Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007640**

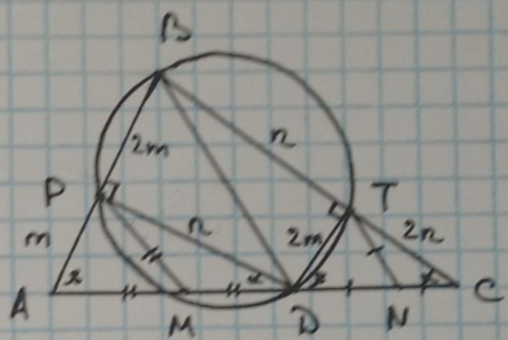
ID профиля: **168092**

Вариант 12

Математика 10 кл

Чистовик

№1



а) 1) Проведём PD и DT, четырехуг. PBTD – впис., значит если BD – диаметр, то $\angle BPD = \angle BTD = 90°$

2) $\triangle APD$ – п/у, значит $AM = MD = PM$; $\angle PDM = \angle MPD = \alpha$, $\angle PMA = 2\alpha$

3) $\triangle DTC$ – п/у, значит $DN = NC = TN$; $TN \parallel PM$ значит $\angle PMA = \angle TND = 2\alpha$.

$\angle NTC = \angle NCT = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$

4) $\angle PDM = \angle TCN = \alpha$, AC – секущ | значит $PD \parallel TC$

5) $PD \parallel BC$, PB – секущ., $\angle BPD = 90°$ | значит $\angle ABC = 90°$

1

Ответ: $\angle ABC = 90°$

б) Пусть $90° - \alpha = \beta$

Тогда $\angle PAM = \angle TDC = \beta$

$\triangle APD \sim \triangle DTC$ (по 2 углам)

Значит $\frac{AD}{DC} = \frac{PD}{TC} = \frac{AP}{DT} = \frac{1}{2}$

Стороны (длины) обознач. на чертеже (m и n)

Тогда

~~2m~~ $\begin{cases} 4m^2 + n^2 = \frac{16}{9} \\ m^2 + n^2 = 1 \end{cases}$ $3m^2 = \frac{7}{9}$ $m^2 = \frac{7}{27}$ $m = \sqrt{\frac{7}{27}}$

Значит

211007640 (U168092 M1273227)

Математика 10кл

Чистовик

$$n^2 = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$$

$$n = \sqrt{\frac{20}{27}}$$

$$S_{ABC} = \frac{3m \cdot 3n}{2} = \frac{3\sqrt{\frac{7}{27}} \cdot 3\sqrt{\frac{20}{27}}}{2} =$$

2

$$= \frac{9 \cdot \frac{\sqrt{140}}{27}}{2} = \frac{\sqrt{140}}{6} = \frac{2\sqrt{35}}{6} = \frac{\sqrt{35}}{3}$$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

211007640 (U168092 M1273227)

Чистовик Математика 10кл

№2

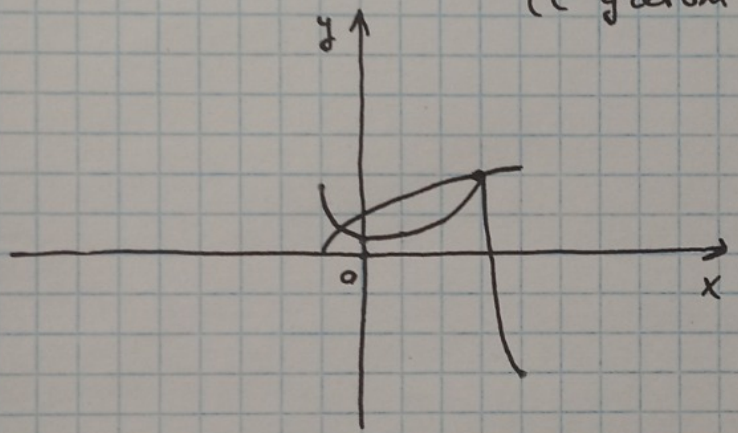
$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$ ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{cases}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 - 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{4-x} = 0$

$\sqrt{x+1}\,(1 - 2\sqrt{4-x}) = \sqrt{4-x} - 3$

$\sqrt{x+1} = \dfrac{\sqrt{4-x} - 3}{1 - 2\sqrt{4-x}}$

Построим графики обеих частей уравнения:
(с учетом уже найденного ОДЗ):



3

Ответ: $x = 3$

211007640 (U168092 M1273227)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007640**

ID профиля: **168092**

Вариант 12

$\angle BAT = 60^\circ$ и $\triangle ABT$ - р/с

ч.т.д.

4

Чистовик Математика 10 кл

№ 4

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

ОДЗ: $x^2+y^2 \neq 0$

Пусть $x^2+y^2 = a$, тогда

$$\frac{5}{4} - \frac{1}{a} = \frac{9}{4} - 2a^2$$

$$2a^2 - \frac{1}{a} - 1 = 0$$

$$2a^3 - a - 1 = 0$$

$$(a-1)(2a^2+2a+1) = 0$$

$a = 1$

$$2a^2+2a+1=0$$

$$D = 1 - 2 < 0$$

$$\varnothing$$

$x^2+y^2 = 1$, тогда $x^2y^2 = \frac{1}{4}$ (у первого ур.)

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$x^2 = 1 - y^2$

$y^2 - y^4 = \frac{1}{4}$

$$4y^4 - 4y^2 + 1 = 0$$

$$D = 4 - 4 = 0$$

$$y^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

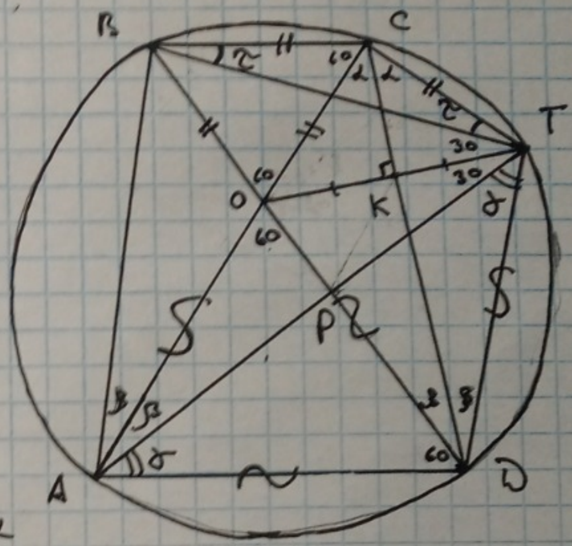
$x^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Чистовик Математика 10 кл

№ 6



а) 1) $\triangle AOD$ – р/с, значит
$AO = OD = AD$
$\triangle ODT$ – р/б, значит $OD = DT$

2) из п. 1) $AD = DT$, значит
$\triangle ADT$ – р/б и $\angle TAD = \angle ATD = \gamma$

3) аналогично с п. 1) и 2)
$\triangle BCT$ – р/б и $\angle CBT = \angle CTB = \tau$

4) $\triangle OCT$ – р/б значит $\angle OCK = \angle KCT = \alpha$
$\triangle ODT$ – р/б значит $\angle ODK = \angle KDT = \beta$

5) из $\triangle ATD$:
~~2α~~ $2\gamma + 2\beta + 60^\circ = 180^\circ$
$\gamma + \beta = 60^\circ$
из $\triangle BCT$ $2\tau + 2\alpha + 60^\circ = 180^\circ$
$\tau + \alpha = 60^\circ$

6) в $\triangle CTD$: $\angle BTA = 180^\circ - \alpha - \tau - \gamma - \beta = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

7) $\angle BCA = \angle BDA = \angle BTA$, значит A, B, C, T, D – на одной окружн.

8) из п 7) значит, что $\angle CDT = \angle CBT = \beta = \tau$
$\angle DCT = \angle TAD = \alpha = \gamma$

9) $\angle BAC = \angle CAT = \beta$
$\angle TBD = \angle DBA = \gamma$
| значит O – точк. пересеч. биссектр. в $\triangle ABT$, значит $\angle OTA = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$

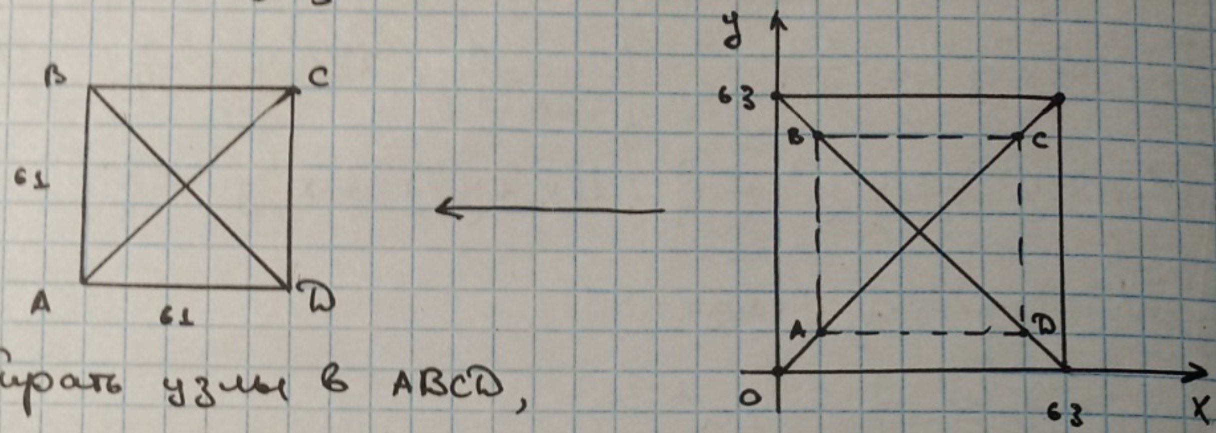
3

10) ~~$\triangle TOP \sim \triangle OKD$~~
~~из $ABCT$~~ : $2\beta +$

$\triangle BCT$ получается поворотной гомотетией с центром в т. T из $\triangle AOT$
Тогда $\tau = \beta = 30$, значит

Чистовик Математика 10 кл

№5



Будем выбирать узлы в ABCD, включая его границы.

Заметим, что точка пересечен. диагоналей лежит не на каком-либо узле.

1) Сначала посчитаем кол-во вар-тов, когда один узел – на BD, а второй – не на BD и не на AC:

$62 \cdot (62 \cdot 62 - 244) = 62 \cdot 3600 = 223200$

2) один уз. $\in AC$, второй – $\notin BD$, $\notin AC$: 223200

3) оба узла $\in BD$: $\frac{62 \cdot 61}{2} = 31 \cdot 61 = 1891$

4) оба узла $\in AC$: 1891

5) один узел $\in BD$, другой $\in AC$: $62 \cdot 60 = 3720$

Итак: в сумме вариантов:

$2 \cdot 223200 + 2 \cdot 1891 + 3720 = 453902$

Ответ: 453902

2