Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007673**

ID профиля: **883615**

Вариант 12

Чистовик: №2 1

1

Решение: $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

Пусть: $\sqrt{x+1} = a$; $\sqrt{4-x} = b$, тогда

ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{cases}$

$a - b + 3 = 2ab$

$a - b + 3 = a^2 + b^2 - (a-b)^2$

$a - b + 3 = 5 - (a-b)^2$

$(a-b)^2 + a - b - 2 = 0$

Пусть $a - b = t$, тогда

$t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a - b = -2 \\ a - b = 1 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1 = 2\sqrt{4+3x-x^2} \\ 4 = 2\sqrt{4+3x-x^2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{4} = 4+3x-x^2 \ (1) \\ 4 = 4+3x-x^2 \ (2) \end{array}\right.$

(1): $\frac{1}{4} = 4 + 3x - x^2$

$1 = 16 + 12x - 4x^2$

$4x^2 - 12x - 15 = 0$

$\frac{D}{4} = 36 + 60 = 96 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{+6 + 4\sqrt{6}}{4} \\ x_2 = \frac{+6 - 4\sqrt{6}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{+3 + 2\sqrt{6}}{2} \\ x_2 = \frac{+3 - 2\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$

Чистовик

2

(2): $y = 4 + 3x - x^2$

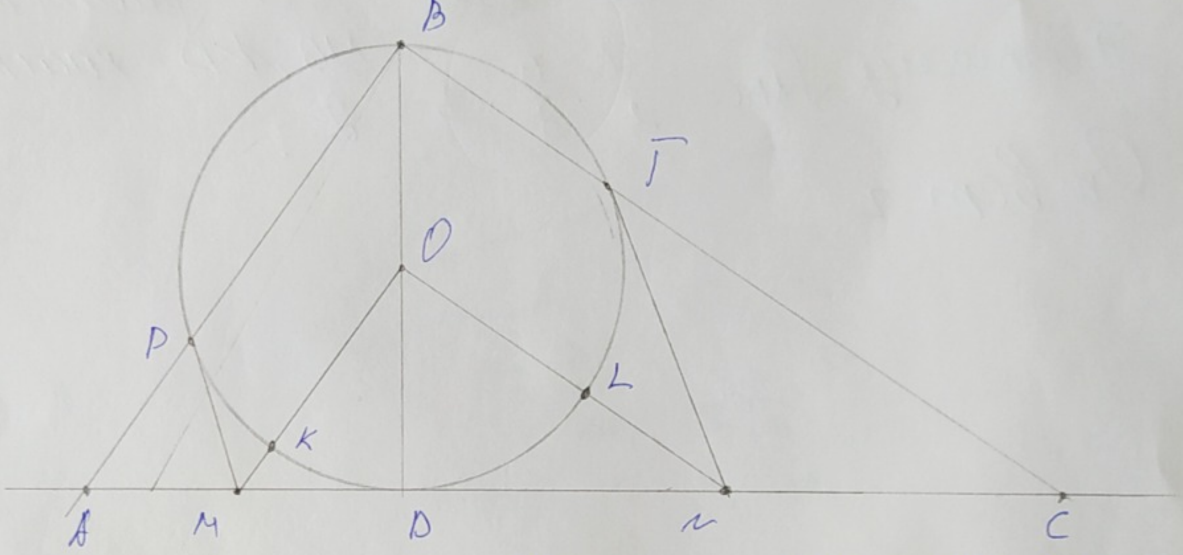
$x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = 0 \\ x_4 = 3 \end{array}\right.$

Ответ: $x \in \left\{\frac{3-2\sqrt{6}}{2}; \frac{3+2\sqrt{6}}{2}\right\}$; $x \in \{0; 3\}$.

Решение № 1

а)

1)



ABC – треугольник; $\omega(O; OD)$; $AM = MD$; $DN = NC$;
$\omega \cap AB = P$; $\omega \cap BC = T$; $MP \parallel NT$.

2) Проведём MO; NO. Треугольник $MON \sim \triangle ABC$ так как $MO \parallel AB$; $NO \parallel BC$ как средние линии треугольников ABD и BCD соответственно. $\omega \cap MO = K$; $\omega \cap NO = L$. MO и NO – биссектрисы углов PMD и TND соответственно так как ~~◡~~ $\smile DL = \frac{1}{2} \smile TL$; $\smile KD = \frac{1}{2} \smile PD$ так как O – цент окружности.

$\angle MOP = \angle PBD \Rightarrow \smile KD = \frac{1}{2} \smile PD$, аналогично

Черновик

$2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$ — A

$B = \left(-2a; \frac{2}{a}\right)$

$x + y = 3$

$5y^2 + (2x - 6a)y + x^2 - 2ax + 2a^2 = 0$

$(2x - 6a)^2 - 20x^2 + 40ax - 40a^2 =$

$= \cancel{4a} \; 4x^2 - 24ax + 36a^2 - 20x^2 + 40ax - 40a^2 =$

$= -16x^2 + 16ax - 4a^2 =$

$= \cancel{-4a^2} \; -4(4x^2 - 4ax + a^2) =$

$= -4(2x - a)^2 \geq 0$

$2x = a$

$2a^2 - a^2 - 6ay + \frac{a^2}{4} + ay + 5y^2 = 0$

$a^2 + \frac{a^2}{4} - 5ay + 5y^2 = 0$

$5a^2 - 20ay + 20y^2 = 0$

$\frac{20a}{40} = \frac{a}{2} = y$

$y > 3 - x$ $\quad x = 2a$ $\quad A = \left(2a; \frac{a}{2}\right)$

$\cancel{\frac{a}{2}}$ $\quad \cancel{2a}$ $\begin{cases} \frac{a}{2} > 3 - 2a \\ \frac{2}{a} > 3 + 2a \end{cases}$

$a > 6 - 4a$

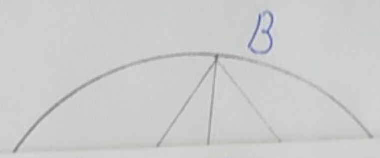
$5a > 6$

$a > \frac{6}{5}$

$\frac{2 - 2a^2}{a} > 3$ $\quad \frac{2 - 2a^2 - 3a}{a} > 0$

211007673 (U883615 M1273343)

1)



$=3$

Чистовик

5

$x+y=3$

$y=3-x$

$$\left[\begin{array}{l} y>3-x \\ y<3-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{a}{2}>3-\frac{a}{2} \\ \frac{2}{a}>3+2a \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{a}{2}<3-\frac{a}{2} \\ \frac{2}{a}<3+2a \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>3 \\ \frac{2a^2+3a-2}{a}<0 \end{cases} \\ \begin{cases} a<3 \\ \frac{2a^2+3a-2}{a}>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>3 \\ \frac{(a+2)(2a-1)}{a}<0 \end{cases} \\ \begin{cases} a<3 \\ \frac{(a+2)(2a-1)}{a}>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\cancel{a>0}$

$\Leftrightarrow$ $\cancel{a<3}$ $a\in(-2;0)\cup\left(\frac{1}{2};3\right)$

Ответ: $a\in(-2;0)\cup\left(\frac{1}{2};3\right)$.

211007673 (U883615 M1273343)

Решение: №3 Чистовик

4

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$ (1)

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$ (2)

(2): $x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}=y$

$x_B=\frac{-4a}{2}=-2a$

$y_B=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$

$B=\left(-2a;\frac{2}{a}\right)$

(1): $5y^2+(2x-6a)y+x^2-2ax+2a^2=0$

$D=4x^2-24ax+36a^2-20x^2+40ax-40a^2=$

$=-16x^2+16ax-4a^2=-4(4x^2-4ax+a^2)=$

$=-4(2x-a)^2$ так как $D\geq 0$, то $2x=a$

(1): $2a^2-a^2-6ay+\frac{a^2}{4}+ay+5y^2=0$

$5y^2-5ay+\frac{5a^2}{4}=0$

$20y^2-20ay+5a^2=0$

$4y^2-4ay+a^2=0$

$(2y-a)^2=0 \Rightarrow 2y=a \Rightarrow y=\frac{a}{2}$

$A=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$

$$\frac{2a^2+3a-2}{a}<0$$

$$9+16=25$$

$$\frac{-3\pm5}{4}=-2;\ \frac{1}{2}$$

$$\frac{2(a+2)(a-\frac{1}{2})}{a}\leq 0$$

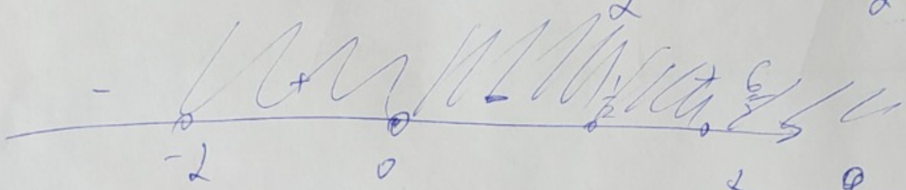
$$1-2+3=$$

$$=2\cdot2$$

$$\begin{cases}\dfrac{(a+2)(2a-1)}{a}<0\\ a>\dfrac{6}{5}\end{cases}$$

$$2-1+3=2\cdot2$$

$$1+8=9 \qquad \frac{-1\pm3}{2}=-2;\ 1$$



$$3 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{9}{2}\ \cancel{2\sqrt{6}}$$

$$(x+1)=a \qquad ab=(x+1)(4-x)= \qquad \frac{3-2\sqrt{6}}{2}\geq -1$$

$$4-x=b \qquad =-x^2+3x+4$$

$$6$$

$$\cancel{9\ 6}$$

$$a^2+b^2-(a-b)^2 \qquad 36+60 \qquad 3-2\sqrt{6}\geq -2$$

$$144+16\cdot15= \qquad 384\,|\,\frac{4}{96}$$

$$=144+256-16=144+240= \qquad -2\sqrt{6}\geq -5$$

$$=384 \qquad \sqrt{6}\leq\frac{5}{2}$$

$$6\leq\frac{25}{2}$$

$$32\cdot3=16\cdot2\cdot3$$

$$\cancel{2-1+3=24+9-9}$$

$$1-2+3=2=$$

Черновик

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$x^2 - 3x - 4 \le 0$

$9+16 = 25$

$x \in [4; -1]$

$\frac{3 \pm 5}{2} = (4; -1)$

$\sqrt{x+1} = a$

$-(x+1)(x-4) = -(x^2-3x-4)$

$a - b + 3 = 2ab$

$a + 3 = (2a+1)b$

a^2 $\cancel{(a+b)^2 - a^2 - b^2}$

$a^2 + b^2 - (a-b)^2 = 2ab$

$(a-b) + 3 = a^2 + b^2 - (a-b)^2$

$(a-b) + 3 = 5 - (a-b)^2$

$(a-b)^2 + (a-b) + 3 = 5$

$(a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0$

$1 + 8 = 9$

$-5+3$

$-(12+21)12$

$\frac{-1 \pm 9}{2} = -5; 4$

-2

$7 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\frac{7}{2}$

$\frac{49}{4} = 4 + 3x - x^2$

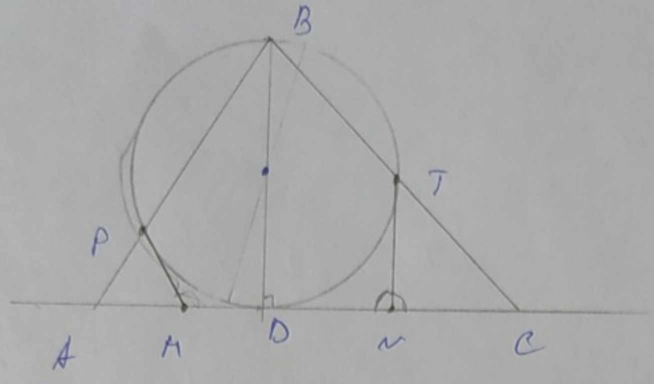
$49 = 16 + 12x - 4x^2$

$4x^2 - 12x + 33 = 0$

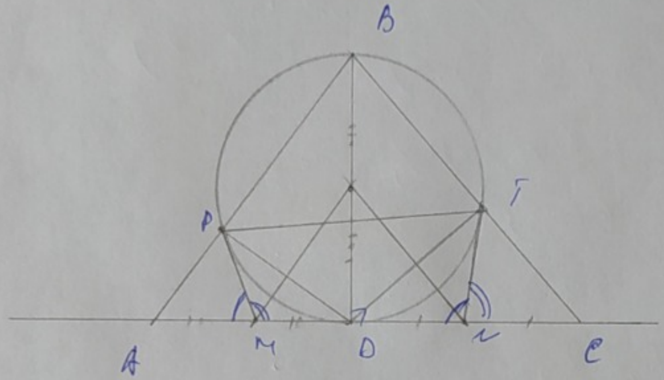
$\sqrt{144 - 33 \cdot 12} < 0$

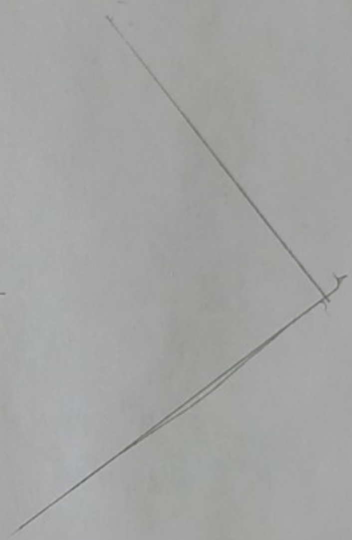
211007673 (U883615 M1273343)

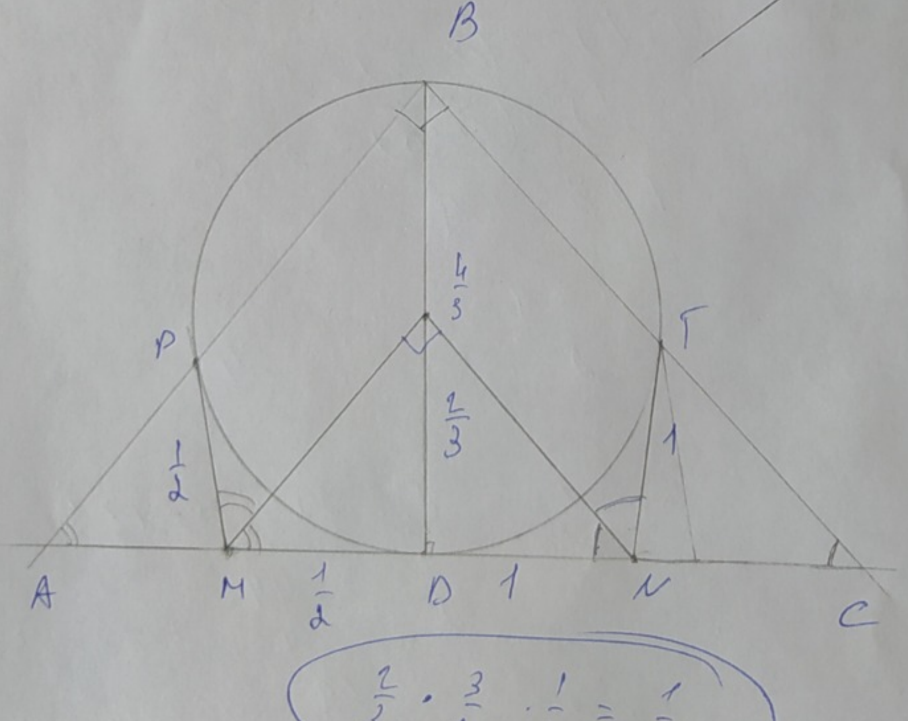
Черновик



2 − 1 + 3







$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Чистовик

3

$\angle LOD = \angle TBD \Rightarrow \smile DL = \frac{1}{2} \smile TL$.

Так как $\angle PMD + \angle TND = 180°$, то

$\angle MOD + \angle LOD = 90° \Rightarrow \angle ABC = 90°$.

Из того, что MO и NO - биссектрисы следует, что MP; MD; ND; NT - касательные к ω.

Значит $MP = MD$; $ND = NT$.

б) $MP = \frac{1}{2}$; $NT = 1$; $BD = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow MN = \frac{3}{2} \Rightarrow AC = 3$

BD - высота так как BD - диаметр, MD; ND - касательные

Поэтому $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{3} \cdot 3 = 2$.

Ответ: 2

211007673 (U883615 M1273343)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007673**

ID профиля: **883615**

Вариант 12

Чистовик

№4

Решение:

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \ (1) \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4} \ (2) \end{cases} \Rightarrow 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 - \frac{1}{x^2+y^2} - x^2y^2 = 1$$

$$2(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{x^2+y^2} = 1$$

Пусть $x^2+y^2 = t$, тогда

$$2t^2 - \frac{1}{t} = 1, \quad t \neq 0$$

$$2t^3 - t - 1 = 0$$

$$(t-1)(2t^2+2t+1) = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x^2+y^2 = 1 \ (4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1): \quad x^2y^2 = \frac{1}{4} \ (3).$$

Объединим (3;4) в систему

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \quad x^2(1-x^2) = \frac{1}{4}$$

$$-4x^4 + 4x^2 = 1$$

$$4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

$$(2x^2-1)^2 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = 1 - x^2$$

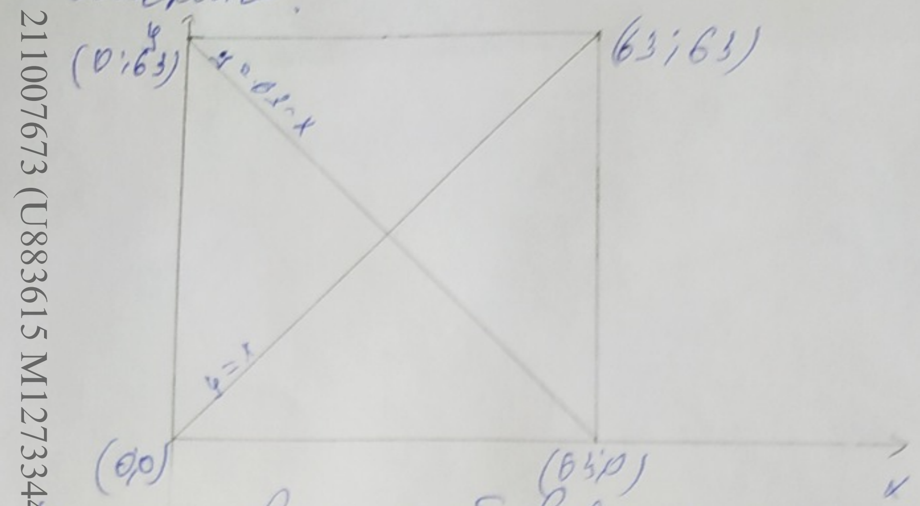
$$y^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

так как $x^2+y^2 \neq 0$, то

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(\frac{1}{-\sqrt{2}}; \frac{1}{-\sqrt{2}}\right)$ – все решения.

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Решение: №5 Чистовик 2



Количество способов взять узел на одной из прямых равно 61. После этого останется $61^2 - 61 - 60$ узлов, которое в паре с первым удовлетворяют условию. Но если рассматривать пару узлов каждый из которых находится на прямой, то такая пара считается дважды. Значит количество способов взять два узла, удовлетворяющих условию равно.

$2 \cdot 61(61^2 - 61 - 60) - 60 \cdot 59$

$60 \cdot 59$ – количество пар узлов, удовлетворяющих условию, которые находятся на двух прямых.

Ответ: $2 \cdot 61(61^2 - 61 - 60) - 60 \cdot 59$.

№ 6

3

Чистовик.

4

$BC = 2;\ AD = 4$

б) $S_{ABCD} = \frac{4\sqrt{3}}{4} + \frac{16\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$= \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$; По формуле $\frac{1}{2}ab\sin\alpha$

$S_{ABT} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ где $a = AB$. По теореме косинусов:

$AB = \sqrt{4+16+2\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$S_{ABT} = \frac{28\sqrt{3}}{4} = 7\sqrt{3}$.

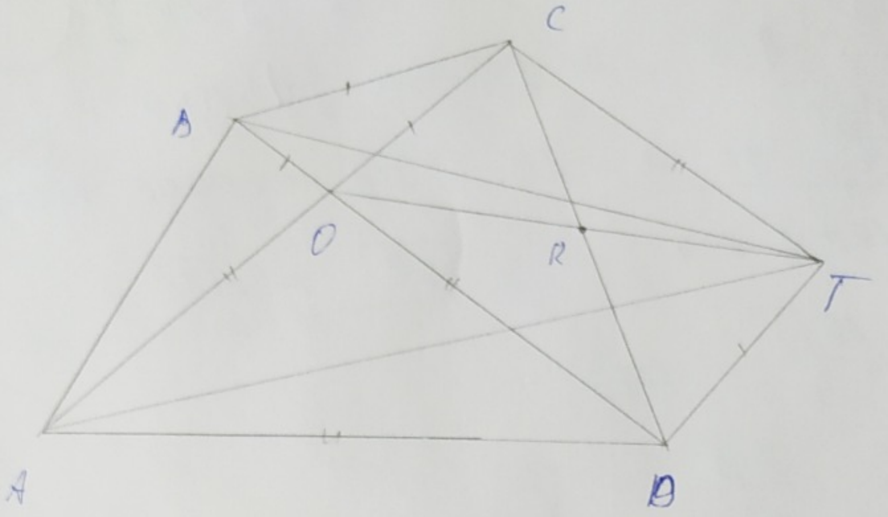
$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$.

Ответ: $\frac{7}{9}$.

Решение: № 6 Чистовик

3

а) 1)



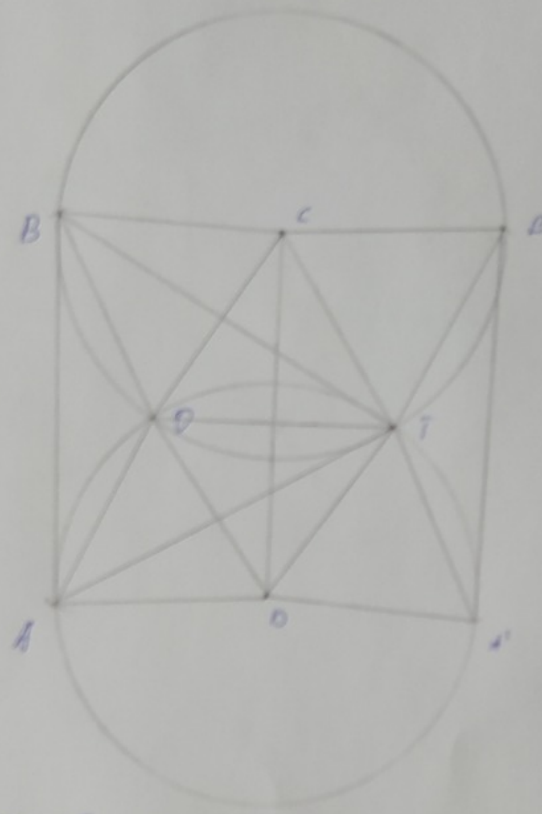
ABCD – выпуклый четырёхугольник.
BOC ; AOD – правильные треугольники ; T симметрична O относительно центра CD.

2) OCTD – параллелограм так как OR = RT ; CR = RD. ∠ COD = 120° как внешний для треугольника AOD. Значит ∠ OCT = 60° так как CT ∥ OD. Значит ∠ BCT = 120°. ~~По тем же~~ аналогично ~~причине~~ ∠ ADT = 120°. Рассмотрим треугольники ADT и BCT они равны так как BC = DT ; CT = AD ; ∠ BCT = ∠ ADT. => BT = AT.
Рассмотрим треугольник BOA. ∠ BOA = 120° как внешний угл треугольника AOD.
Значит. △ BOA = △ ADT = △ BCT так как

BC = DT = BO ; AD = CT = AO ; ∠ BOA = ∠ BCT = ∠ ADT =>
=> AB = BT = AT. Значит △ ABT – правильный, что и требовалось доказать

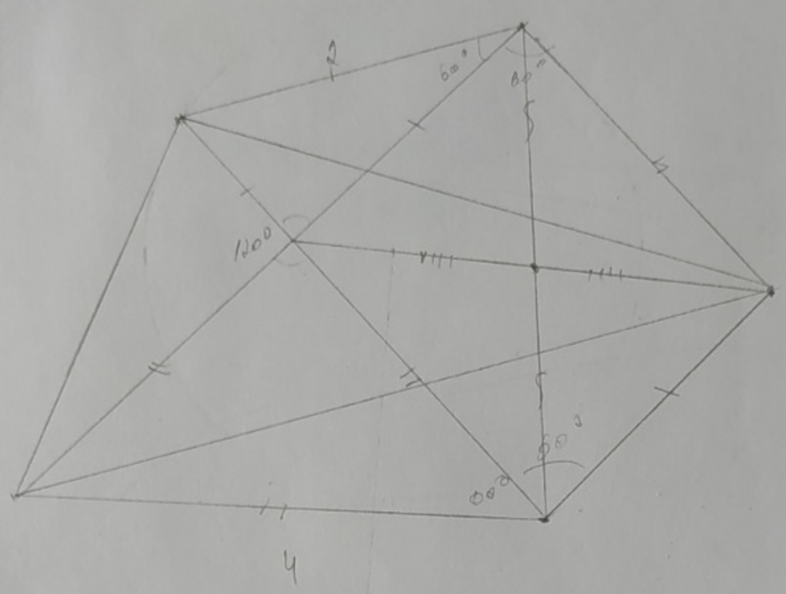
Решение №6 (3)

1)

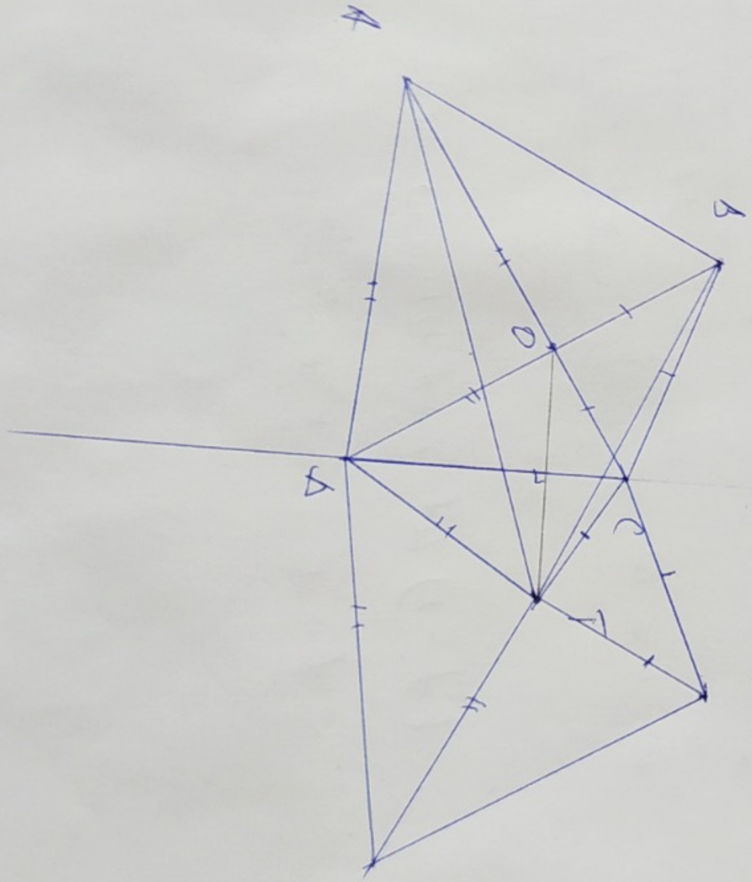


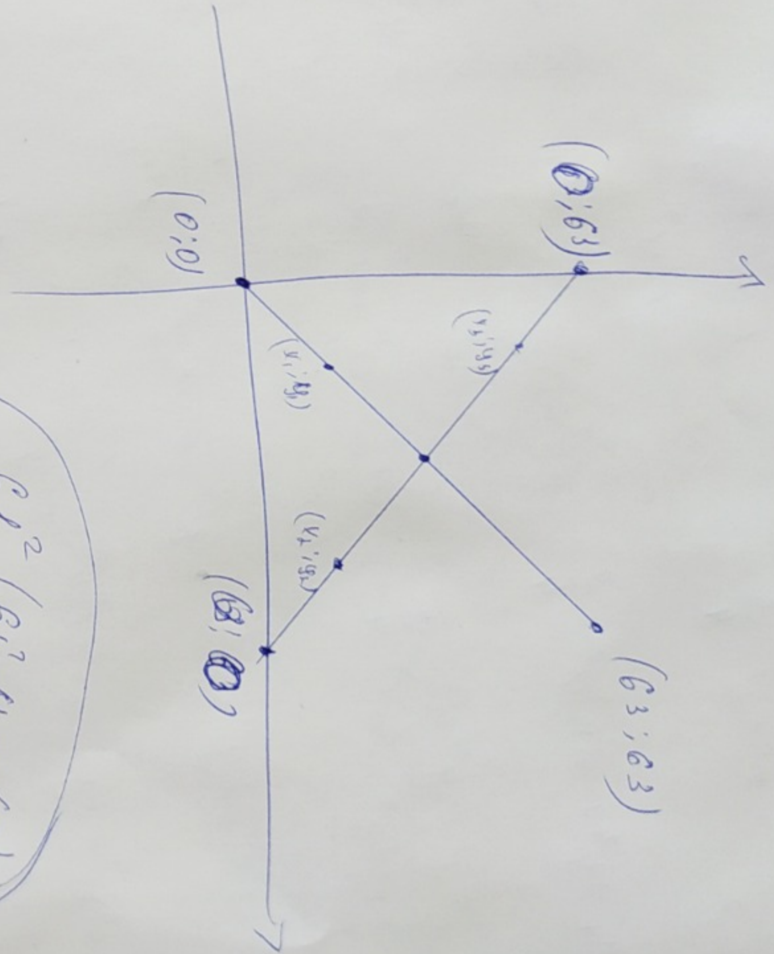
ABCD – выпуклый четырёхугольник. AOD, BOC – правильные треугольники. O – точка пересечения диагоналей. T симметрична O относительно середины CD.

$61^2(61^2-61-60) - \cancel{61}\ 61(61-2) = 61\cdot 59$

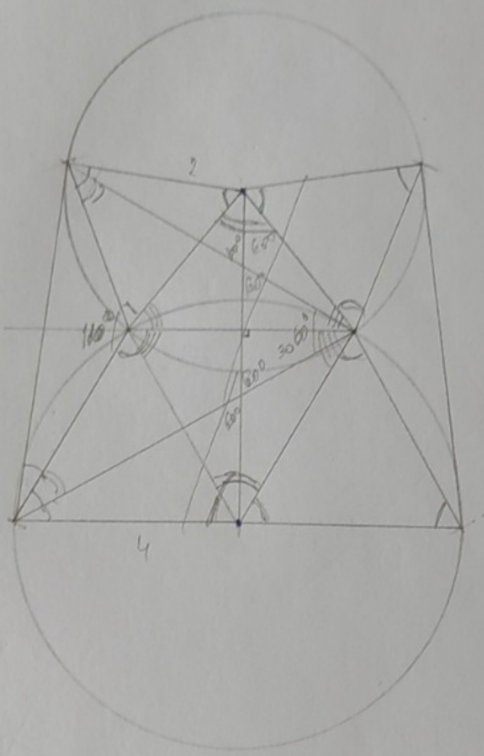


$16+4+2\cdot 4\cdot 2\cdot \frac{1}{2} = 28$ $\quad \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$





$$\frac{61^2(61^2-61-60)}{2}$$



120°

$360^\circ - 120^\circ =$
$= 240^\circ$

60°

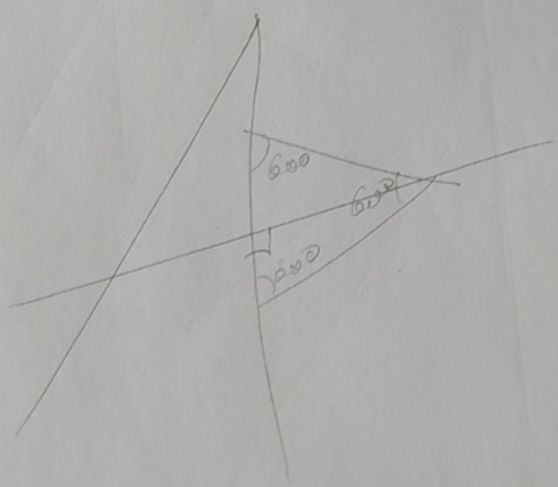
$90^\circ - \alpha$

$90^\circ - \beta$

$180^\circ - \alpha - \beta$

120°

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



211007673 (U883615 M1273344)