Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

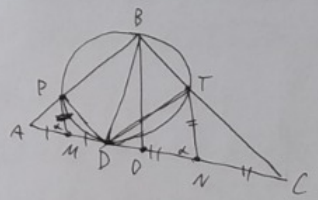
Шифр: **211007753**

ID профиля: **304480**

Вариант 12

Чистовик

№1



Дано: $D \in [AC]$
BD – d w_1 $w_1 \cap AB = P$, $w_1 \cap BC = T$
M и N – середины AD и CD, $PM \parallel TN$
а) Найти: $\angle ABC$
б) $MP = \frac{1}{2}$, $NT = 1$, $BD = \frac{4}{3}$
$S_{\Delta ABC}$ – ?

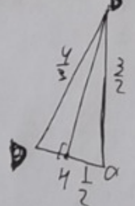
Решение:

а) 1) $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$ как впис. $\angle$ опир. на d $\Rightarrow$ ΔAPD и ΔDTC – прямоуг. по опр.
2) $\angle PMA = \angle TND = \alpha$ как соотв. при $PM \parallel TN$ и секущей AC
3) $\angle PMD = 180^\circ - \alpha$ по св. смежных углов
4) $PM = AM = MD$, $DN = NT = NC$ по св. прямоуг. Δ и п. 1 $\Rightarrow$ ΔPMD и ΔDNT – р/б по опр.
$\Rightarrow \angle PDM = \dfrac{180^\circ - 180^\circ + \alpha}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$, $\angle TDN = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$ по св. р/б Δ и Т о $\Sigma \angle \Delta$
5) $\angle PDT = 180^\circ - \angle PDM - \angle TDN = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$ по св. смежных $\angle$
6) $PBTD$ – вписанный по опр. $\Rightarrow$ $\angle PBT = 180^\circ - \angle PDT = 180^\circ - 90^\circ$ по п. 5
$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \parallel$
$\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \quad 90^\circ = \angle ABC$

Ответ: 90°

б) 1) ΔABC – прямоуг. по опр. и п. а) $\Rightarrow$ если O – ~~[illegible]~~ середина AC, то $BO = AO =$
$= OC$ по св. прямоуг. Δ $\Rightarrow$ O – центр опис. w ΔABC
2) $PM = AM = MD$, $DN = NC = TN = 1$ по п. а) $\Rightarrow$ $AC = AM + MD + DN + NC = 3$ $\Rightarrow$ $AO = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1{,}5$
$\qquad \qquad \qquad = \frac{1}{2}$
по п. 1 $\Rightarrow$ $DO = AO - AD = 1{,}5 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

3. ΔBDO

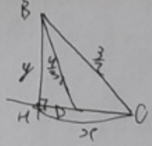


1

BH – высота ΔBDO $\Rightarrow$ BH – высота ΔABC, $BO = AO = \frac{3}{2}$
пусть $BH = y$, $OH = x$ $\Rightarrow$
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{16}{9} = y^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 \\ \frac{9}{4} = y^2 + x^2 \end{cases}$$ по Т Пифагора
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} \frac{16}{9} = y^2 + \frac{1}{4} - x + x^2 \\ \frac{9}{4} = y^2 + x^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{9}{4} - \frac{16}{9} = x - \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{13}{18} \Rightarrow \Delta BDO$$

№2

выглядел так



4\. $BH = \sqrt{BC^2 - CH^2}$ по Т Пифагора

$$y = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{169}{324}} = \sqrt{\frac{560}{324}} = \frac{2\sqrt{35}}{9}$$

5). $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH$ по Т о $S\triangle$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{35}}{9} \cdot 3 = \frac{\sqrt{35}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{35}}{3}$

2

№2

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2} \quad \uparrow^2$$

$$x+1+4-x-2\sqrt{(x+1)(4-x)}=4(x+1)(4-x)-12\sqrt{(x+1)(4-x)}+9$$

$$4+3x-x^2=(x+1)(4-x)$$

$$20+12x-4x^2-10\sqrt{(x+1)(4-x)}=0$$

$$2x^2-6x-10=5\sqrt{(x+1)(4-x)} \quad \uparrow^2$$

$$4x^4+36x^2+100-24x^3-40x^2+120x=100+75x-25x^2$$

$$4x^4-24x^3+21x^2+45x=0 \qquad x=0$$

$$4x^3-24x^2+21x+45=0 \qquad x=3$$

$$f(3)=108-216+63+45=0$$

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-24x^2+21x+45 & x-3 \\ \hline -\;4x^3-12x^2 & 4x^2-12x-15 \\ \quad -12x^2+21x & \\ \quad -\;-12x^2+36x & \\ \qquad -15x+45 & \\ \qquad -\;-15x+45 & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$4x^2-12x-15=0$$

$$\frac{D}{4}=36+60=96=(4\sqrt{6})^2$$

$$x_1=\frac{6+4\sqrt{6}}{4}=\frac{3}{2}+\sqrt{6}$$

$$x_2=\frac{6-4\sqrt{6}}{4}=\frac{3}{2}-\sqrt{6}$$

$$\frac{3}{2}+\sqrt{6}<4$$

$$\sqrt{6}<2{,}5$$

$$\sqrt{6}<\sqrt{6{,}25}$$

$$\frac{3}{2}-\sqrt{6}>-1$$

$$2{,}5>\sqrt{6}$$

$$\sqrt{6{,}25}>\sqrt{6}$$

Проверка: $x=0$

$$\sqrt{1}-\sqrt{4}+3=2\sqrt{4}$$

$$1-2+3=4$$

$$2\neq 4$$

$x=3$!

$$\sqrt{4}-\sqrt{1}+3=2\sqrt{4}$$

$$4=4 \text{ - и}$$

Ответ: $x=\left\{\frac{3}{2}-\sqrt{6};\ \frac{3}{2}+\sqrt{6};\ 3\right\}$.

3

211007753 (U304480 M1278434)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007753**

ID профиля: **304480**

Вариант 12

№5 Чистовик Математика 10 кл.

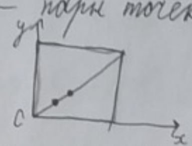
Узлов клеток внутри квадрата – 62×62

Т.к. стороны квадрата нечётные => диагонали его не пересекаются в узле клеток

„диагонали" – участки $y = x$ и $y = 63 - x$ внутри квадрата, эти прямые совпадают с его настоящими диагоналями (т.к. его вершины находятся в $(0;0)$, $(0;63)$, $(63;63)$ и $(63;0)$)

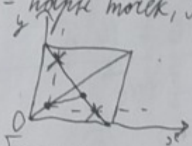
Чтобы удобнее было считать можно разделить точки узлов сетки внутри квадрата на 3 группы

I группа – пары точек, лежащие на одной диагонали



$$\underbrace{62}_{\text{1-я точка}} \cdot \underbrace{61}_{\text{2-я точка}} : \underbrace{2}_{\text{точки одинаковые}} \cdot \underbrace{2}_{\text{на диагонали две}} = 62 \cdot 61$$

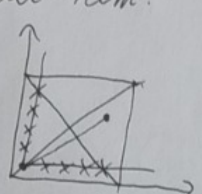
II группа – пары точек, лежащие на разных диагоналях



если выбрать точку на диагонали, то на другой диагонали „выпадут 2 точки" т.к. они будут лежать на прямых $\parallel Ox$ и Oy, эти две точки будут „выпадать" таким образом всегда т.к. диагонали $\cap$ не в узле сетки.

$$\underbrace{62}_{\text{1-я точка}} \cdot \underbrace{60}_{\text{2-я точка}} \cdot \underbrace{2}_{\text{столько диагоналей}} : \underbrace{2}_{\text{точки одинаковые}} = 62 \cdot 60$$

III – группа – пары точек из которых 1 принадлежит диагонали, а другая – нет.



4

всего точек внутри квадрата – $62 \cdot 62$, ~~но вариантов~~ но точки на диагоналях не используются =>

=> точек остаётся $62 \cdot 62 - \underbrace{62 - 62}_{\text{на диагоналях}}$

также выпадает ещё по 60 точек „в каждом направлении" (↕, ↔) т.к. точки

Чистовик Математика 10кл.

с диагоналей уже выкинуты, а эти 120 точек нельзя использовать т.к. тогда 2 выбранные точки будут $\in$ прямой $\parallel Ox$ или Oy

$$\underbrace{62}_{\text{точек на диаг.}} \cdot \underbrace{(62 \cdot 60 - 120)}_{\text{„свободных" точек не на диаг.}} \cdot \underbrace{2}_{\text{2 диагонали}}$$

$\Downarrow$

всего вариантов — $62 \cdot 61 + 62 \cdot 60 + 62 \cdot (62 \cdot 60 - 120) \cdot 2 =$
$= 453902$

$$\begin{array}{r} \times\ 62 \\ 61 \\ \hline 62 \\ 372 \\ \hline 3782 \end{array} \qquad \cancel{\begin{array}{r} \times\ 62 \\ 60 \\ \hline \end{array}} \qquad \begin{array}{r} \times\ 62 \\ 60 \\ \hline 3720 \end{array}$$

$3720 - 120 = 3600$

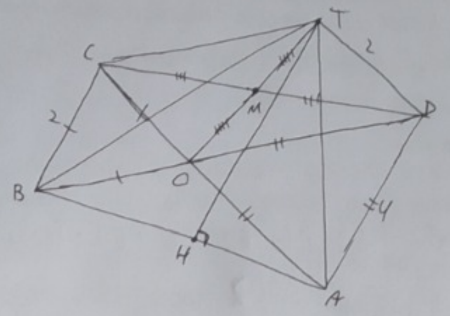
$$\begin{array}{r} \times\ 124 \\ 3600 \\ \hline 744 \\ 372 \\ \hline 446400 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 446400 \\ +\ 3720 \\ 3782 \\ \hline 453902 \end{array}$$

5

Ответ: 453902

211007753 (U304480 M1278435)

№6 Математика 10 кл. Чистовик



Дано: ABCD - выпуклый 4-угольник

$AC \cap BD = O$

ΔBOC и ΔAOD - правильные

M - середина CD

T - симметрична точке O относительно M

а) Док-ть: ΔABT - правильный

б) $BC = 2, AD = 4$

Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$

а) Док-во:

1) $CM = MD, OM = MT$ по усл. и опр. симм. $\Rightarrow$ OCTD - параллелограмм по ~~опр~~. пр.

2) $\angle BOA = \angle COD = 120^\circ$ по опр. р/с Δ и св. смежных углов $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle TCO = \angle TDO = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ по св. параллелограмма

3) $CT = OD = OA$, $TD = CO = OB$ по св. параллелограмма и опр. р/с Δ
$\quad$ ‖ DA $\quad$ ‖ OB

4) $\angle BCT = \angle TDA = \angle BOA = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ по п. 2 и опр. р/с Δ

5) $\underline{TD = BC = BO, AD = OA = CT, \angle BOA = \angle BCT = \angle TDA}$ по п. 3 и п. 4

$\Downarrow$

$\Delta BCT = \Delta TDA = \Delta BOA$ по СУС

$\Downarrow$

$BT = TA = BA$ как соотв.

$\Downarrow$

ΔBTA - р/с по опр.

б) 1) $AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2 AD \cdot DT \cdot \cos\angle TDA$ по Т cos

$AT^2 = 16 + 4 + \cancel{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 28$

$AT = 2\sqrt{7}$

6

2) TH - высота ΔATB, $TA = 2\sqrt{7}$ по п. 1, $AH = \sqrt{7}$ по св. р/с Δ и опр. р/с $\Delta \Rightarrow$
$\Rightarrow TH = \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{21}$ по Т Пифагора (т.к. ΔBTA - р/с $\Rightarrow \angle TAB = 60^\circ$ по опр. р/с Δ) $\Rightarrow$
$\Rightarrow TH = tg 60^\circ \cdot AH$

3) $S_{\Delta ABT} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot TH = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{21} = 7\sqrt{3}$ по Т о S Δ

211007753 (U304480 M1278435)

Чистовик Математика 10кл.

4) $\sin\angle COB = \sin\angle DOA = \sin\angle DOC = \sin\angle BOA = \frac{\sqrt{3}}{2}$ т.к. эти углы равны по 60° и 120° по п. α)

5) $S_{\triangle BCO} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} = \sqrt{3}$ по T_0 $S\triangle$, п. 4 и опр. р/с $\triangle$

6) $S_{\triangle DOA} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4} \cdot 4 = 4\sqrt{3}$ по T_0 $S\triangle$ ($S_\triangle = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot a \cdot b$), п. 4 и опр. р/с $\triangle$

7) ~~$S_{\triangle COD}=$~~ $CO = OB$, $OD = OA$, $\angle COD = \angle BOA$ по св. верт. $\angle$ и опр. р/с $\triangle$

$\Downarrow$ по СУС

$\triangle BOA = \triangle COD$

$\Downarrow$

$S_{\triangle BOA} = S_{\triangle COD} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{4} \cdot 2 = 2\sqrt{3}$ по T_0 $S\triangle$ через $\sin$

8) $S_{ABCD} = S_{\triangle BCO} + S_{\triangle DOA} + S_{\triangle BOA} + S_{\triangle COD} = \sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ по акс. изм. S

9) $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$

7

Ответ: $\frac{7}{9}$