Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

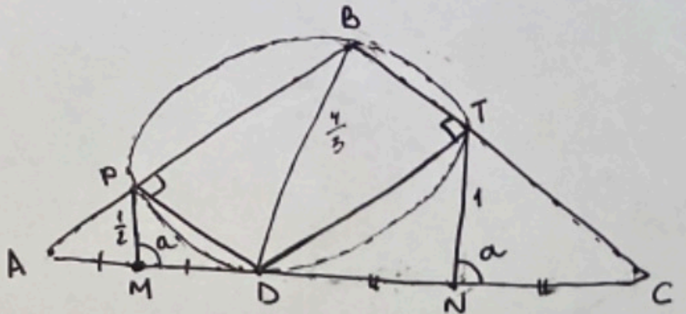
Шифр: **211007681**

ID профиля: **884482**

Вариант 12

Чистовик

1.



①

а)

1) Так как $PM \parallel TN$, то $\angle PMD = \angle TNC = a$

2) Проведем PD и DT. т.к $\angle DPB$ и $\angle BTD$ опираются на диаметр, то $\angle DPB = \angle BTD = 90^\circ \Rightarrow \angle APD = 180 - \angle PBD = 90^\circ$ и $\angle DTC = 180 - \angle BTD = 90^\circ$

3) Рассмотрим $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ - они прямоугольные.
Т.к PM - медиана к гипотенузе, то $PM = \frac{1}{2}AD \Rightarrow PH = AM = MD$.
Аналогично TN медиана к гипотенузе $\Rightarrow TN = DN = NC$

4) $\angle TND = 180 - a$, т.к $\triangle TND$ - р/б, то $\angle TDN = \frac{a}{2}$, $\angle PDM = 90 - \frac{a}{2}$
(т.к $\triangle PMD$ - р/б) $\Rightarrow \angle PDT = 180 - \frac{a}{2} - (90 - \frac{a}{2}) = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ABC = 180 - \angle PDT = 90^\circ$ (по теореме сумма противолеж. 180)

б) $MP = \frac{1}{2}$, $NT = 1$, $BD = \frac{4}{3}$, S_{ABC} - ?

1) $\triangle APD$ подобен $\triangle DTC \Rightarrow K = \frac{DC}{AD} = 2$
Пусть $AP = в$ и $PD = a$, тогда $TC = 2a$ и $TD = 2в$

2) Т.К. PDTB - прямоугольник, то $PB = 2в$ и $BT = a \Rightarrow S_\triangle = \frac{3в \cdot 3a}{2} =$
$= \frac{9aв}{2}$. Найдем a и в: $\begin{cases} a^2 + в^2 = 1 & (\triangle APD) \\ a^2 + 4в^2 = \frac{16}{9} & (\triangle BDT) \end{cases}$ $\begin{cases} a = \sqrt{\frac{20}{27}} \\ в = \sqrt{\frac{7}{27}} \end{cases}$

$S = \frac{9}{2}aв = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{\frac{20}{27}} \cdot \sqrt{\frac{7}{27}} =$
$\frac{9 \cdot 2 \cdot \sqrt{35}}{2 \cdot 27} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Ответ: а) $\angle ABC = 90^\circ$; б) $S = \frac{\sqrt{35}}{3}$

211007681 (U884482 M1276424)

Чистовик

2.

②

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=2\sqrt{4+3x-x^2}-3$$

$$\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}\right)^2=\left(2\sqrt{4+3x-x^2}-3\right)^2$$

$$\begin{cases} x+1+4-x-2\sqrt{4+3x-x^2}=4\left(4+3x-x^3\right)-12\sqrt{4+3x-x^2}+9 \\ x+1>0 \\ 4-x>0 \end{cases} \quad \left(\Rightarrow \left(4+3x-x^2\right)>0\right)$$

$$\begin{cases} 5-2\sqrt{4+3x-x^2}=4\left(4+3x-x^3\right)-12\sqrt{4+3x-x^2}+9 \\ x>-1 \\ x<4 \end{cases}$$

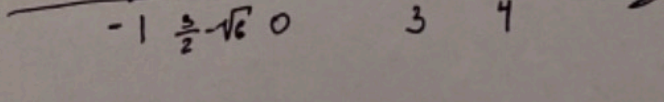
Пусть $t=\sqrt{4+3x-x^2}$

$5-2t=4t^2-12t+9$

$2t^2-5t+2=0$

$t_1=2 \quad t_2=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{4+3x-x^2}=2 \\ \sqrt{4+3x-x^2}=\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ x\geq -1 \\ x\leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 4+3x-x^2=4 \\ 4+3x-x^2=\frac{1}{4} \end{array}\right. \\ -1\leq x\leq 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \\ x=\frac{3}{2}+\sqrt{6} \\ x=\frac{3}{2}-\sqrt{6} \end{array}\right. \\ -1\leq x\leq 4 \end{cases}$$



Ответ: $0;\ 3;\ \frac{3}{2}+\sqrt{6};\ \frac{3}{2}-\sqrt{6}$

Чистовик

3. Найдем координаты точек:

(A)

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$a^2+(a-x-y)^2+4y^2-4ay=0$

$(a-x-y)^2+(2y-a)^2=0$

$\begin{cases} x+y=a \\ 2y=a \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{a}{2} \\ y=\frac{a}{2} \end{cases}$

(B) $ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

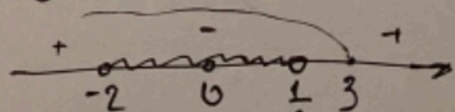
$ay=ax^2+4a^2x+4a^3+2$

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

$y=(x+2a)^2+\frac{2}{a}$

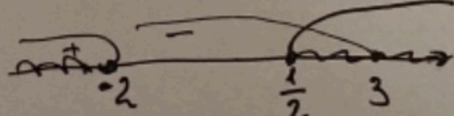
$\begin{cases} x=-2a \\ y=\frac{2}{a} \end{cases}$

(1) $\begin{cases} \frac{a}{2}+\frac{a}{2}>3 \\ -2a+\frac{2}{a}>3 \end{cases} \quad \begin{cases} a>3 \\ 2a^2+3a-2<0 \end{cases} \quad \begin{cases} a>3 \\ 2(a+2)(a-\frac{1}{2})<0 \\ a\neq 0 \end{cases}$



$\boxed{(-2;0)\cup(0;\frac{1}{2})}$

(2) $\begin{cases} \frac{a}{2}+\frac{a}{2}<3 \\ -2a+\frac{2}{a}<3 \end{cases} \quad \begin{cases} a<3 \\ 2a^2+3a-2>0 \end{cases}$



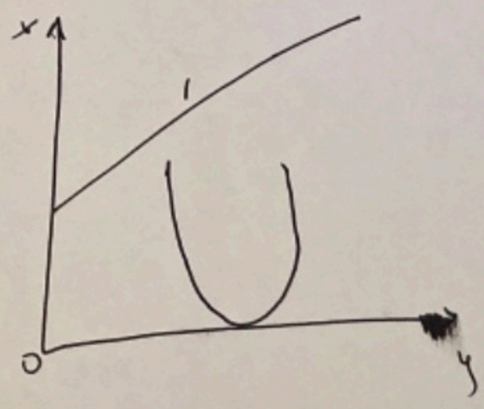
$\boxed{(-\infty;-2)\cup(\frac{1}{2};3)}$

Ответ: $(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(0;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};3)$

Черновик

$ax^2+bx+c=0$

3.



A – $2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

B – $ax^2+4a^2x-ay+4a^3+Z=0$

Вершина: $\frac{b}{2a}=\frac{4a^2+4a^3}{2ax^2}=\frac{a^2(4a+4)}{a2x^2}=$

$=\frac{4a^2(a+1)}{2a}=2a(a+1)$

A

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=ax^2+4a^2x-ay+4a^3+Z$

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2-ax^2-4a^2x+ay-4a^3-Z=0$

$-4a^3-Z$

2. $-x^2+3x+4-\frac{1}{4}$

$-x^2+3x+\frac{16}{4}-\frac{1}{4}$

$-x^2+3x+\frac{15}{4}$

$D=9+4\cdot\frac{15}{4}=24$

$x_1=\frac{-3+\sqrt{24}}{-2}=\frac{3}{2}+\sqrt{24}=\frac{3}{2}+2\sqrt{6}$

$-x^2+3x+4-\frac{1}{4}=0$

$-x+3x+\frac{15}{4}=0$

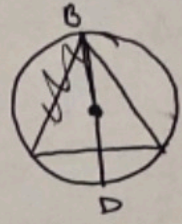
$D=9+4\cdot\frac{15}{4}=9+15=24$

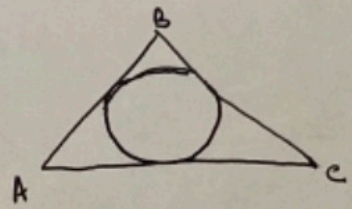
$x_1=\frac{-3+\sqrt{24}}{-2}=\frac{-3+2\sqrt{6}}{-2}=$

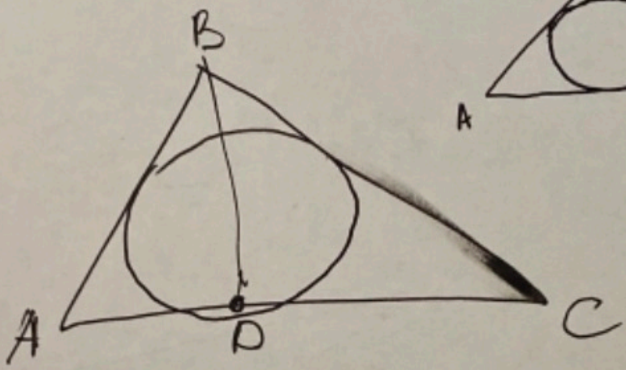
$=\frac{3}{2}-\sqrt{6}.$

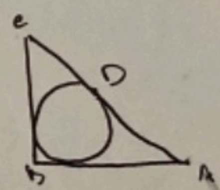
Черновик

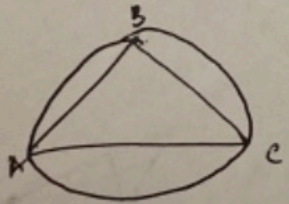
1.

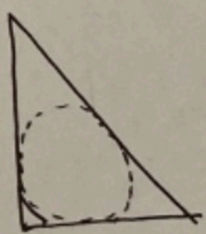


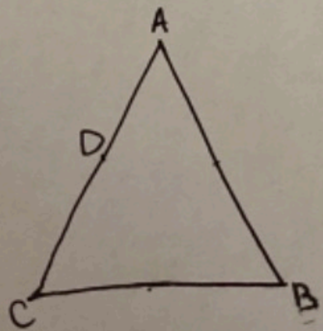


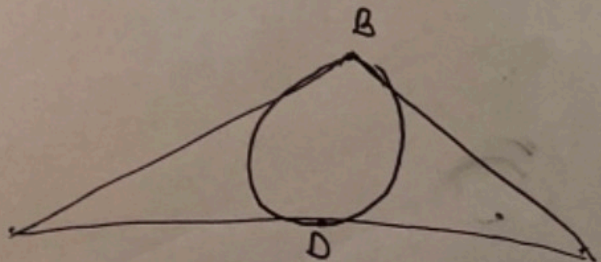


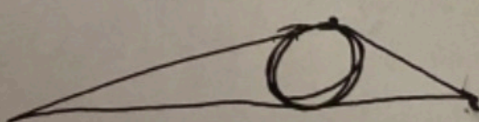












Черновик.

2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\sqrt{x+1} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2} + \sqrt{4-x} \quad \uparrow^2$

$(\sqrt{x+1} + 3)^2 = (2\sqrt{4+3x-x^2} + \sqrt{4-x})^2$

$D = 9 + 4\cdot 2 = 16$

$x_1 = \frac{-4+3}{-2} = \frac{+1}{2}$

$x_2 = \frac{-4-3}{-2} = \frac{-7}{-2} = +3{,}5$

$(\sqrt{x+1} + 3)(\sqrt{x+1} + 3) = x+1+3\sqrt{x+1} + 3\sqrt{x+1} + 9 =$

$= x + 10 +$

$(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x})^2 = (\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x})(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}) =$

$= x+1 - \sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x} - \sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x} + 4 - x =$

$= -2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x} + 5 = -2\sqrt{4x-x^2+4-x} + 5 = -2\sqrt{4+3x-x^2} + 5$

$-2\sqrt{4+3x-x^2} + 5 = 2\sqrt{4+3x-x^2} - 3$

$-2\sqrt{4+3x-x^2} - 2\sqrt{4+3x-x^2} = -8 \quad |:-2$

$\sqrt{4-3x-x^2} + \sqrt{4+3x-x^2} = -4 \qquad \sqrt{4-3x-x^2} = t$

$t + t = -4$

$2t = -4$

$t = -2$

$\sqrt{4-3x-x^2} = -2 \quad \uparrow^2$

$4 - 3x - x^2 = 4$

$-x^2 - 3x = 0$

$-x(x-3) = 0$

$x = 0 \qquad x = 3$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007681**

ID профиля: **884482**

Вариант 12

Чистовик. (1)

4.

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Пусть $x^2y^2=a$, тогда $x^2+y^2=b$

$$\begin{cases} \frac{1}{b} + a = \frac{5}{4} \\ 2(b^2-2a)+5a = \frac{9}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} ② \; a = \frac{5}{4} - \frac{1}{b} \\ ① \; 2b^2 + a = \frac{9}{4} \end{cases}$$

① $2b^2 + \frac{5}{4} - \frac{1}{b} = \frac{9}{4}$

$2b^2 - \frac{1}{b} - 1 = 0 \,|\cdot b$

$2b^3 - b - 1 = 0$

$$\begin{array}{r|l} 2b^3 - b - 1 & b-1 \\ \cline{2-2} -\;2b^3 - 2b^2 & 2b^2+2b+1 \\ \cline{1-1} -b + 2b^2 & \\ -\;2b^2 - 2b & \\ \cline{1-1} b-1 & \\ -\;b-1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$(b-1)(2b^2+2b+1)=0$

$\varnothing \; (D<0)$

$b=1$

② $a = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$

Подставим:

$x^2y^2 = \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ xy = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2x} \\ y = -\frac{1}{2x} \end{cases}$$

$x^2+y^2=1$

$x^2 + \left(\frac{1}{2x}\right)^2 = 1$

$x^2 + \frac{1}{4x^2} = 1 \,|\cdot 4x^2$

$4x^4 + 1 = 4x^2$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Чистовик (2)

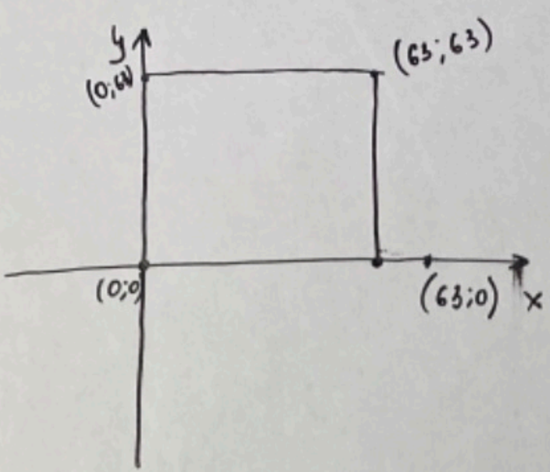
4.

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left(\begin{array}{l} y = \frac{1}{2x} \\ y = -\frac{1}{2x} \end{array} \right)$

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Чистовик ③

5.



Всего узлов $62\cdot 62$ (т.к границы не входят)

1) Найдем кол-во способов, когда на двух прямых лежит одна точка:

Выбрать её: $62\cdot 2$ (62 вар. на каждой диагонали)

Выбрать вторую: $\underbrace{62\cdot 62}_{\text{всего}} - \underbrace{2\cdot 62}_{\text{убираем все диагонали}} - \underbrace{2\cdot 61}_{\text{||-ные } x \text{ и } y} + 2$

$\Rightarrow 2\cdot 62(62\cdot 62 - 2\cdot 62 - 2\cdot 61 + 2)$ — I

2) Теперь посчитаем, когда 2 точки на диагоналями:

Выбрать первую: $2\cdot 62$

Выбрать вторую: $2\cdot 62 - 3$

всего; одна занята первой, а еще две образуют прям. ||-ную x и y.

$\Rightarrow \dfrac{2\cdot 62\cdot(2\cdot 62 - 3)}{2}$ — II

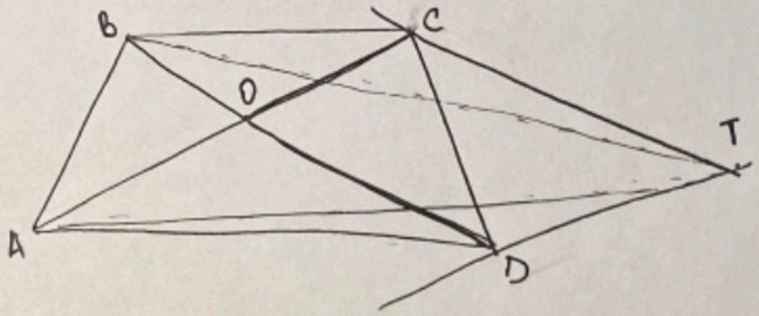
т.к точки одинаковые

Итого: I + II

$$2\cdot 62(62\cdot 62 - 2\cdot 62 - 2\cdot 61 + 2) + \frac{2\cdot 62(2\cdot 62 - 3)}{2}$$

Ответ: • Количество способов: $2\cdot 62(62\cdot 62 - 2\cdot 62 - 2\cdot 61 + 2) + \dfrac{2\cdot 62(2\cdot 62 - 3)}{2}$

6.



а)

1) Поскольку $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ - р/ст, то $BC \parallel AD$ (внутр. накрест. леж. равны)
ABCD - трапеция

2) Заметим, что OCTD - паралл-ам. (т.к диагонали пересечения делятся пополам) => $CT \parallel OD$ и $OC \parallel TD$. Также $OC = TD$ и $OD = CT$

3) Посчитаем углы: $\angle OCT = 180 - \angle COD$, а $\angle COD =$
$= 180 - 60° = 120°$ => $\angle OCT = 60$, отсюда $\angle BCT = 60 + 60 = 120$;
$\angle ODT = 60°$ (аналогично из пар-ма) => $\angle ADT = 120$
$\angle AO =$ ~~180~~ $180 - 60 = 120$

4) Рассмотрим $\triangle ABO$, $\triangle BCT$ и $\triangle TDA$
$\angle TDA = \angle BCT = \angle BOA$ (они 120°)
Также $BC = TD = BO$ и $CT = AD = AO$ => по признаку равенства $\triangle$-ка
$\triangle BOA = \triangle BCT = \triangle TDA$ =>
=> $AB = BT = AT$ => $\triangle BAT$ - равносторонний

Ответ: а) доказано, что $\triangle BAT$ - правильный см. выше.

211007681 (U884482 M1276425)

Черновик. 1

4.
$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Пусть $x^2y^2 = a$, тогда $x^2+y^2 = b$

$$\begin{cases} \frac{1}{b} + a = \frac{5}{4} \\ 2(b^2-2a)+5a = \frac{9}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{5}{4} - \frac{1}{b} \\ 2b^2-4a+5a = \frac{9}{4} \\ 2b^2+a = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$2(x^4+y^4)$

$x^4+y^4 =$

$(x^2+y^2)(x^2+y^2) =$

$= x^4 + \underbrace{x^2y^2+x^2y^2}_{2a} + y^4$

1) $2b^2 - \frac{1}{b} + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$

$\frac{5}{4} - \frac{9}{4} = \frac{-4}{4} = -1$

$2b^2 - \frac{1}{b} - 1 = 0 \mid \cdot b$

$2b^3 - b - 1 = 0$

подставим 1: $2-1-1=0$

$$\begin{array}{r|l} 2b^3 - b - 1 & b-1 \\ \hline -(2b^3-2b^2) & 2b^2+2b+1 \\ -b+2b^2 & \\ -(2b^2-2b) & \\ b-1 & \\ -(b-1) & \\ \hline \end{array}$$

$(b-1)(2b^2+2b+1) = 0$

$D = 4 - 4\cdot2\cdot1 = \varnothing$

$b-1=0$

$b=1$

$a = \frac{5}{4} - \frac{1}{1} = \frac{5}{4} - \frac{4}{4} = \frac{1}{4}$

$x^2y^2 = \frac{1}{4}$

$x^2+y^2 = 1$

$x^2 = 1-y^2$

$(1-y^2)y^2 = \frac{1}{4}$

$y^2 - y^4 = \frac{1}{4}$

$y^2(1-y^2) = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} - \frac{4}{4} = \frac{-3}{4}$

$y = \pm\frac{1}{2}$ $\quad -y^2 = -\frac{3}{4}$

$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Черновик (2)

Замена

$x^2y^2 = a \quad x^2+y^2 = b$

$$\begin{cases} x^2y^2 = a \left(\frac{1}{4}\right) \\ x^2+y^2 = b \ (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2y^2 = \frac{1}{4} \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$$①\begin{cases} (1-y^2)y^2 = \frac{1}{4} \\ x^2 = 1-y^2 \end{cases}$$

① $y^2 - y^4 = \frac{1}{4}$

$y^2(1-y^2) = \frac{1}{4}$

$y = \pm\frac{1}{2}$

$y^2 = \frac{1}{4}$

$1-y^2 = \frac{1}{4}$

$-y^2 = \frac{1}{4} - 1$

$-y^2 = -\frac{3}{4}$

$y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

найдем X $\quad x^2 = 1-y^2$ подставим.

$x^2 = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x^2 = 1 - \frac{3}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \quad x = \pm\frac{1}{2}$

Ответ: $y_1 = \pm\frac{1}{2}$; $y_2 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = \pm\frac{1}{2}$

Черновик ③

$x^2y^2 = a \qquad x^2+y^2=b$

$b=1 \qquad a=\frac{1}{4}$

$x^2+y^2=1$

$x^2+\left(\frac{1}{2x}\right)^2=1$

$x^2+\frac{1}{4x^2}=1 \mid 4x^2$

$x^2y^2=\frac{1}{4}$

$\begin{cases} xy=\frac{1}{2} \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2x} \\ y=-\frac{1}{2x} \end{cases}$

$\cancel{4x^4+1=1}$ $\quad 4x^4+1-4x^2=0$

$\cancel{4x^4=0}$

$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

$y=\frac{\sqrt{2}}{2}:\frac{1}{8\sqrt{2}}$

$4x^4-4x^2+1=0$

$4x^4+1=4x^2$

$y=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\cancel{2x^2+1=2x}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$(2x^2+1)^2=4x^2$

$\cancel{2x^2+1-2x=0}$

$\cancel{x=1}$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{2x}=y \qquad -\frac{1}{2x}=y$

$\frac{1}{2}=y \qquad -\frac{1}{2}y$

$2x^2+1=0$

$(2x^2+1)^2$

$2x^2+1=0 \qquad x^2=-\frac{1}{2}$

$(2x^2+1)(2x^2+1)$

$\cancel{x^2=\frac{1}{2}}$