Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007689**

ID профиля: **853290**

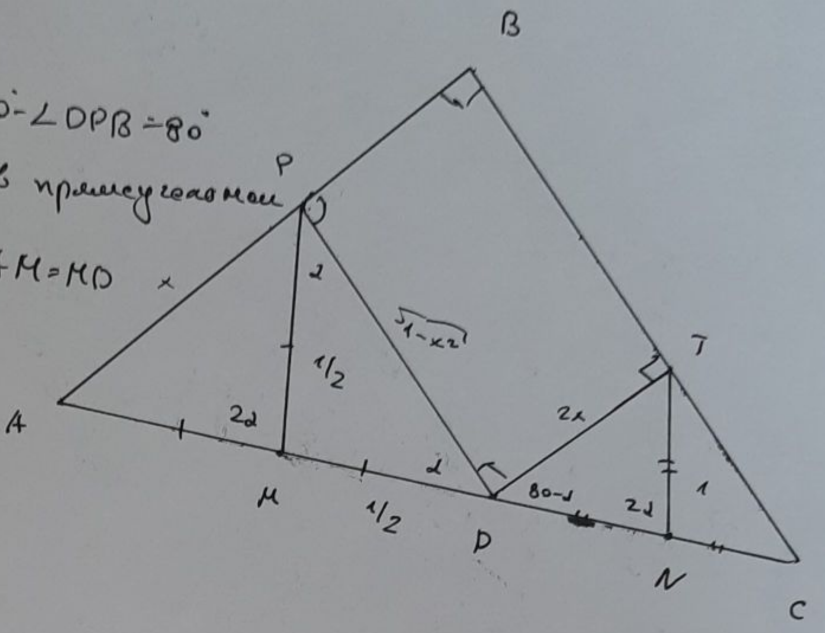
Вариант 12

Чистовик

Задача №1 (~~неразборчиво~~)

1. $PM = MD = AM$

Док: Заметим, что $\angle APD = 180^\circ - \angle DPB = 90^\circ$



Значит PM - медиана в прямоугольном треугольнике $\Rightarrow PM = \frac{AD}{2} = AM = MD$

2. Аналогично ~~$\angle TNP =$~~ $TN = DN = NC$

3. Пусть $\angle PMA = 2\alpha$. Тогда $\angle MDP + \angle MPD = 2\alpha$
Но т.к. $MP = MD$ $\quad 2\angle MDP = 2\alpha \Rightarrow \angle MDP = \alpha$

4. Т.к. $PM \parallel TN$ $\quad \angle TNP = 2\alpha \Rightarrow \angle NPT + \angle NTP = 180^\circ - 2\alpha$
Но $PN = TN \Rightarrow \angle NPT = \angle NTP \Rightarrow 2\angle NDT = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle NPT = 90^\circ - \alpha$

5. Угол $\angle PDT = 180 - \angle PDM - \angle TDN = 180^\circ - \alpha - 90 + \alpha = 90^\circ$

6. По сумме углов четырехугольника $PBTD$
$\angle ABC = \angle PBT = 360 - \angle BPD - \angle BTD - \angle PDT = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Значит в пункте А Ответ: 90°

Перейдем к решению пункта б

Заметим, что $\triangle PMA \sim \triangle TND$ т.к. по двум сторонам и углу между ними. $\Rightarrow \frac{PA}{TD} = \frac{PM}{TN} = \frac{1}{2}$

Пусть $PA = x \Rightarrow TD = 2x$

$AP = 2 \cdot PM = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ Чистовик

Тогда по т. Пифагора ($\triangle APD$) $PD^2 = 1 - AD^2 = 1 - x^2$

Заметим, что $PBTD$ - прямоугольник $\Rightarrow TD = PB = 2x$

Тогда по т. Пифагора ($\triangle PBD$) $BD^2 = PB^2 + PD^2 =$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = (2x)^2 + 1 - x^2$$

$$\frac{16}{9} = 4x^2 + 1 - x^2$$

$$\frac{16}{9} = 1 + 3x^2$$

$$3x^2 = \frac{7}{9}$$

$$x^2 = \frac{7}{27}$$

$$x = \sqrt{\frac{7}{27}}$$

$$PD = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{\frac{20}{27}}$$

$$S_{APD} = \frac{PD \cdot DA}{2} = \frac{\sqrt{\frac{7 \cdot 20}{27^2}}}{2} = \frac{\sqrt{35}}{27}$$

~~Но т.к. $PD \parallel BC$ (т.к. $\angle APD = \angle ABC = 90°$)~~

Но т.к. $\angle APD = \angle ABC = 90°$ $PD \parallel BC \Rightarrow \angle ADP = \angle ACB = \alpha$

Значит. ~~тр~~ $\triangle APD \sim \triangle ABC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{APD}} = \left(\frac{AP}{AB}\right)^2 = 9$$

2

$$S_{ABC} = 9 \cdot S_{APD} = 9 \cdot \frac{\sqrt{35}}{27} = \frac{\sqrt{35}}{3}$$

Ответ: $\angle ABC = 90°$, $S_{ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Чистовик.

Задача №2

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{(x+1)(4-x)}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\cdot\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}$$
$$\Updownarrow$$
$$-2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x} + 3 = \sqrt{4-x} - \sqrt{x+1}$$
$$\Updownarrow$$
$$(\sqrt{x+1})^2 - 2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x} + (\sqrt{4-x})^2 + 3 = \sqrt{4-x} - \sqrt{x+1} + 5$$
$$\Updownarrow$$

т.к. $(\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{4-x})^2 = 1+4=5$

$$(\sqrt{4-x} - \sqrt{x+1})^2 = \sqrt{4-x} - \sqrt{x+1} + 2$$
$$\Updownarrow$$
$$\left[\begin{array}{ll} \sqrt{4-x} - \sqrt{x+1} = -1 & (1) \\ \sqrt{4-x} - \sqrt{x+1} = 2 & (2) \end{array}\right.$$

Заметим, что $\sqrt{4-x}$ ↓ на $[-1;4]$ т.к. $4-x \geq 0$ на $[-1;4]$ и $4-x$ ↓ на $[-1;4]$

Заметим, что $\sqrt{x+1}$ ↑ на $[-1;4]$ т.к. $x+1 \geq 0$ на $[-1;4]$ и $x+1$ ↑ на $[-1;4]$

Но и все подх. $x \in [-1;4]$ т.к. выраж. определено на $[-1;4]$

Значит $\underbrace{\sqrt{4-x} - \sqrt{x+1}}_{f(x)}$ убывает на $[-1;4]$

3

~~Но $f(-1) = \sqrt{5}$~~

Значит у каждого уравнения из (1), (2) есть не более одного решения

(1) $x_1 = 3$

(2)

Подходи => другие нет

(4) Решим второе уравнение. Чистовик

$$\sqrt{4-x} - \sqrt{x+1} = 2$$

$$\sqrt{4-x} = 2 + \sqrt{x+1}$$

$$4-x = 4 + x + 1 + 4\sqrt{x+1}$$

$$-2x - 1 = 4\sqrt{x+1}$$

$$2x+1 + 4\sqrt{x+1} = 0$$

$$2(x+1) + 4\sqrt{x+1} - 1 = 0$$

$$\sqrt{x+1} = \frac{-4 + \sqrt{24}}{4} \quad \text{т.к. } \sqrt{x+1} \geq 0$$

$$\sqrt{x+1} = \frac{-2 + \sqrt{6}}{2}$$

$$x+1 = \left(\frac{-2+\sqrt{6}}{2}\right)^2$$

$$x = \left(\frac{-2+\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 1$$

Значит если корень существует, то он такой. Но заметим что корень существует т.к. $f(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{x+1}$ непрерывна. В точке $x=-1$ $f(-1) = \sqrt{5} > 2$, а $f(3) = -1 < 2$

Значит 2 достигается => отве

Ответ: 3; $\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 1$

(По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении)

(4)

Задача №3 Числовик

1. Выясним координаты точки B

$ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$

(~~выразим~~

$ay = ax^2 + 4a^2x + 4a^3 + 2$ Заметим, что $a \neq 0$

$y = x^2 + 4ax + 4a^2 + \frac{2}{a}$ иначе это парабола не существ. т.к $2 \neq 0$

Тогда $B_x = \frac{-4a}{2} = -2a$

Тогда $B_y = 4a^2 - 8a^2 + 4a^2 + \frac{2}{a}$.

Значит $B = (-2a ; \frac{2}{a})$

2. Выясним координаты точки A

$2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$

$(x+y)^2 + 4y^2 + 2a^2 - 2ax - 6ay = 0$

$(x+y)^2 + 4y^2 + 2a^2 - 4ay - 2a(x+y) = 0$

$(x+y)^2 - 2a(x+y) + a^2 + a^2 - 4ay + (2y)^2 = 0$ 5

$(x+y-a)^2 + (2y-a)^2 = 0$

Значит $\begin{cases} 2y - a = 0 \\ x+y-a = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = a/2 \Rightarrow x+y = a$

Заметим, что что с одной стороны от прямой $x+y=3$ сумма координат точек больше 3 а с другой меньше 3

Значит для решения задачи Чистовик
необходимо и достаточно.
Решить систему.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 3 \\ \frac{2}{a} - 2a > 3 \end{cases} \\ \begin{cases} a < 3 \\ \frac{2}{a} - 2a < 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

т.к. $a = A_x + A_y$

$\frac{2}{a} - 2a = B_x + B_y$.

Заметим, что $\begin{cases} a > 3 \\ \frac{2}{a} - 2a > 3 \end{cases}$ решений не имеет

~~т.к. 1) $a > 3 \Rightarrow 2a > 6$)~~

~~2) $\frac{2}{a} < \frac{2}{3}$ ...~~

т.к. $a > 3 \Rightarrow \begin{cases} 2a > 6 \\ \frac{2}{a} < \frac{2}{3} < 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{a} - 2a < -5 < 3$ Получили противор.

$\begin{cases} a < 3 \\ \frac{2}{a} - 2a < 3 \end{cases}$

1° $a > 0 \Rightarrow \frac{2}{a} - 2a < 3 \Leftrightarrow$

$2 - 2a^2 < 3a$

$2a^2 + 3a - 2 > 0$

$2(a+2)(a - \frac{1}{2}) > 0$

a [illegible] т.к. $a > 0$

$a > \frac{1}{2}$

Но $a < 3$

Значит $a \in (\frac{1}{2}; 3)$ подходят:

6

Чистовик

2'

$a < 0$ $\quad \frac{2}{a} - 2a < 3 \Leftrightarrow$

$\cancel{2 - 2a^2} > 3$

$2 - 2a^2 > 3a$

$2a^2 + 3a - 2 < 0$

$2(a+2)(a-\frac{1}{2}) < 0$

$\Updownarrow$ т.к. $a < 0$

$a > -2$

Знач. подходит $a \in (-2; 0)$

Ответ: $(-2; 0) \cup (\frac{1}{2}; 3)$

7

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007689**

ID профиля: **853290**

Вариант 12

Задача №4 чистовик.

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2 \cdot y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2 \cdot y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Пусть $a = x^2$

$b = y^2$

$$\begin{cases} \frac{1}{a+b} + a \cdot b = \frac{5}{4} \\ 2a^2 + 2b^2 + 5 \cdot a \cdot b = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$2a^2 + 2b^2 + 5 \cdot a \cdot b = \frac{9}{4} = 1 + \frac{5}{4} = \frac{1}{a+b} + ab + 1$$

$$2a^2 + 2b^2 + 5 \cdot ab = \frac{1}{a+b} + ab + 1$$

$$2a^2 + 2b^2 + 4ab = \frac{1}{a+b} + 1$$

$$2(a+b)^2 = \frac{1}{a+b} + 1$$

$$2(a+b)^3 = (a+b) + 1$$

1

Пусть $t = a+b$

$$2t^3 = t + 1$$

$$2t^3 - t - 1 = 0$$

$$(t-1)(2t^2+2t+1) = 0$$

$$(t-1)(t^2+t^2+2t+1) = 0$$

$$(t-1)(t^2+(t+1)^2) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} t-1=0 \\ t^2+(t+1)^2=0 \end{array}\right.$$ но если $t^2+(t+1)^2=0$, то $t=0$ и $t+1=0$

Т.е $t=0$ и $t=-1$ ~~Получили~~ Числовым противоречие

Значит ~~$t=t$~~ $t-1=0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x^2+y^2=a+b=t=1$

Тогда $\frac{1}{a+b}+ab=\frac{1}{1}+ab=\frac{5}{4}\Rightarrow$

$\Rightarrow ab=\frac{1}{4}$

$a+b=1$
$a\cdot b=\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow$ a, b - корни ур-я $x^2-x+\frac{1}{4}$

по т. Виетта

т.е $a=b=\frac{1}{2}$

$x^2=y^2=\frac{1}{2}$

$\Downarrow$

4 ответа.

Ответ: $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$;
$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Задача №5 Чистовик

Решение: 3

Пусть S - количество пар, нам не подходящих

Пусть A - количество пар всего.

Тогда ответ: $A - S$

$A = C^2_{62^2}$ т.к. точек всего 62^2

Пусть мн-во пар точек, нам не подходящих это S'

Пусть мн-во пар точек, точки в которых лежат на одной прямой (паралл. одной из осей) - S_1

Пусть мн-во пар точек, точки в которых (ни одна из) не лежит на прямых $y = x$ или

$y = 63 - x$ - S_2

Тогда $S' = S_1 \cup S_2$ (т.к. только такие точки не подходят)

$|S'| = |S_1| + |S_2| - |S_1 \cap S_2|$ по формуле включений и исключен.

Тогда ответ $A - S = A - |S'| = A - |S_1| + |S_2| + |S_1 \cap S_2|$

Вычислим $|S_1|$

~~В каждой~~ е. В силу симметр отн-но прямой $y = x$ кол-во пар точек, лежащих на прямой, параллельной оси O_y столько же, сколько пар точек лежащих на прямой параллельной оси O_x

(т.к. симметрия, очевидно устанавливает взаимно однозначное соответствие и мн-во не пересек.)

Значит достаточно посчитать кол-во пар точек, лежащие на прямой, параллельной оси O_y.

Чистовик

Заметим, что пара точек такова <=> когда точки лежат в одном столбце.
Всего в каждом из 62 столбцов 62 точки. Значит кол-во пар из них составленных:

$$|S_1| = 2 \cdot C_{62}^{2} \cdot 62$$

т.к. паралл. оси O_x и O_y см | кол-во пар точек в каждом столбце | кол-во столбцов

Заметим, что каждая пара посчитана ровно 1 раз в своем столбце или строке => формула верна.

Вычислим $|S_2|$

S_2 - множество всевозможных пар точек лежащие внутри кв-та и не лежащие ни на одной из прямых $y = x$ и $y = 63 - x$

Заметим, что прямые $y = x$ и $y = 63 - x$ пересекаются в точке $\{31{,}5; 31{,}5\}$ которая не является целочисленной и каждая прямая занимает в квадрате по 62 точки (по 1 в каждом столбце) т.к. $63 - 62 = 1$ Чистовик (5)

$63 - 1 = 62$

Значит всего подходящих точек для составления пары: $62^2 - 2 \cdot 62$

всего точек ↑ кол-во не подх. ↑

Значит $|S_2| = C^2_{62^2 - 2\cdot 62}$

Вычислим $|S_1 \cap S_2|$

Это кол-во пар точек лежащих ~~на одной~~ из ~~осей~~ на прямой, параллельной одной из осей и ни одна точка из пары которых не лежит на прямой $y=x$ или $y = 63 - x$

Из сообр. симметрии. (т.к. прямая $y = 63 - x$ перпендикулярно прямой $y = x$ т.е. симметрична сама себе отн-но ее) достаточно посчитать пары, прямые образов. которыми параллельны оси Oy. Заметим, что в каждом столбце каждая из двух прямых "занимает" ровно ($y = x$ и $y = 63 - x$) по одной клетке, а из оставшихся можно составить ~~пары~~ пар C^2_{62}.

Чистовик 6

Значит $|S_1 \cap S_2| = 2 \cdot C_{60}^2 \cdot 62$

(параллельность Ox и Oy из симметрии) ~~по [illegible] кол-ву пар с [illegible] Oy равно кол-ву пар пар.~~ ~~Итого~~

кол-во пар в каждом столбце

кол-во столбцов

Заметим, что каждая пара посчитана ровно 1 раз в своей строке или столбце.

Значит ответ $Ans = A - S = A - |S_1| - |S_2| + |S_1 \cap S_2| =$

$$= C_{62^2}^2 - 2 \cdot C_{62}^2 \cdot 62 - C_{62^2-2\cdot 62}^2 + 2 \cdot C_{60}^2 \cdot 62$$

$$\cancel{C_{62^2}^2 = C_{3844}^2 = \frac{3844 \cdot 3843}{2} = 1922 \cdot 3843}$$

Для дальнейших рассчетов выведем вспомогательную формулу

$$C_x^2 - C_{x-y}^2 = \frac{x(x-1)}{2} - \frac{(x-y)(x-y-1)}{2} =$$

$$= \frac{x^2 - x - (x^2 - 2xy + y^2 - x + y)}{2} = \frac{2xy - y^2 - y}{2}$$

Листови ⑦

$$A_{ns} = \underbrace{C_{62^2}^2 - C_{62^2-2\cdot 62}^2}_{A_1} + \underbrace{62\cdot 2\left(C_{62}^2 - C_{60}^2\right)}_{A_2} =$$

$$A_1 = C_{62^2}^2 - C_{62^2-2\cdot 62}^2 = \frac{2\cdot 62^2\cdot 2\cdot 62 - 4\cdot 62^2 - 2\cdot 62}{2} =$$

$(x = 62^2 \quad y = 2\cdot 62)$

$$= 62^2\cdot 124 - \cancel{2}\cdot 62^2 - 62 = 62^2\cdot 122 - 62$$

$$A_2 = C_{62}^2 - C_{60}^2 = \frac{2\cdot 62\cdot 2 - 4 - 2}{2} = 2\cdot 62 - 3 = \cancel{}$$

$$A_{ns} = 62^2\cdot 122 - 62 + 62\cdot 2\cdot(2\cdot 62 - 3) =$$

$$= 62^2\cdot 122 - 62 - 62^2\cdot 4 + 6\cdot 62 =$$

$$= 62^2\cdot 118 + 5\cdot 62 = 3844\cdot 118 + 310 =$$

$\cdot 1022672$

$= \cancel{30752} + 310 = \cancel{31062} \quad 1022882$

Ответ: ~~31062~~ 1022882

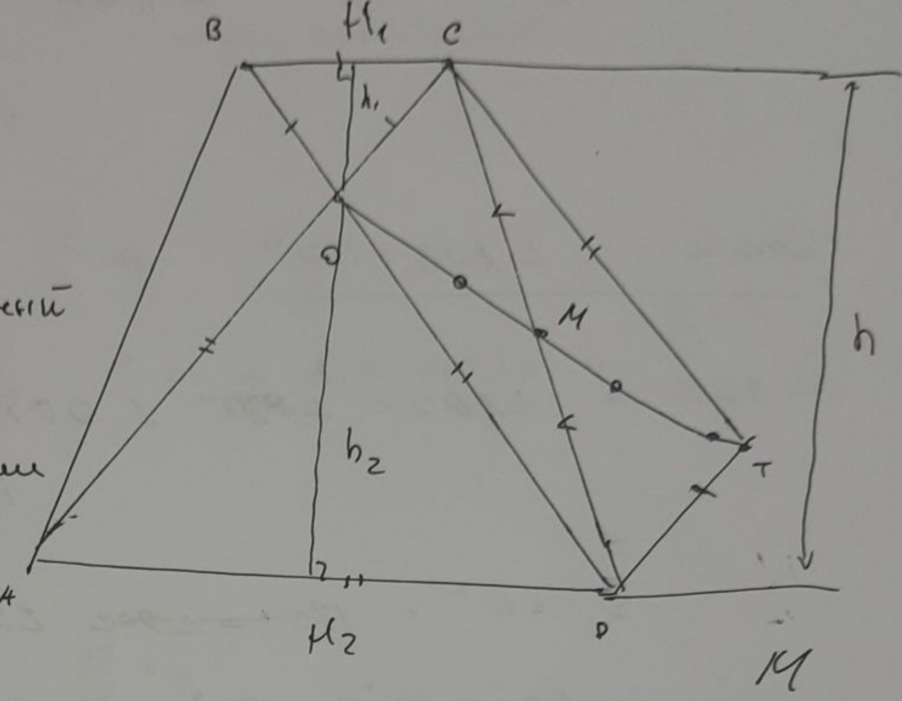
Задача №6 Иметь вид 8

Докажем, что

~~ADT~~

△ AOB = △ ADT = △ TCB

Заметим, что



$AO = OB$ т.к. △ AOB правильный

$OD = CT$

т.к. $OCTD$ – параллелограмм

т.к. $CM = MD$

т.к. M – середина CD

и $OM = MT$ т.к. T симметрично O отн-но M

(диагонали точкой пересечения делятся пополам)

Значит $AO = OD = CT \Rightarrow AO = CT$ и $AO = AD$ т.к. △ AOD правильный

Итого: $AO = AD = TC$

$BO = BC$ т.к. △ BOC правильный

$BO = OC = TD$ т.к. $OCTD$ – параллелограмм

Значит $BO = TD$

Итого: $OB = DT = CB$

Осталось доказать, что $\angle AOB = \angle ADT = \angle TCB$

тогда любые два из треугольников △ AOB, △ ADT и △ TCB будут равны по двум сторонам и углу между ними.

Чистовик 3

Заметим, что $\angle AOB = 180^\circ - \angle DOA =$

$= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

т.к. AOD правильный

Итого $\angle AOB = 120^\circ$

$\angle ADT = \angle ADO + \cancel{\angle ODT}\ \angle ODT = 60^\circ + \angle ODT =$

т.к. $\triangle AOD$ правильный

$= 60^\circ + \cancel{180 - \angle BOC}\ \angle BOC =$ т.к. $OC \parallel DT$

$= 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ т.к. $\triangle BOC$ правильный.

т.к. $OC\cancel{TA}$ паралл.

Итого $\angle ADT = 120^\circ$

$\angle TCB = \angle OCB + \angle OCT = \angle OCB + \angle AOD =$

т.к. $CT \parallel OD$

$= 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

т.к. $\triangle AOB$ и $\triangle OCB$ правильные. т.к. $OC\cancel{DT}$ TD - паралл.

$\angle TCB = 120^\circ$

Значит ~~$\triangle AOB$~~ $\angle AOB = \angle ADT = \angle TCB = 120^\circ$

Значит $\triangle AOB = \triangle ADT = \triangle TCB \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = AT = TB \Rightarrow \triangle ABT$ правильный.

Листовки 10

Выведем несколько общих формул для правильного треугольника со стороной a

1) Высота $h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

т.к. $h = a \cdot \sin(60^\circ) = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Площадь $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$

Т.к. $S = \frac{h \cdot a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a \cdot a = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$

Заметим, что $ABCD$ - трапеция т.к. $BC \parallel AD$ (т.к. $\angle BCO = \angle OAD = 60^\circ$, т.к. $\triangle OCB$ и OAD правильные), AC - секущая)

Значит $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h$, где h - расстояние между прямыми BC и AD

~~Заметим что~~ Опустим из т. O перпендикуляры OH_1 на BC и OH_2 на AD

Заметим, что H_1OH_2 - одна прямая, т.к. $OH_2 \perp AD \Rightarrow OH_2 \perp BC$ т.к. $AD \parallel BC \Rightarrow$ $OH_1 \perp BC \Rightarrow H_1OH_2$ - прямая

$\Rightarrow OH_1 \parallel OH_2$ т.к. перпендикулярна BC и AD.

Вк Листовки (11)

Значит $h = OH_1 + OH_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot BC + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AD$

по выведенной формуле $= \sqrt{3} + 2\sqrt{3} =$

$= 3\sqrt{3}$

Значит $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot H = \frac{2+4}{2} \cdot 3\sqrt{3} =$

$= 9\sqrt{3}$

Вычислим S_{ABT} т.к. ABT правильный достаточно вычислить его сторону

Вычислим AB по теореме косинусов в треугольнике AOB

$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2 \cdot AO \cdot OB \cdot \cos(\angle 120°)$

$AB^2 = AD^2 + BC^2 - 2 \cdot AD \cdot BC \cdot \cos(120°)$

т.к. $AO = OD$ и $OB = BC$, т.к.

$\triangle AOB$ и BOC правильные

$AB^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 16 + 4 + 8 =$

$= 28$

$AB = \sqrt{28}$

Тогда по выведенной формуле

$S_{ABT} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \cancel{28}\, AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 28 = 7\sqrt{3}$

Чистовик (12)

Значит $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = 7/9$

Ответ: $7/9$.