Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007713**

ID профиля: **872293**

Вариант 12

Чистовик

Вариант 12. Часть 1

Задача 2

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$4+3x-x^2=(x+1)(4-x)$$

$$\sqrt{x+1}=a \ ; \ \sqrt{4-x}=b \Rightarrow a^2+b^2=x+1+4-x=5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b+3=2ab \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$$

$$(a-b)^2=(2ab-3)^2=5-2ab \ ; \ ab=c$$

$$(2c-3)^2=5-2c$$

$$4c^2+9-12c=5-2c$$

$$2c^2-5c+2=0$$

$$(c-2)(2c-1)=0 \quad c_1=2 \quad c_2=\frac{1}{2}$$

1) $c=2 \quad ab=2=\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$(x+1)(4-x)=4 \quad x_1=0 \quad x_2=3$

$x_1=0$ не подходит (подставили)

$x_2=3$ подходит.

2) $c=\frac{1}{2} \Rightarrow (x+1)(4-x)=\frac{1}{4}$

$-x^2+3x+\frac{15}{4}=0 \quad x_{3,4}=\frac{3\pm4\sqrt{3}}{2}$

Чистовик

Если $x=\frac{3+4\sqrt{3}}{2}$, то $\sqrt{4-x}=\sqrt{\frac{5-4\sqrt{3}}{2}}$

Подкоренное выражение меньше 0

Если $x=\frac{3-4\sqrt{3}}{2}$, то $\sqrt{x+1}=\sqrt{\frac{5-4\sqrt{3}}{2}}$

Подкоренное выражение меньше 0

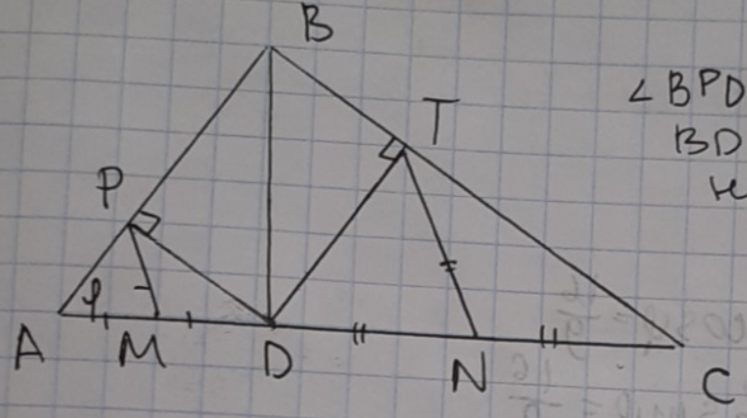
$\Rightarrow$ x_3 и x_4 не подходят

Ответ: $x=3$.

211007713 (U872293 M1276058)

Чистовик

Задача 1



$\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$, т.к. BD - диаметр окружности

(а) $\angle BAC = \alpha$ $\angle BCA = \gamma$

$\Rightarrow \angle PMD = 2\alpha$, т.к. медиана прям. треуг. равна половине гипотенузы

$\angle TND = 2\gamma$ по тем же причинам

$PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMD + \angle TND = 2(\alpha+\gamma) = 180^\circ$

$\Rightarrow \alpha + \gamma = 90^\circ \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$

Ответ: 90°

(б) $\left.\begin{array}{l} MP = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = 1 \\ NT = 1 \Rightarrow CD = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow AC = 3$

$BD = \frac{4}{3}$ $\angle B = 90^\circ$

$AB = a$ $BC = b$ $\angle BAC = \varphi$

$a^2 + b^2 = 9$ $S = \frac{ab}{2} = 3 \cdot a \cdot \sin\varphi / 2$

$AD^2 + AB^2 - 2\,AD\,AB\cos\varphi = \frac{16}{9}$

Чистовик

$$CD^2+BC^2-2CD\,BC\sin\varphi=\frac{16}{9}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2=9 \\ b=3\sin\varphi \\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \\ 1+a^2-2a\cos\varphi=\dfrac{16}{9} \\ 4+b^2-4b\sin\varphi=\dfrac{16}{9} \end{cases}$$

$$a=\frac{b\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

$$5+(a^2+b^2)-2a\cos\varphi-4b\sin\varphi=\frac{32}{9}$$

$$5+9-2\frac{b\cos^2\varphi}{\sin\varphi}-4b\sin\varphi=\frac{32}{9}$$

$$2\frac{b\cos^2\varphi}{\sin\varphi}+4b\sin\varphi=14-\frac{32}{9}=\frac{94}{9}$$

$$b=3\sin\varphi$$

$$6\cos^2\varphi+12\sin^2\varphi=\frac{94}{9}$$

$$6\sin^2\varphi=\frac{94}{9}-6=\frac{94}{9}-\frac{54}{9}=\frac{40}{9}$$

$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{40}}{3\sqrt{6}}$$

$$BC=3\cdot\frac{\sqrt{40}}{3\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{40}{6}}$$

$$AB=\sqrt{9-\frac{40}{6}}=\sqrt{\frac{14}{6}}=\sqrt{\frac{7}{3}}$$

211007713 (U87[illegible]3 M 260580)

Чистовик

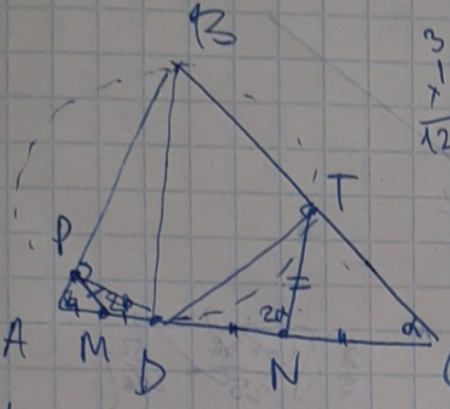
$$S(ABC) = \frac{AB \cdot BC}{2} = \sqrt{\frac{\frac{7}{3} \cdot \frac{20}{3}}{4}} = \frac{\sqrt{140}}{6} = \frac{\sqrt{35}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{140}}{6} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Черновик

Сначала всё показать на камеру
Слово „ответ" в конце
Написать вариант

1.



3
$14 \times 9 = 126 - 32 = 94$

PM // TN

$\frac{a}{b} = 3a \cdot \sin\varphi$

$b = 3\sin\varphi$ $\frac{a}{b} = \frac{\cos}{\sin}$ $\frac{2b\cos^2\varphi}{\sin\varphi} +$

$a = \frac{b\cos}{\sin}$ $4b\sin\varphi = \frac{94}{9}$

$\frac{32}{9} -$

$14 - \frac{32}{9} =$ $5 + 9 - (2a \cdot \cos + 4b \cdot \sin) = \frac{32}{9}$

$MP = \frac{1}{2}$ а) $2\alpha + 2\beta = 180$

$NT = 1$ $\Rightarrow \alpha + \beta = 90$

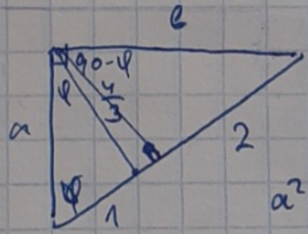
$BD = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow \angle ABC = 90$

$S(ABC) = ?$ б) $94 - 36 = 58$

$1^2 + a^2 - 2a \cdot 1 \cdot \cos\varphi = \frac{16}{9}$

$2^2 + b^2 - 2b \cdot 2 \cdot \sin\varphi = \frac{16}{9}$

$AD = 1$
$CD = 2$



$h = \sqrt{2}$

$\frac{2b\cos^2\varphi}{\sin\varphi} + 4b\sin\varphi = \frac{94}{9}$

$a \cdot b = ?$

$a^2 + b^2 = 9$ $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{2a}$

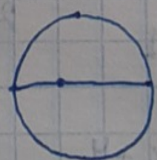
$6\cos^2\varphi + 12\sin^2\varphi = \frac{94}{9}$

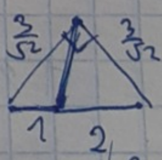
$6\sin^2\varphi = \frac{58}{9}$

$2a \cdot \sin\varphi = b\cos\varphi$

$\sin\varphi =$

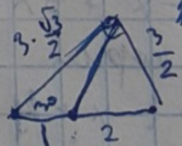
$\frac{16}{9}$





$\sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$140 = 20 \cdot 7 =$
$126 - 32 = 94$



$= 1 + \frac{9}{2} - 3 =$

$\frac{11}{2} - \frac{6}{2} = \frac{5}{2}$ $= \sqrt{\frac{5}{2}}$

$6 \times 9 = 54$

$6 \times ?$

35×4

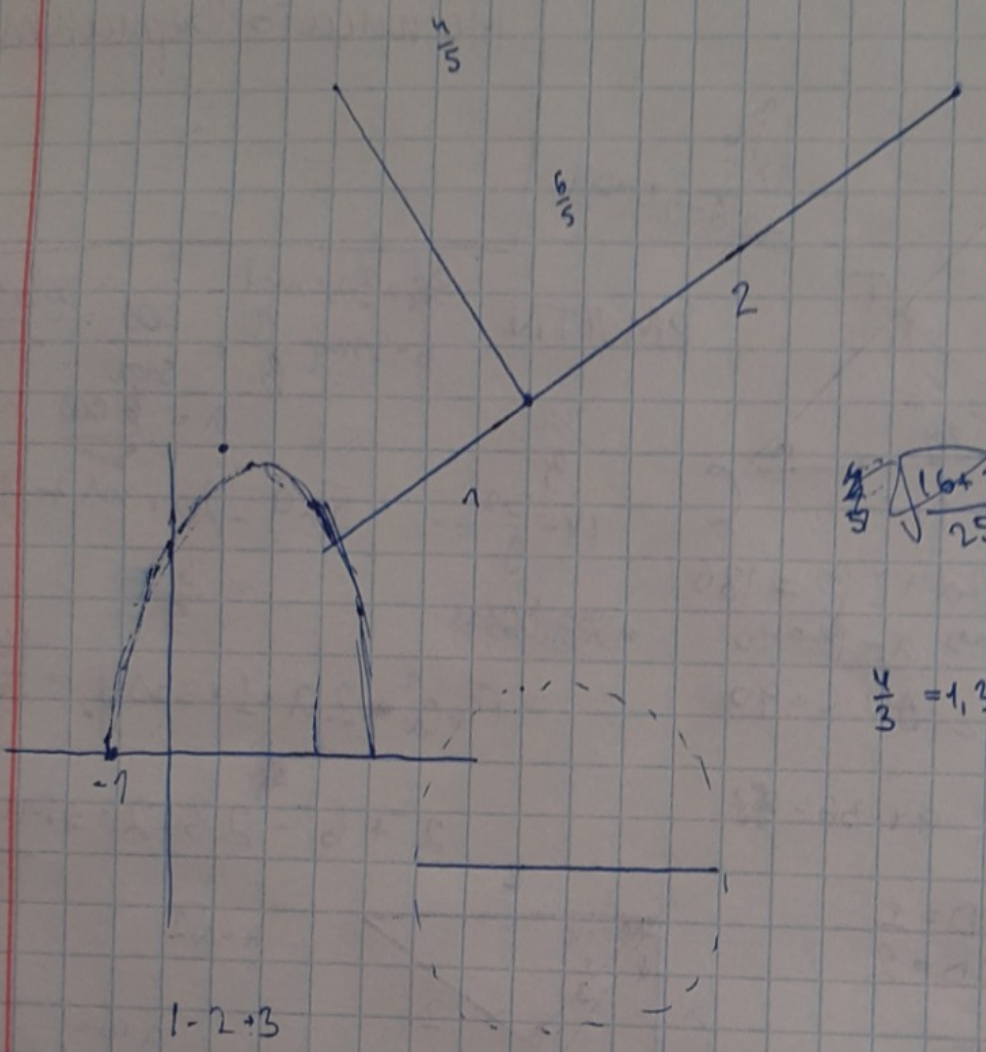
$54 - 40$

$1^2 + \frac{27}{4} - 1 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= 1 + \frac{27}{4} - \frac{9}{4} = \frac{27 - 5}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$

Стр 1 из 3

Черновик



$\frac{4}{5}$ $\sqrt{\frac{16+36}{25}}$ $\frac{52}{26}$

$\frac{4}{3} = 1,33$

$1-2+3$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$4 \geq x \geq -1$

$x \leq 4$

$-x^2 + 3x + 4$

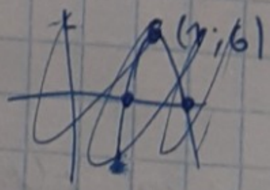
корни

$(-x+4)(x+1)$

$x=3$

$x=-1$

$2-1+3 = 2\sqrt{4+9-9}$



$x > 3$

$2\sqrt{\ } < 4$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 > 4$

1,5

$-1 \leq x \leq 4$

$x=3$ $x=0$

вершина $x=1$ ~~$x=4+3-1=6$~~

21100773 (U872293 M1276058)

Черновик

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{\cancel{4+3x}\cdot(4-x)(x+1)}$

$\sqrt{a} - \sqrt{5-a} + 3 = 2\sqrt{a(5-a)}$

$\cancel{\sqrt{x+1}} = a$

$\cancel{Ла.}$ $x+1=a$ $x=a-1$

$4-x=4-a+1=5-a$

$$\begin{cases} a-b+3=2ab \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$$

$a=\sqrt{x+1}$

$b=\sqrt{4-x}$

$(a-b)^2=(2ab-3)^2=5-2ab$ $ab=c$

$4+1+9-12=5-$

$8-5+2$

$4+9-12=1$

$4-10+4$

$ab=2$ $(2c-3)^2=5-2c$

$\sqrt{(x+1)(4-x)}=2$ $4c^2+9-12c=5-2c$

$16+9-\cancel{24}$

$(x+1)(4-x)=4$ $4c^2-10c+4=0$

$2c^2-5c+2=0$

$-x^2+3x=0$ $\cancel{c_{1,2}}$

$x_1=0$ $x_2=3$ $(c-2)(2c-1)=0$

$c=\frac{1}{2}$

$(x+1)(4-x)=\frac{1}{4}$

$-x^2+3x+\frac{15}{4}=0$

$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+15}}{-2}=$

$\frac{3\pm4\sqrt{3}}{2}$

$\sqrt{0}$

$\sqrt{\frac{5+4\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\frac{5-4\sqrt{3}}{2}}=-2$

$(\sqrt{\ }-\sqrt{\ })^2=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}-25-$

Стр 3 из 3

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007713**

ID профиля: **872293**

Вариант 12

Чистовик

Часть 2. Вариант 12

Задача 1 (4)

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4} \end{cases} \quad 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = 2(x^2+y^2)^2+x^2y^2$$

$x^2+y^2=a$; $x^2y^2=b$

$$\begin{cases} \frac{1}{a}+b=\frac{5}{4} \\ 2a^2+b=\frac{9}{4} \end{cases}$$

Вычитаем из 2-го уравнения 1-е.

$2a^2-\frac{1}{a}=1 \qquad a\neq 0$

$2a^3-1=a$

$2a^3-a-1=0$

$(a-1)(2a^2+2a+1)=0$

$a_1=1$. У квадратного трехчлена $D=2^2-4\cdot 2<0$

$\Rightarrow$ единственное подходящее a это $a=1$.

$b=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$.

Теперь возвращаемся к исходным обозначениям.

21100773 (U872293 M1276059)

Чистовик

$x^2+y^2=1 \quad x^2y^2=\frac{1}{4}$

$x^2(1-x^2)=\frac{1}{4}$

$(x^2-\frac{1}{2})^2=0$

$\Rightarrow x^2=y^2=\frac{1}{2}$

$x=\pm y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ответ: $(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}),(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}),$
$(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

Чистовик

Задача 2(5)

Всего ~~уз~~ узлов сетки внутри нашего квадрата 63×63 62^2 штук. (Т.к. в каждом ряду 62 узла)

Прямые $x=y$ и $x=63-y$ есть диагонали нашего квадрата.

Всего на диагоналях расположено 124 узла. ($62\cdot2$, т.к. центрального узла нет в квадрате с нечетной стороной).

Сначала посчитаем случаи, когда точку A мы обязательно берем на диагонали, а точку B **не** на диагонали.

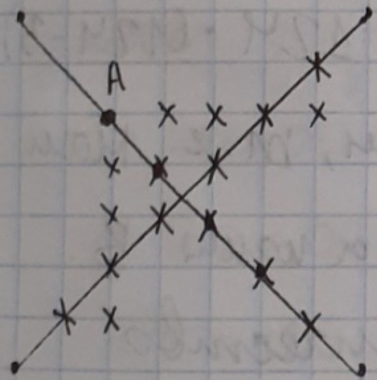
Есть 124 способа выбрать точку A.

После этого посмотрим, какие точки нельзя брать в качестве B.

1) 124 точки на диагоналях

2) 123 точки, находящиеся на одной вертикали или горизонтали с A.

Но есть среди этих 123 точек две, которые лежат на диагоналях и мы их уже посчитали в пункте (1). Именно 2, потому что любая параллельная оси прямая пересекает каждую диагональ ровно 1 раз и в разных точках (т.к. центр не целочисленная прямая)



На рисунке показан пример, какие точки B мы не можем брать при такой точке A в квадратике 7x7.

Итак, мы не можем взять как точку B $124 + (123 - 2) = 245$ точек.

Поэтому если точка A лежит, а точка B не лежит на диагонали, способов будет

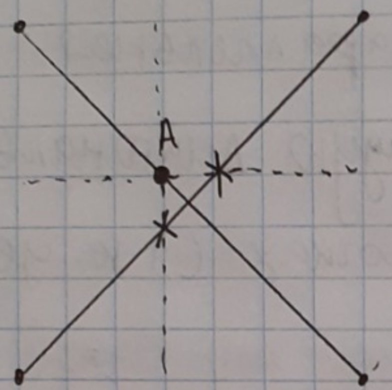
$$124 \cdot (62^2 - 245)$$

Теперь рассмотрим, когда обе точки A и B лежат на диагоналях.

211007713 (U872293 M1276059)

Чистовик

Мы по-прежнему выбираем A 124-мя способами, а на точку B есть 3 запрета – место точки A, и 2 места, находящихся



на одной вертикали и горизонтали соответственно с A.

Таким образом, способов $124 \cdot (124-3)$. И это надо поделить пополам, т.к. нам неважно, какая из точек A, а какая B. Таким образом, общее количество способов это

$$124 \cdot (62^2 - 245) + 124 \cdot 121/2 =$$
$$= 453758$$

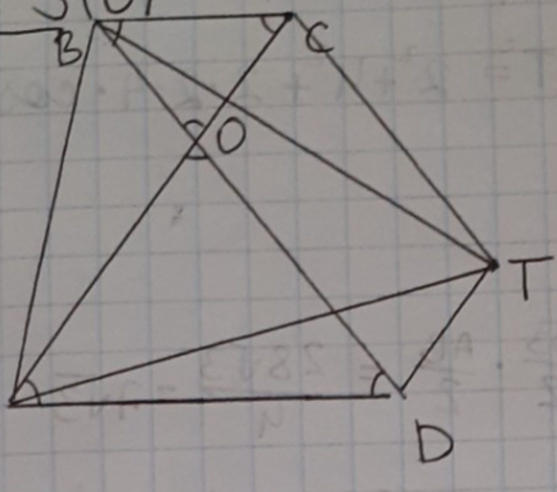
Ответ: 453758.

211007713 (U872293 M1276059)

Чистовик

Задача 3(б)

а)



ODTC – параллелограмм, т.к. диагонали делят друг друга пополам.

$\Rightarrow AD = OD = CT$

$BO = OC = TD$

$\angle ACT = 180 - \angle COD = 60^\circ \Rightarrow \angle BCT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

$\angle ACT = \angle TDB$ из параллелограмма; $\angle TDA = 120^\circ$

$\Rightarrow \triangle BCT = \triangle TDA$

$\angle CTD = 120^\circ$ из параллелограмма

$\angle CTB + \angle ATD = \angle TAD + \angle ATD = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle BTA = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABT$ – правильный.

211007713 (U872293 M1276059)

чистовик

б) $BC=2 \quad AD=4$

$AT^2 = AB^2 = BT^2 = 2^2+4^2-2\cdot2\cdot4\cdot\cos 120^\circ$

$=20+8=28$

$AT=2\sqrt{7}$

$S(ABT)=AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{AB}{2}=\frac{28\sqrt{3}}{4}=7\sqrt{3}$

$S(ABCD)=S(AOD)+S(BOC)+2S(COD)$, т.к.

$\triangle DOC=\triangle AOB$

$S(AOD)=AD^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$

$S(BOC)=BC^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}$

$S(COD)=CO\cdot OD\cdot\sin 120/2=2\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=2\sqrt{3}$

$S(ABCD)=4\sqrt{3}+\sqrt{3}+4\sqrt{3}=9\sqrt{3}$

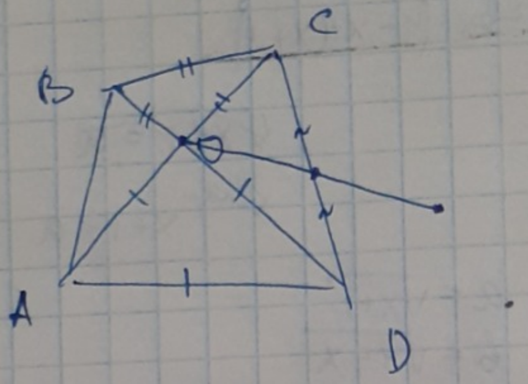
$\frac{S(ABT)}{S(ABCD)}=\frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}=\frac{7}{9}$

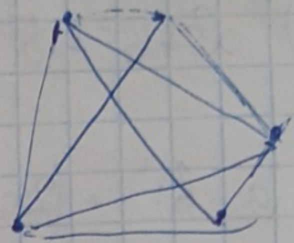
Ответ: $\frac{7}{9}$

211007713 (U872293 M1276059)

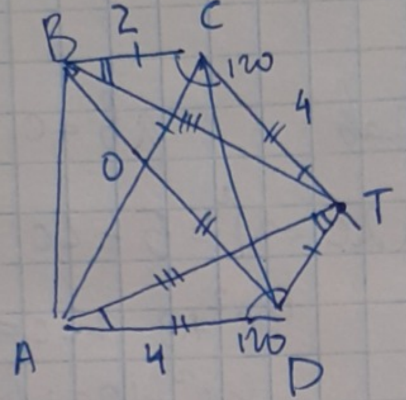
Черновик

6.





а)



б) $BT^2 = 2^2 + 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 4 + 16 + 8 = 28$

$BT = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$S(ABCD) = S(ADO) \cdot + S(BOC) + 2S(COD) =$

$2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

$\frac{4 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{2} = 4\sqrt{3}$ AOD

$\frac{2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{2} = \sqrt{3}$ BOC

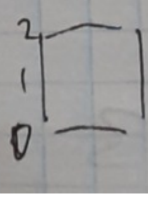
ABT

$\frac{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} =$

$= \sqrt{7} \cdot 3$

$\frac{5\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 3$

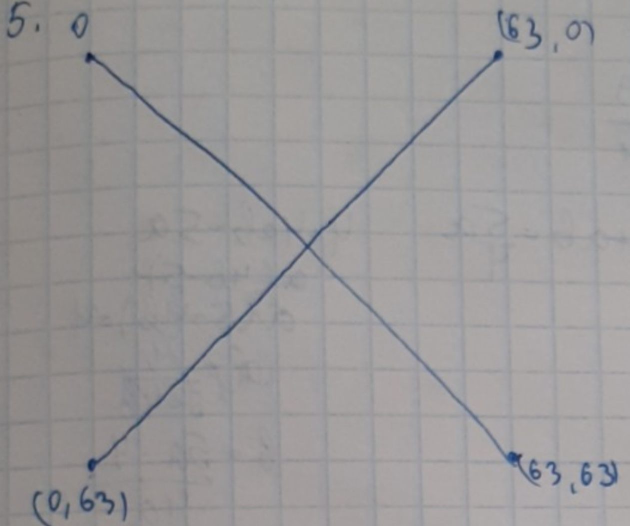
$\frac{3\sqrt{7}}{9\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$



Стр 1 из 4

Черновик

5.



выбрать 2 узла не вкл. гр.

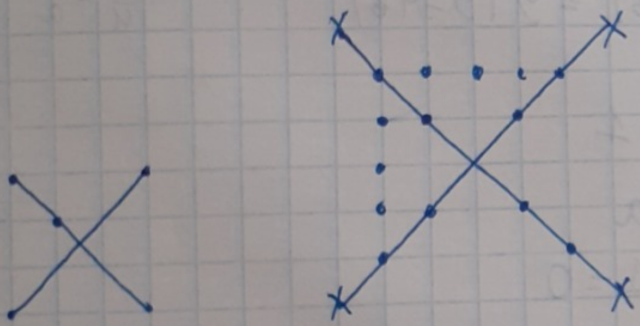
хотя бы 1 лежит

на хотя бы 1 прямой

~~1й узел как попало~~

1й узел на диагонали,

2й не на диагонали



63 на каждой диагонали

всего 125

$124\cdot(63^2-125-124)$

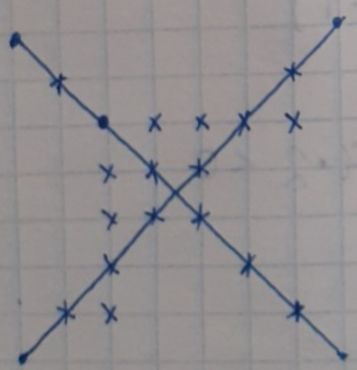
~~не центр~~ ~~центра нет~~

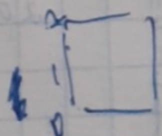
~~центр~~ центр есть

~~$(62^2-123-$~~

центр

$(63^2-125-124)$





$$\begin{array}{r} 3661 \\ \times\ 123 \\ \hline 10983 \\ 7322 \\ 3661 \\ \hline 450303 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 124 \\ +\ 121 \\ \hline 245 \end{array}$$

3844

$$\begin{array}{r} 3844-1 \\ -\ 183 \\ \hline 3661 \end{array}$$

62 на каждой диагонали

всего 123

$123(62^2-123-120)$

центра нет

$123(62^2-123+60)-$

$=123($

Если 2й тоже на диагонали

$$\frac{123\cdot120}{2}$$

Ответ: 450303

Стр 2 из 4

Черновик

$$\frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4}$$

$x^2+y^2=a$

$x^2y^2=b$

$,b>0$

$$2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{a}+b=\frac{5}{4}\\ 2a^2+b=\frac{9}{4}\end{cases}$$

$1+ab=\frac{5}{4}a$ $\quad$ $4+4ab=5a$

$\cancel{a(4b-5)}$

$\cancel{a(5-4b)=4}$

$\cancel{a=\frac{4}{5-4b}}$

$b=\frac{5a-4}{4a}=$

$=\frac{5}{4}-\frac{1}{a}$

$$2\frac{16}{(5-4b)^2}+b=\frac{9}{4}$$

$$128+b(5-4b)^2=9(5-4b)^2$$

$32 \cdot 4$

$2\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

$$2a^2-\frac{1}{a}=1$$

$$2a^3-1=a$$

$$2a^3-a-1=0$$

$$(a-1)(2a^2+2a+1)$$

$\Rightarrow a=1$ $\quad$ $2a^2+2a+1$

$b=\frac{1}{4}$ $\quad$ $D=4-4\cdot 2<0$

$x^2+y^2=1$ $\quad$ $x^2=y^2=\frac{1}{2}$

$x^2y^2=\frac{1}{4}$

$m+n=1$

$mn=\frac{1}{4}$

$n(1-n)=\frac{1}{4}$

$\cancel{-n^2+}$

$n^2-n+\frac{1}{4}=0$ $\quad$ $(n-\frac{1}{2})^2$

$$n_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-1}}{2}=\frac{1}{2}$$

21100713 (U872293 M1276059)

Черновик

$$
\begin{array}{r}
-\;3844 \\
245 \\
\hline
3599 \\
\times\;124 \\
\hline
14376 \\
7198 \\
3599 \\
\hline
446276 \\
+\;7502 \\
\hline
453758
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\times\;682 \\
11 \\
\hline
682 \\
682 \\
\hline
7502
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\times\;62 \\
62 \\
\hline
124 \\
372 \\
\hline
3844
\end{array}
$$