;-1)\cup(-\frac{1}{3};0)$.

от. сюда получим $a\in(-\infty;-1)\cup(-\frac{1}{3};0)$.

② $\begin{cases}3a-4>\frac{3}{2}a\\ -3a-4<\frac{1}{a}\end{cases}$ => $\begin{cases}a>\frac{8}{3}\\ a\in(-1;-\frac{1}{3})\cup(0;+\infty)\end{cases}$ => $a\in(\frac{8}{3};+\infty)$.

Объединяя эти множества получим

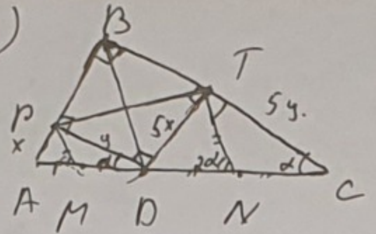
$a\in(-\infty;-1)\cup(-\frac{1}{3};0)\cup(\frac{8}{3};+\infty)$

Ответ: $a\in(-\infty;-1)\cup(-\frac{1}{3};0)\cup(\frac{8}{3};+\infty)$

211005165 (U810690 M1278408)

Чистовик. Лист 3.

№1)



$P \in AC$; ω - окр. с диаметром BD.

$P = \omega \cap AB$; $T = \omega \cap BC$.

$AM = MD$, $DN = NC$, $TN \parallel PM$

а) $\angle ABC$ - ?

б) S_{ABC} - ?, при $PM = \frac{1}{2}$; $NT = \cancel{2\alpha}\ \frac{5}{2}$

$BD = 2$.

а) ~~Т.к $\angle BPD$ опирается~~ Т.к BD - диаметр, а $P \in \omega$, то $\angle BPD = 90°$, аналогично $\angle BTD = 90°$.

Т.к M - середина AD, то PM - медиана в тр. APD. т.к $\angle P = 90°$, то $PM = MD = AM$. Аналогично TN - медиана $DTC \Rightarrow TN = DN = NC \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle AMP$ и $\triangle TNC$ - р/б $\Rightarrow \angle CTN = \angle NCT$ и $\angle APM = \angle MAP$.

Пусть $\angle NCT = \alpha$, тогда $\angle CTN = \alpha \Rightarrow \angle TND = \angle NCT + \angle CTN = \cancel{2\alpha}\ 2\alpha$

$PM \parallel TN \Rightarrow \angle AMP = \angle DNT = 2\alpha$.

$\angle PAM = \frac{180 - \angle AMP}{2} = \frac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$.

Итого $\angle BCA = \alpha$, $\angle BAC = 90 - \alpha \Rightarrow \angle ABC = 180 - \angle BCA - \angle BAC = 180 - \alpha - (90 - \alpha) \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ABC = 90°$.

б) $\angle PDA = 90° - \angle PAD = \alpha = \angle TCN$; $\angle APD = \angle DTC = 90 \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle APD \sim \triangle DTC$ по двум углам.

$AD = 2PM = 1$; $CD = 2NT = 5 \Rightarrow \frac{AP}{TD} = \frac{PD}{TC} = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{5}$

Пусть $AP = x$; $PD = y$, тогда $TD = 5x$ и $TC = 5y$.

$\angle B = 90° \Rightarrow \angle PDT = 90° \Rightarrow BTDP$ - прямоугольник, т.е $PT = BD = 2$.

$PB = TD = 5x$; $BT = PD = y$; $BP^2 + BT^2 = PT^2 \Rightarrow 25x^2 + y^2 = 4$.

$AP^2 + PD^2 = AD^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} 25x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 24x^2 = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$y = \sqrt{1 - x^2} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$; $AB = AP + PB = 6x = \frac{3}{\sqrt{2}}$; $BC = 6y = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$

Ответ: $\angle ABC = 90°$

$S_{ABC} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$

211005165 (U810690 M1278498)

Часть 2

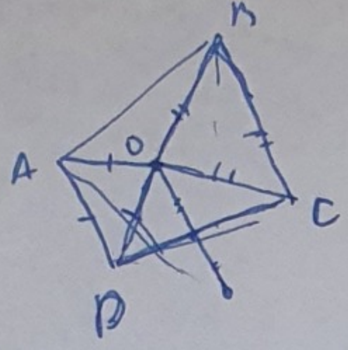
Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

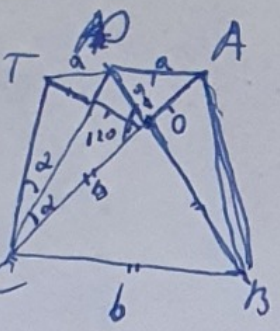
Шифр: **211005165**

ID профиля: **810690**

Вариант 9

Черновик.





$CD = AB = \sqrt{a^2+b^2+ab}$

$h = (a+b)\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{3(a+b)^2}{4} + \frac{(b-a)^2}{4} = a^2+b^2+ab.$

$120-\alpha.\quad 60-\alpha$

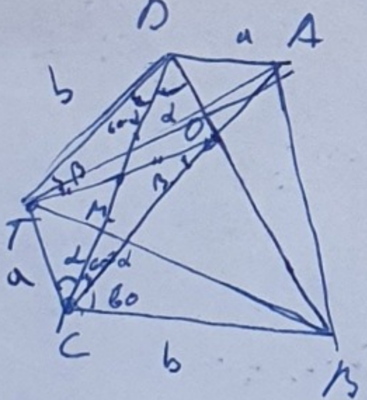
$180-2\alpha.$

$AT^2 = 2a^2 + 2a^2\cos 2\alpha = 2a^2 + 2a^2(2\cos^2\alpha - 1) =$

$= 4a^2\cos^2\alpha$

$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2+ab+b^2-a^2}{2b\cdot\sqrt{a^2+b^2+ab}} = \frac{2b^2+ab}{2b\sqrt{a^2+b^2+ab}} = \frac{2b+a}{2\sqrt{a^2+b^2+ab}}$

$\cos^2\alpha = \frac{4b^2+a^2+4ab}{4(a^2+b^2+ab)}$



$\angle CTD = 120°$

211005165 (U810690 M1278499)

(Черновик)

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2 = 5 \end{cases}$$

$(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5$

$a = x^2+y^2$

$b = x^2y^2$

$$\begin{cases} \frac{2}{a} + b = 2 \\ a^2+b = 5 \end{cases}$$

$a^2 - \frac{2}{a} = 3$

$a^3 - 3a - 2 = 0.$ $a \geq 0$

$a^3+0a^2-3a-2 \mid a+1$

$a^3+a^2 \qquad a^2-a-2$

$-a^2-3a$

$-a^2-a$

$-2a-2$

$(a+1)(a^2-a-2).$

$(a+1)^2(a-2).$

$a=2 \Rightarrow b=1.$

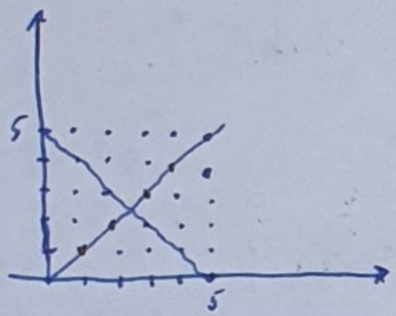
$$\begin{cases} x^2+y^2 = 2 \\ x^2y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u+w = 2 \\ uw = 1 \end{cases}$$

$x^2-2x+1=0$

$x=1$

$u=w=1$



$4\cdot15 + 4\cdot15 = 120.$

$6\cdot4\cdot2.$

$\cancel{\frac{57\cdot58\cdot56}{2}} - \frac{58\cdot56(58\cdot56-1)}{2} - 4\cdot58\cdot57+2\cdot58\cdot$

$\cancel{\frac{56\cdot57\cdot58^2 - 58\cdot56(58\cdot56-1)}{2}}$

$\cancel{\frac{58\cdot56(58\cdot57-58\cdot56+1)}{2}} = 56\cdot58\cdot59$

$\cancel{58^2\cdot57\cdot59}$ $\quad \frac{58^4-58^2-(58^4-4\cdot58^3+3\cdot58^2+2\cdot58)}{2} =$

$= 2\cdot58^3-2\cdot58^2-58-4\cdot58(58-1)+2\cdot58$

$2\cdot58^3-6\cdot58^2+5\cdot58 = 58^2\,6710+5\cdot58 = 58\cdot6385$

58×11: 58, 58, 638

6385×58: 51080, 31922, 370300

$\frac{58\cdot57\cdot59}{2} = 29\cdot57\cdot59\cdot58$

59×57: 413, 295, 3363

3363×29: 30267, 6726, 97527

211005165 (U810690 M1278499)

Чистовик. Лист 1.

№4) $\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ x^4+y^4+3x^2y^2=5 \end{cases}$ $x^2+y^2 \neq 0 \Rightarrow (x,y) \neq (0,0)$

$\begin{cases} \frac{2}{x^2+y^2} + x^2y^2 = 2 \\ (x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 5 \end{cases}$ Пусть $a = x^2+y^2$, $b = x^2y^2$

Очевидно, что $a > 0$ и $b \geq 0$

$\begin{cases} \frac{2}{a} + b = 2 \\ a^2+b=5 \end{cases} \Rightarrow a^2 - \frac{2}{a} = 3$ $a \neq 0 \Rightarrow a^3 - 3a - 2 = 0$

Заметим, что $a = -1$ является решением

$(a+1)(a^2-a-2)=0 \Leftrightarrow (a+1)^2(a-2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=+2 \\ a=-1 \end{array}\right.$

Т.к. $a > 0$, то $a = 2$; $b = 5 - a^2 = 1$

$\begin{cases} x^2+y^2 = 2 \\ x^2y^2 = 1 \end{cases}$ Пусть $u = x^2$, $w = y^2$

Тогда $\begin{cases} u+w=2 \\ uw=1 \end{cases}$ ~~Согласно теореме Виета числа u~~

$w \neq 0 \Rightarrow u = \frac{1}{w}$; $w + \frac{1}{w} = 2 \Rightarrow w^2 - 2w + 1 = 0 \Rightarrow (w-1)^2 = 0$

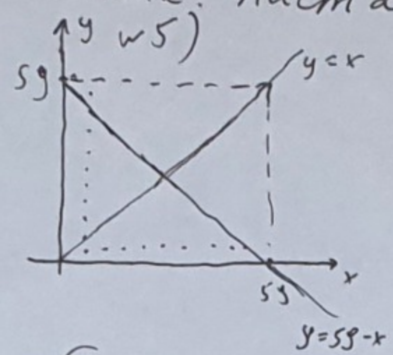
$\Rightarrow w = 1$; $u = \frac{1}{w} = 1$; Итого $u = w = 1$

$\begin{cases} x^2=1 \\ y^2=1 \end{cases}$ Отсюда получим 4 решения $(1,1), (1;-1), (-1,1)$ $(-1,-1)$

Ответ: $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$.

211005165 (U810690 M1278499)

Чистовик. Лист 2.



Заметим, что если $x \in \mathbb{Z}$, то $(59-x) \in \mathbb{Z}$, т.е прямые $y=x$ и $y=59-x$ пересекают все узловые точки, лежащие на диагонали.

Также заметим, что прямые $y=x$ и $y=59-x$ не пересекаются в узле ($x=59-x \Rightarrow x=\frac{59}{2} \notin \mathbb{Z}$)

Т.е они не имеют общих узлов.

Найдём кол-во способов выбрать два узла сетки так, чтобы хотя-бы один из них лежал на диагонали. Это число очевидно равно разности кол-ва способов выбрать два любых узла сетки и кол-ва способов выбрать два узла сетки, не лежащих на диагоналях.

$C^2_{58^2}$ – кол-во способов произвольно выбрать два узла сетки.

$C^2_{58^2-2\cdot58}$ – кол-во способов выбрать узлы не на диагоналях

$$C^2_{58^2} - C^2_{58^2-2\cdot58} = \frac{58^2(58^2-1)}{2} - \frac{(58^2-2\cdot58)(58^2-2\cdot58-1)}{2}$$

Среди этих способов найдём кол-во способов выбрать два узла, лежащих на параллельных осям прямых. Для каждого узла существует $2\cdot57$ точек (по вертикали и горизонтали), которые лежат с этой точкой на параллельной оси прямой.

Тогда выберем одну точку на диагонали и одну ей соответствующую на вертикальной и горизонтальной прямой. Таким образом будут дважды посчитаны случаи, когда обе точки лежат на диагоналях. Тогда таких способов $2\cdot58\cdot2\cdot57-2\cdot58$.

($2\cdot58$ – берём одну точку на диагонали и одну из двух точек на другой).

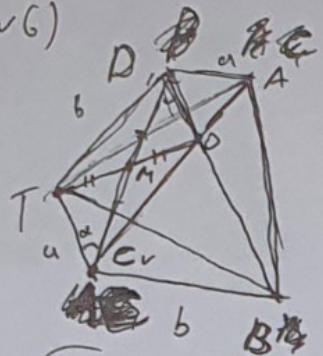
Итого способов $\frac{58^2\cdot(58^2-1)}{2} - \frac{(58^2-2\cdot58)(58^2-2\cdot58-1)}{2} - 2\cdot58\cdot2\cdot57 + 2\cdot58 =$
$= 370300.$

Ответ: 370300.

211005165 (U810690 M1278499)

Чистовик. ~~Лист~~ Лист 3.

№6)



$\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ – правильный.
$MD = MC$, $OM = TM$.

а) Док-ть ABT – правильный тр.

б) При $BC = 3$, $AD = 7$.

а) $\angle ADO = \angle OBA = 60^\circ \Rightarrow AD \parallel AB \Rightarrow$
$\Rightarrow ABCD$ – трапеция.

Пусть $AD = a$ ~~AB = b~~ $BC = b$, $\angle ODC = \alpha$

Тогда $CO = OB = b$, $AO = OD = a$

$OM = MT$, $MD = MC$, $\angle TMC = \angle DMO \Rightarrow \triangle TMC = \triangle DMO \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle TCM = \angle MDO = \alpha$ и $TC = OD = a$

$OM = TM$, $MC = MD$, $\angle CMO = \angle TMD \Rightarrow \triangle TMD = \triangle OMC \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle OCM = \angle TDM$ и $TD = OC = b$.

$\angle BCD = 180 - \angle CDA = 180 - (\alpha + 60) = 120 - \alpha$

$\angle OCM = \angle BCD - 60^\circ = 60^\circ - \alpha \Rightarrow \angle TDM = 60^\circ - \alpha$.

$\angle ADT = \angle TDM + \angle MDO + \angle ODA = 60^\circ + 60^\circ - \alpha + \alpha = 120^\circ$

$\angle TCB = \angle TCM + \angle MCO + \angle OCB = 60^\circ + 60^\circ - \alpha + \alpha = 120^\circ$

$\angle TCB = \angle TDA$, $TC = AD$, $BC = TD \Rightarrow \triangle TDA = \triangle BCT \Rightarrow AT = BT$.

По т. косинусов в $\triangle TDA$, $AT = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle TDA} = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$

По т. косинусов в $\triangle AOB$ ($\angle AOB = 180^\circ - \angle AOD = 60^\circ$):

$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle AOB} = \sqrt{a^2 + b^2 + ab}$, т.е. $AT = BT = AB$ ч.т.д.

б) При $a = 7$, $b = 3$ $AB = BT = AT = \sqrt{3^2 + 7^2 + 3 \cdot 7} = \sqrt{79}$

Площадь равностороннего треугольника со стороной x $S = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$

$S_{ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{79\sqrt{3}}{4}$; $S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{OBC} + 2S_{AOB}$

$S_{AOD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$; $S_{OBC} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$; $S_{AOB} = \frac{1}{2}ab\sin\angle AOB = \ldots$

$\ldots = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{4}$; $S_{ABCD} = \frac{49\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{42\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{79\sqrt{3}}{4}}{25\sqrt{3}} = 0.79$$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = 0.79$.

211005165 (U810690 M1278499)