# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

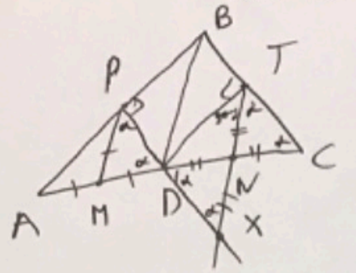
Шифр: **211007748**

ID профиля: **95925**

Вариант 12

Чистовик.
Часть 1. Вариант 12. Страница 1

№1




Дано: $PM \parallel TN$
$M$ и $N$ - середины $AD$ и $CD$
$BD$ - диаметр окружности $PBTD$

а) Найти $\angle ABC$. • Так как $BD$ диаметр, то вписанные $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$ ($P$ и $T$ лежат на этой окружности по условию) и опирающиеся на диаметр.

• Тогда $PM = AM = MD$ и $TN = DN = CN$, т.к. $PM$ и $TN$ - медианы к гипотенузам $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ соотв.

• Пусть $\angle PDA = \alpha$. Из равнобедренности $\angle MPD = \angle MDP = \alpha$

• Продлим $PD$ до пересечения с $TN$ в точке $X$.

• $\angle NDX = \alpha = \angle PDM$ как вертикальные углы

$\angle MPD = \angle NXD$ как накрест лежащие для параллельных $PM$ и $TN$ и секущей $PD$.

• Тогда $NX = DN = TN = NC$. Тогда $\angle TDX = 90^\circ$,

из равнобедренности $\triangle DNX$

т.к. медиана к гипотенузе $\triangle TDX$ оказалась равна половине стороны.

тогда $\angle DTX = 180^\circ - \angle TDX - \angle TXD = 90^\circ - \alpha$

тогда $\angle NTC = \angle DTC - \angle DTN = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$

$\angle NCT = \angle NTC = \alpha$ т.к. $TN = NC$

$\angle PAD = 180^\circ - \angle APD - \angle PDA = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$

тогда $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA = 180^\circ - \angle PAD - \angle NCT =$

$=$ ~~180°...~~ $180 - (90^\circ - \alpha) - \alpha = 90^\circ$

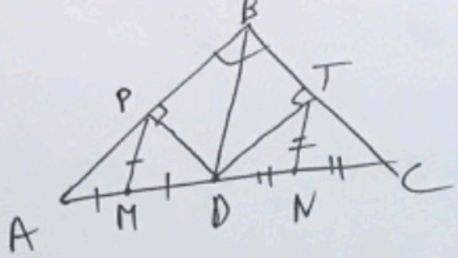
Ответ: $90^\circ$

211007748 (U95923 M1278162)

Чистовик.

Страница 2. Вариант 12.

№1 б) $MP = \frac{1}{2}$; $NT = 1$; $BD = \frac{4}{3}$




$AM = MD = PM = \frac{1}{2}$

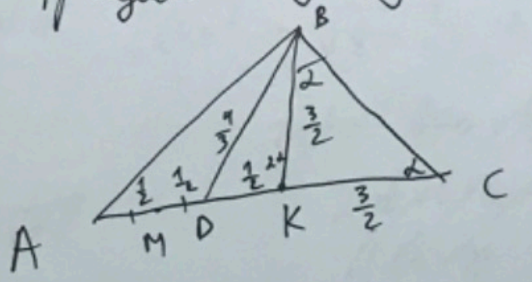
$DN = NC = TN = 1$

т.е. $AD = AM + MD = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$DC = DN + NC = 2 \cdot 1 = 2$

$AC = AD + DC = 1 + 2 = 3$

проведем медиану в $\triangle ABC$ к $AC$ ($BK$ - медиана)




Пусть $\angle BCA = \alpha$

как медиана и половина гипотенузы

$BK = AK = KC = \frac{AC}{2} = \frac{3}{2}$

$DK = DC - KC = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$BD = \frac{4}{3}$ по условию

$\angle KBC = \angle KCB = \alpha$ из равнобедренности

$\angle DKB = 2\alpha$ как внешний угол

по Тh cos $\quad DB^2 = DK^2 + KB^2 - 2DK \cdot KB \cdot \cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = \frac{DK^2 + KD^2 - DB^2}{2DK \cdot KB} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4} + \frac{9}{4} - \frac{16}{9}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{16}{9}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{45-32}{18}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{13}{18}}{\frac{3}{2}} = \frac{13 \cdot 2}{18 \cdot 3} = \frac{13}{27}$$

как известно $\cos\alpha = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{13}{27} + 1}{2}}$

$\frac{\pi}{2} > \alpha > 0$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{-\frac{13}{27} + 1}{2}}$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{40}{2 \cdot 27}} = \sqrt{\frac{20}{27}}$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{7}{27}}$

$S_{ABC} = \frac{AC \cdot CB}{2} \cdot \sin\alpha$

$\frac{CB}{AC} = \cos\alpha$ т.е. $S_{ABC} = \frac{AC^2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{2} =$

$$= \frac{9 \cdot \sqrt{\frac{20}{27}} \cdot \sqrt{\frac{7}{27}}}{2} = \frac{\sqrt{140}}{6} = \frac{\sqrt{35}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{35}}{3}$

Чистовик. вариант 12.
Страница 3.

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{cases}$

№ 2 $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\sqrt{x+1} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2} + \sqrt{4-x}$

Возведём обе части в квадрат

$x+1+9+2\sqrt{x+1} = 4(4+3x-x^2) + 4-x + 4\sqrt{4-x}\sqrt{4+3x-x^2}$

Заметим, что $4+3x-x^2 = (4-x)(x+1)$, т.к. $x+1 \geq 0$, $4-x \leq 0$ по ОДЗ,

то $\sqrt{4+3x-x^2} = \sqrt{4-x} \cdot \sqrt{x+1}$

т.е. $x+10+2\sqrt{x+1} = 16+6x-4x^2+4-x+4(4-x)\sqrt{x+1}$

$4x^2-4x-10 = (16-4x)\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1}$

$4x^2-4x-10 = (14-4x)\sqrt{x+1}$

$2x^2-2x-5 = (7-2x)\sqrt{x+1}$

~~возведём в квадрат и позже проверим решения~~

$2x^2-2x-5=0$ $\frac{D}{4} = 1+10 = 11$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1-\sqrt{11}}{2} < -1 \Rightarrow \text{т.к. } -\sqrt{11} \leq -3 \\ x = \frac{1+\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.$ $\sqrt{11} > 3$, $11 > 9$

т.е. до $\frac{1+\sqrt{11}}{2}$ левая часть отрицательная, а
от -1
правая положительная (т.к. $7 - \left(\frac{1+\sqrt{11}}{2}\right) \cdot 2 = 6 - \sqrt{11} > 0$
при уменьшении $x$, $-2x$ увеличивается, а значит и сумма)

т.е. решений нет

так же $\frac{1+\sqrt{11}}{2} > \frac{3}{2}$ т.к. $\sqrt{11} > 2$.

---

Вернёмся к изначальному уравнению

$\sqrt{x+1} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2} + \sqrt{4-x}$

$4+3x-x^2 \to$ вершина (максимум выражения) при $x = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

дальше выражение убывает. До $x = \frac{1+\sqrt{11}}{2}$ решений нет.

При $x > \frac{1+\sqrt{11}}{2}$ правая часть убывает, т.к. подкоренные выражения $4+3x-x^2$ и $4-x$ убывают, а левая возрастает так как $x+1$ возрастает.

Чистовик. вариант 12.

Страница 4.

№2 Продолжение. ~~Значет~~ значит равенство достигается 1 раз (так как у монотонных функций каждое значение 1 раз принимается). Угадаем решение. Заметим, что

$x=3$ – решение

$$\sqrt{3+1}-\sqrt{4-3}+3=2\sqrt{4+9-9}$$

$$2-1+3=2\cdot2$$

$$4=4$$

Ответ: $x=3$

Чистовик.

Страница 5. Вариант 12.

№3 1) $ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

при $a=0$ → решений нет значит $a\neq 0$

$$ay=ax^2+4a^2x+4a^3+2 \quad |:a\neq 0$$

$$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$$

тогда зная, что B – вершина, найдем координаты

$$x_B=\frac{-4a}{2}=-2a$$

$$y_B=(-2a)^2+4a(-2a)+4a^2+\frac{2}{a}=$$

$$=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$$

2) $2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$$x^2+2x(y-a)+2a^2-6ay+5y^2=0$$

$$\frac{D}{4}=(y-a)^2-2a^2+6ay-5y^2=$$

$$=y^2-2ay+a^2-2a^2+6ay-5y^2=$$

$$=-a^2+4ay-4y^2=-(a-2y)^2$$

т.к. этим уравнением задается 1 точка, то должно быть только 1 решение относительно x и y. Значит $a=2y$ (иначе $D<0$ → нет решений вообще)

$$y_A=\frac{a}{2}\ ;\ x_A=\frac{-(y-a)-0}{1}=a-y=a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}.$$

---

Пусть A выше прямой $x+y=3$, тогда $x_A+y_A>3$, т.е. $a>3$.

тогда посмотрим на точку B.

Хотим, чтобы $x_B+y_B>3$ (A и B с одной стороны)

$$-2a+\frac{2}{a}>3$$

$$\frac{2}{3}>\frac{2}{a}>3+2a>3+2\cdot 3=9$$

но $\frac{1}{a}<\frac{1}{3}$ (т.к. $a>3$)

$\frac{2}{3}>9$ → противоречие. Значит A и B не могут одновременно быть выше $x+y=3$

Чистовик. Вариант 12.

Страница 6.

- Пусть A ниже $\ell$, тогда $x_A + y_A < 3$, $a < 3$.

Случай 1 $a > 0$.

Хотим, чтобы $x_B + y_B < 3$

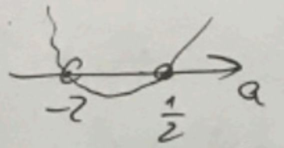
$$-2a + \frac{2}{a} < 3 \quad \Big| \cdot (a > 0)$$

$$-2a^2 + 2 < 3a$$

$$2a^2 + 3a - 2 > 0$$

$$D = 9 + 16 = 25$$

$$\begin{cases} a = \frac{-3-5}{4} = -2 \\ a = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$



т.е. $a > \frac{1}{2}$ и $a < 3$

Случай 2 $a < 0$ ($a \neq 0$ по вышесказанному)

Хотим, чтобы $x_B + y_B < 3$

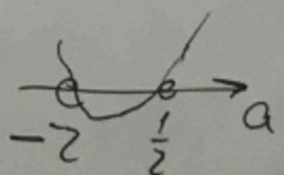
$$-2a + \frac{2}{a} < 3 \quad \Big| \cdot a \ (< 0)$$

$$-2a^2 + 2 > 3a$$

$$0 > 2a^2 + 3a - 2$$

$$D = 25$$

$$\left[\begin{array}{l} a = -2 \\ a = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$



т.е. $\frac{1}{2} > a > -2$ и $a < 0$, т.е. $a \in (-2; 0)$

Ответ: $a \in (-2; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; 3\right)$

211007748 (U95925 M1278162)

Черновик ①

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$x \geq -1$, $x \leq 4$

$x = 3$

$\sqrt{x+1} + 3 = 2\sqrt{4-x}\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x}$

$9x + 9 = 4(4-x)(x+1) + 4(4-x)\sqrt{x+1} + 4 - x$

$10x + 5 = -4x^2 + 12x + 16 + 16\sqrt{x+1} - 4x\sqrt{x+1}$

$4x^2 - 2x - 11 = \sqrt{x+1}\,(16-4x)$, $> 0$

$\frac{D}{4} = 1 + 44 = 45$

$x = \frac{1-\sqrt{45}}{4} < -\frac{5}{4}$

$x = \frac{1+\sqrt{45}}{4} > \frac{7}{4}$

$\frac{1+\sqrt{45}}{4} > \frac{3}{2}$

$(4x^2 - 2x - 11)^2 = (x+1)(16-4x)^2$

$16x^4 + 4x^2 + 121 - 16x^3 - 88x^2 + 44x = 4(x+1)(16-8x+x^2)$

$4x^4 + x^2 + \frac{121}{4} - 4x^3 - 22x^2 + 11x = x^3 - 8x^2 + 16x + 16 - 8x + x^2$

$4x^4 - 5x^3 - 14x^2 + 3x + \frac{57}{4} = 0$

$4x^4 + 4x^2 + 25 - 8x^3 - 20x^2 + 20x = (7-2x)^2(x+1)$

$4x^4 - 16x^2 - 8x^3 + 20x + 25 = (4x^2 - 28x + 49)(x+1) = 4x^3 - 28x^2 + 49x + 4x^2 - 28x + 49$

$x > \frac{1+\sqrt{45}}{4}$

$\sqrt{5} \geq \sqrt{4-x} \geq 0$

$0 \leq \sqrt{x+1} \leq \sqrt{5}$

$\sqrt{5} \geq \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} \geq -\sqrt{5}$

$4x^4 - 12x^3 + 8x^2 - x - 24 = 0$

$\sqrt{5} + 3 = 0$

$0 - \sqrt{5} + 3 = 0$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 \geq 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$(2a+1)(2b-1) = 5$

$4ab + 2b - 2a = 4$

$2ab + b - a = 2$

$2ab + b - a = 3$

$2a^2b^2 + b^2 + a^2 - 4a^2b + 4ab^2 -$

$2(4+3x-x^2) + 4 - x + x + 1 -$

$- 4(x+1)\sqrt{4-x} + 4\sqrt{x+1}(4-x)$

$- 2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x} = 9$

$\geq -\sqrt{5}$

$\sqrt{x+1} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2} + \sqrt{4-x}$

убывает

$x = 3$ корень

до $\frac{3}{2}$ возр.

до $x = \frac{3}{2}$ дальше

211007748 (U95925 M1278162)

Черновик ②

2) $a<3;\ a<0$

$-2a+\frac{2}{a}<3 \quad |\cdot a$

$-2a^2+2>3a$

$2a^2+3a-2<0$

$D=9+16=25$

$\left[\begin{array}{l} a=\frac{-3-5}{4}=-2 \\ a=\frac{-3+5}{4}=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$-2<a<0$

т.е. Ответ: $a\in(-2;0)\cup(0;2)$

№2 $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{x+1}$

$-x^2+3x+4$

$x=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$

$\cancel{2ab=b-a+3}$

$2ab-b+a-3=0$

1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3\geq 0$

$\sqrt{x+1}+3\geq\sqrt{4-x}$

$x+1+4-x+9+6\sqrt{x+1}-6\sqrt{4-x}-2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}=4\sqrt{4-x}\sqrt{x+1}$

$14+6(\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x})=4\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}$

$\sqrt{x+1}+3=2\sqrt{4-x}\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}$

$\sqrt{x+1}+3=\sqrt{4-x}(2\sqrt{x+1}+1)$

$x+1+9+6\sqrt{x+1}=(4-x)(4(x+1)+1+4\sqrt{x+1})$

$x+10+6\sqrt{x+1}=(4-x)(4x+4\sqrt{x+1}+5)=$

$16x+16\sqrt{x+1}+20-4x^2-4\sqrt{x+1}x-5x$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+8=(\sqrt{4-x}+\sqrt{x+1})^2=$

$>0$, разн

$a-b+3=2ab$

$(2\sqrt{x+1}+1)(2\sqrt{4-x}-1)=5 \quad 2a(b-\frac{1}{2})+b-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$(2a+1)(2b-1)=5$

$2\sqrt{4-x}>1$

$\sqrt{4-x}>\frac{1}{2} \quad 4-x>\frac{1}{4} \quad 3\frac{3}{4}>x$

Черновик (3)

№ 3 $2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$ — точка A

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$ — парабола с вершиной в

$x^2+x(2y-2a)+2a^2-6ay+5y^2=0$

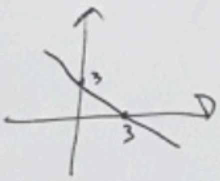
$\frac{D}{4}=(y-a)^2-8a^2+21ay-20y^2=-19y^2+22ay-7a^2$

$19y^2-22ay+7a^2=0$

$\frac{D}{4}=121a^2-7\cdot 19$

$a-?$

A и B по одну сторону от $x+y=3$



$ax^2+4a^2x+4a^3+2=ay$

$a\neq 0 \rightarrow$ нет реш

$-2a+\frac{2}{a}\leq 3 \rightarrow a<0$

$a>0$

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

$x_B=-\frac{4a}{2}=-2a$

$y_B=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$

$x^2+2xy+5y^2+2a^2-2ax-6ay=0$

$(x-a)^2+(a-3y)^2-4y^2+2xy=0$

$(x-a)^2+(a-3y)^2-\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2=-\frac{x^2}{4}$

$\frac{D}{4}=(y-a)^2-2a^2+6ay-5y^2=$

$=-a^2+4ay-4y^2=-(a-2y)^2=0$

$y=\frac{a}{2}$ $x=\frac{a-y}{}=$

$=\frac{a}{2}$

1) $a>3$ $\frac{1}{a}<\frac{1}{3}$

$-2a+\frac{2}{a}>3$

$\frac{2}{3}>\frac{2}{a}>3+2a>9$ макс

2) $a<3;\ a>0$ $-2a+\frac{2}{a}<3 \mid \cdot a$

$-2a^2+2<3a$

$2a^2-3a-2<0$

$D=9+16=25$

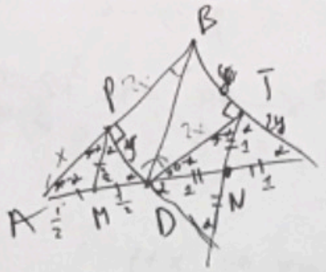
$a=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}$

$a=\frac{3+5}{4}=2$

211007748 (U95925 M1278162)

Черновик (4)

№1

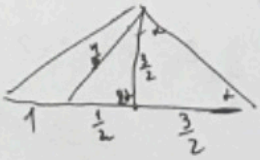


$PM \parallel TN$

$\angle ABC = 2\alpha$

$MP = \frac{1}{2}$

$NT = 1 \quad BD = \frac{4}{3}$



$\cancel{\cos 2\alpha}$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{1 - \frac{16}{9}}{\frac{3}{2}} = \frac{-\frac{7}{9}}{\frac{3}{2}} = -\frac{14}{27}$$

$$2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{13}{27}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{13}{6\cdot 9}} \qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{13}{54}} = \sqrt{\frac{41}{54}}$$

$$S = \frac{c\cdot b}{2}\cdot\sin\alpha = \frac{c}{2}\cdot c\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha =$$

$$= \frac{c^2}{2}\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha = \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{54}\sqrt{41}\cdot\sqrt{13} =$$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{41}\cdot\sqrt{13}$$

№2 $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

ОДЗ: $x \geq -1$, $x \leq 4$

$\underset{a}{\sqrt{x+1}} - \underset{b}{\sqrt{4-x}} + 3 = 2\sqrt{4-x}\sqrt{x+1}$ $\quad -x^2+3x+4 \geq 0$

$x^2-3x-4 \leq 0$

$D = 9+16 = 25$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{3-5}{2} = -1 \\ x = \frac{3+5}{2} = 4 \end{array}\right.$

$2ab = a - b + 3$

$2ab - a + b = 3$

$a(2b-1) + \cancel{2}b - \frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2}$

$\left(a+\frac{1}{2}\right)(2b-1) = \frac{5}{2}$

$(2a+1)(2b-1) = 5$

$\left(2\sqrt{x+1}+1\right)\left(2\sqrt{4-x}-1\right) = 5$

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007748**

ID профиля: **95925**

Вариант 12

Чистовик.
Страница 1. Вариант 12. Часть 2.

№ 4

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Вычтем из второго первое: $2(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = 1$

Пусть $x^2+y^2 = a$

$2a^2 - \frac{1}{a} = 1 \quad | \cdot a$ Заметим, что $a=1$ - корень.

$2a^3 - 1 - a = 0$

$2a^3 - 2a^2 + 2a^2 - 2a + a - 1 = 0$

$2a^2(a-1) + 2a(a-1) + a - 1 = 0$

$(a-1)(2a^2+2a+1) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} a = 1 \\ 2a^2+2a+1 = 0 \quad \frac{D}{4} = 1 - 2 = -1 < 0 \text{ нет решений} \end{array}\right.$$

значит $a = 1$

т.е. $x^2+y^2 = 1$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ 2(1)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Рассмотрим вспомогательное квадратное уравнение с корнями $x^2$ и $y^2$

по теореме Виета $-\frac{b}{a} = 1$, $\frac{c}{a} = \frac{1}{4}$

$t^2 - t + \frac{1}{4} = 0$

$D = 1 - 4 \cdot \frac{1}{4} = 0$

$t = \frac{1}{2} \rightarrow$ корень уравнения

значит $\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

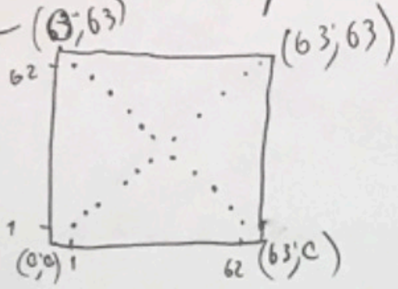
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Чистовик.

Страница 2. Вариант 12.

№ 5




Заметим, что $y=x$ и $y=63-x$ — диагонали квадрата. На диагоналях по 62 узла сетки (общего узла нет, потому что $\begin{cases} y=x \\ y=63-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{63}{2} \\ y=\frac{63}{2} \end{cases}$ координаты не целые). Значит на диагоналях всего 124 узла.

Случай 1: оба узла на диагоналях. Тогда нужно выбрать 2 узла из 124. Вариантов: $C_{124}^{2} = \frac{124\cdot 123}{2}$

Случай 2: ровно один узел на диагонали. Для каждого варианта выбора узла (124 варианта) на диагонали, второй узел не лежит на диагонали и в одной строчке/столбце с уже выбранным узлом. Значит выбрать второй узел можно

$$\underbrace{62\cdot 62}_{\text{всего узлов внутри}} - \underbrace{124}_{\text{узлов на диагонали}} - \underbrace{60}_{\text{узлов не на диагонали в одной строке с выбранным}} - \underbrace{60}_{\text{узлов не на диагонали в одном столбце}} =$$

$$= 62\cdot 62 - 62\cdot 2 - 2\cdot 60 = 62(62-2) - 2\cdot 60 = 62\cdot 60 - 2\cdot 60 =$$

$$= 60(62-2) = 60\cdot 60$$

Всего вариантов выбора 2 узлов для случая 2: $124\cdot(60\cdot 60)$

Итого: $\frac{124\cdot 123}{2} + 124\cdot 60\cdot 60 = 124\left(\frac{123}{2} + 60\cdot 60\right) =$

$= 62\cdot 123 + 124\cdot 60\cdot 60 = 7626 + 446400 =$

$= \underline{\underline{454026}}$

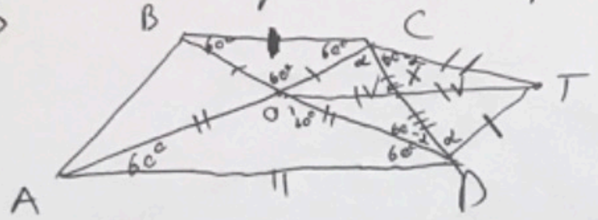
$\boxed{\text{Ответ: } 454026}$

$$\begin{array}{r} \times\ 123 \\ 62 \\ \hline +\ 246 \\ 738\ \ \\ \hline 7626 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 124 \\ 3600 \\ \hline +\ 744\ \ \ \\ 372\ \ \ \ \\ \hline 446400 \\ +\ \ \ 7626 \\ \hline 454026 \end{array}$$

Чистовик.

Страница 3. Вариант 12.

№6




1) $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ правильные, поэтому у них углы по $60^\circ$.

2) $\angle BCO = \angle OAD = 60^\circ$, поэтому $BC \parallel AD$ (т.е. ABCD - трапеция)

3) $\angle COD = \angle BOA = 180^\circ - \angle AOD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ как смежные с $\angle AOD$

тогда $\triangle COD = \triangle BCD$ по углу ($\angle COD = \angle BOA$) и 2 между сторонами сторонам ($BO = OC$; $AC = CD$ как стороны одного правильного $\triangle$)

Следовательно $AB = CD$. (т.е. трапеция равнобокая)

4) X – середина CD; по условию $OX = XT$ и $CX = XD$ тогда OCTD – пар-грамм, т.к. его диагонали точкой пересечения делятся пополам.

тогда $OC \parallel TD$ и $CT \parallel OD$, а $\begin{cases} OC = TD \\ OD = CT \end{cases}$

5) Пусть $\angle ACD = \alpha$, тогда $\angle ODC = 180^\circ - \angle COD - \angle OCD =$
$= 180^\circ - 120^\circ - \alpha = 60^\circ - \alpha$

6) Как $\angle OCD = \angle CDT$ и $\angle CDO = \angle DCT$ как накрест лежащие.

7) т.е. $\angle ADT = \angle ADB + \angle BDC + \angle CDT = 60^\circ + 60 - \alpha + \alpha = 120^\circ$

$\angle BCT = 60^\circ + \alpha + 60^\circ - \alpha = 120^\circ$

$\angle CTD = 180^\circ - \angle TCD - \angle TDC = 180^\circ - (60 - \alpha) - \alpha = 120^\circ$

8) Получаем равные треугольника $\triangle BCT = \triangle DTC = \triangle TDA$ по 2 сторонам и углу между ними ($BC = TD = TD$; $CT = CT = AD$; $\angle BCT = \angle CTD = \angle TDA = 120^\circ$)

тогда $BT = CD = AT$

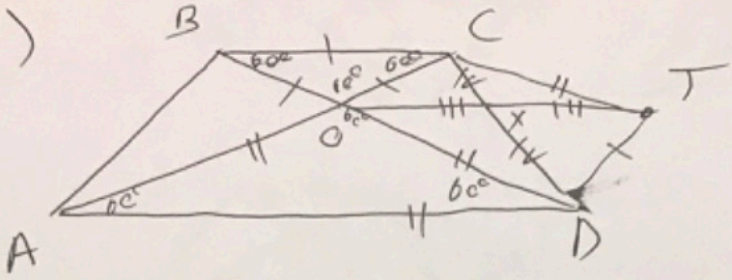
при этом $CD = AB$, т.к. трапеция равнобокая.

т.е. $BT = AT = AB$. Значит $\triangle ABT$ – правильный.

Чистовик

Страница 4. Вариант 12.

№6 б)



Дано: $BC=2$

$AD=4$

т.к. $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ правильные, то

$AO=OD=AD=4$, $BO=OC=BC=2$

тогда $S_{ABCD}=S_{BOC}+S_{COD}+S_{AOD}+S_{BOA}=$

$=\frac{1}{2}BO\cdot OC\cdot\sin 60^\circ+\frac{1}{2}OC\cdot OD\cdot\sin 120^\circ+\frac{1}{2}OD\cdot AO\cdot\sin 60^\circ+$

$\sin 120^\circ=\sin 60^\circ$

$+\frac{1}{2}AO\cdot OB\cdot\sin 120^\circ=$

$=\frac{1}{2}\sin 60^\circ\left(BO\cdot OC+CO\cdot OD+OD\cdot AO+AO\cdot BO\right)=$

$=\frac{1}{2}\sin 60^\circ\left(OC+AO\right)\left(BO+OD\right)=AC\cdot BD\cdot\frac{1}{2}\sin 60^\circ=$

$=(2+4)(2+4)\frac{1}{2}\sin 60^\circ=\frac{36}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$

Найдем площадь $S_{ATB}$. ~~Для этого найдем его сторону.~~

из пункта а:

$DT=BC=2$

$\angle ADT=120^\circ$

$\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$

$AT^2=AD^2+DT^2-2AD\cdot DT\cdot\cos\angle ADT$

$AT^2=4^2+2^2-2\cdot 2\cdot 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=$

$=16+4+8=28$

$AT=2\sqrt{7}$ из пункта а; $AT=BT=AB$

поэтому $S_{\triangle ABT}=\frac{AT\cdot BT}{2}\sin\angle BTA=\frac{AT^2}{2}\cdot\sin 60^\circ=\frac{28}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}$

т.е. $\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}=\frac{7}{9}$

Ответ: $\frac{7}{9}$

211007748 (U95925 M1278163)

Черновик ①

№

$$\frac{1}{a+b}+ab=\frac{5}{4}$$

$$2a^2+2b^2+5ab=\frac{9}{4}$$

$$\begin{cases} 2(a+b)^2+ab=\frac{9}{4} \\ \frac{1}{a+b}+ab=\frac{5}{4} \end{cases}$$

$$2(a+b)^2-\frac{1}{a+b}=1 \qquad a+b=x$$

$$2(a+b)^3=1+a+b$$

$$2a^3+6a^2b+6ab^2+2b^3-1-a-b=$$

$$2x^3=1+x$$

$$2x^3-x-1=0$$

$$2x^3-2x^2+2x^2-2x+x-1=0$$

$$(x-1)(2x^2+2x+1)=0$$

$$\frac{D}{4}=1-2<0$$

$$\frac{1}{2}ad\sin\alpha+\frac{1}{2}bd\sin\alpha+\frac{1}{2}bc\sin\alpha+\frac{1}{2}ac\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha(ad+bd+bc+ac)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha(a+b)(c+d)=$$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha\, d_1 d_2$$

$x=1$

$a+b=1$

$$\begin{cases} 2+ab=\frac{9}{4} \\ 1+ab=\frac{5}{4} \end{cases} \qquad ab=\frac{1}{4}$$

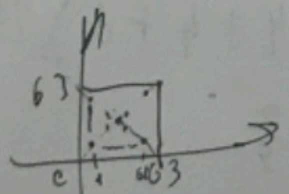
$$x^2-x+\frac{1}{4}=0$$

$$D=1-1=0 \qquad x=\frac{1}{2}$$

$$a^2+b^2=\frac{1}{2}$$

$$x^2=\frac{1}{2} \qquad y^2=\frac{1}{2} \qquad \begin{cases} x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

№5



$62\cdot 62$

1) оба на прямой
всего 124 узла на длине

$$\frac{124\cdot 123}{2}$$

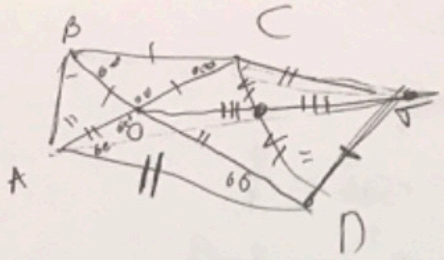
2) только один на прямой

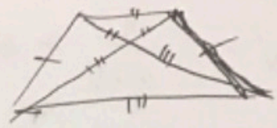
$$128\cdot(62\cdot 62-128-60\cdot 2)=$$

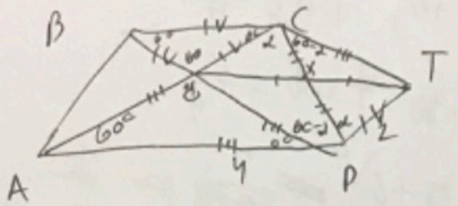
$$=128(62(62$$

211007748 (U95925 M1278163)

№6 Черновик (2).



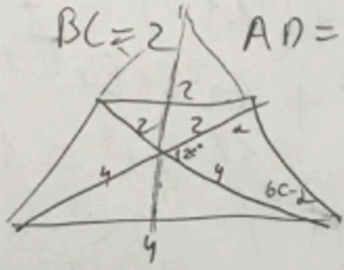






$\Delta BCB = \Delta CTD = \Delta ADT$

$CD = AB$

б) $BC = 2$ $AD = 4$




$$\frac{4}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin 60-\alpha}$$

$\sin\alpha = 2\cdot\sin(60-\alpha)$

$\sin\alpha = \cancel{2\sin 60\sin\alpha - 2\cos 60^\circ}$
$2\cdot\sin 60\cdot\cos\alpha - 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos 60^\circ$

$2\sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha$

$tg\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABT}$

сторона $ABT$

$AT^2 = 4^2 + 2^2 - 2\cdot4\cdot2\cdot\cos120^\circ = 16+4-16\cdot(-\frac{1}{2}) =$
$= 20 + 8 = 28$

$\frac{36\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$

$\frac{1}{2}$

$AT = 2\sqrt{7}$

$S_{ABT} = \frac{(2\sqrt{7})^2\cdot\sin60^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot4\cdot7 = 7\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \frac{2\cdot2}{2}\cdot\sin60^\circ + \frac{2\cdot4}{2}\cdot\sin120^\circ + \frac{2\cdot4}{2}\cdot\sin120^\circ + \frac{4\cdot4}{2}\sin60^\circ =$

$= \sin60(2+4+4+8) = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$

отношение $\frac{7}{9}$

211007748 (U95925 M1278163)