Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007616**

ID профиля: **377429**

Вариант 12

Чистовик

Математика, 10 кл

№ 2

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ 4+3x-x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$x \in [-1; 4]$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$\underbrace{\sqrt{x+1} + 3}_{\geq 0} = \underbrace{2\sqrt{4+3x-x^2} + \sqrt{4-x}}_{\geq 0}$$

$$x+1+9+6\sqrt{x+1} = 4(4+3x-x^2)+4-x+4\sqrt{(4-x)(4-x)(x+1)}$$

$$4x^2-10x-10=(10-4x)\sqrt{x-1}$$

$$2x^2-5x-5=(5-2x)\sqrt{x-1}$$

$$\begin{cases} (2x^2-5x-5)^2=(5-2x)^2(x-1) \\ (2x^2-5x-5)(5-2x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^4-20x^3+5x^2+50x+\cancel{25} = 4x^3-16x^2+5x+\cancel{25} \\ (2x^2-5x-5)(2x-5) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^4-24x^3+21x^2+45x=0 \\ (2x^2-5x-5)(2x-5) \leq 0 \end{cases}$$

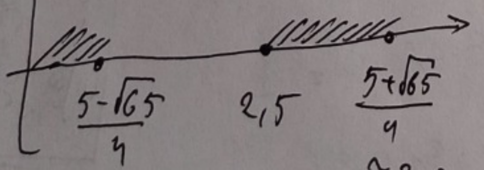
$$\begin{cases} x(x-3)(4x^2-12x-15)=0 \\ (2x^2-5x-5)(2x-5) \leq 0 \end{cases}$$

$x=0$ $\varnothing$

$x=3$

$x=1{,}5+\sqrt{6}$ $\varnothing$ $\sqrt{6}<2{,}5 \Rightarrow 1{,}5+\sqrt{6}<4$

$x=1{,}5-\sqrt{6}$ $\sqrt{6}<2{,}5 \Rightarrow 1{,}5+\sqrt{6} > -1$



$\approx -0{,}7$ $\approx 3{,}2$

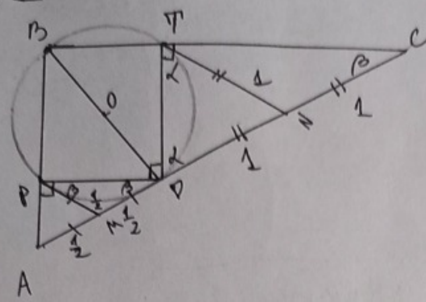
Ответ:

$x=3$

$x=1{,}5-\sqrt{6}$

Чистовик

№1



$PM \parallel TN$, BD - диаметр, $AM=MD$, $MP=\frac{1}{2}$, $NT=1$, $DN=NC$, $BD=\frac{4}{3}$

Найти: $\angle ABC$ - ?

S_{ABC} - ?

1) Т.к. BD - диаметр, то $\angle BPD=90^\circ \Rightarrow \angle APD=90^\circ \Rightarrow \triangle APD$ - прям,

т.к. $\triangle APD$ - прям, а $AM=MD$, то $PM=AM=MD$

Аналогично $\angle BTD=90^\circ$, $\triangle DTC$ - прямоуг., $TN=DN=NC$

Пусть $\angle NTC=\alpha$, тогда $\angle NDT=\alpha$, $\angle MPD=\beta$, $\angle PDM=\beta$.

$PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMD+\angle TNM=180^\circ$ тогда $2\alpha+2\beta=360^\circ-180^\circ$,

$\alpha+\beta=90^\circ \Rightarrow \angle PDT=90^\circ$, PT - диаметр, $\Rightarrow$

$\angle ABC=90^\circ$

2) т.к. $AP \parallel DT$, $PD \parallel TC$, (т.к. $AD \perp PD$, а $DT \perp PD$ ...), то

$\triangle APD \sim \triangle ABC \sim \triangle DTC \Rightarrow \angle C=\beta$

$PD = 1\cdot\cos\beta$

$TD = 2\cdot\sin\beta$

$BD=\frac{4}{3}$

$\Rightarrow$ т.к. $BD=PT$, как диаметры, то

$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 4\cdot\sin\beta^2+\cos\beta^2$

$\frac{16}{9} = 3\cdot\sin\beta^2+1$

$\frac{7}{9} = 3\cdot\sin\beta^2$

$\sin\beta^2=\frac{7}{27}$

$\cos\beta=\sqrt{1-\frac{7}{27}}=\frac{\sqrt{20}}{3\sqrt{3}}$

$\sin\beta=\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$

~~$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot(BT+TC)(PD+AP)$~~

$S_{ABC}=\frac{1}{2}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AB=$

$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3\cdot\cos\beta\cdot\sin\beta$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{20}}{3\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{140}}{6}=\frac{\sqrt{35}}{3}$

Ответ:
1) $\angle ABC=90^\circ$
2) $S_{ABC}=\frac{\sqrt{35}}{3}$

211007616 (U377429 M1274898)

	4	-24	21	45
2	4	-16	-11	23
3	4	-12	-15	0

$144+4\cdot4\cdot15=$

384

$18\cdot18$

180

$8\sqrt{6}$

$x(x-3)(4x^2-12x-15)=0$

$x(x-3)$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \\ x=1{,}5+\sqrt{6} \\ x=1{,}5-\sqrt{6} \end{array}\right.$$

$x=\frac{12\pm8\sqrt{6}}{8}$

$x=\frac{3}{2}+\sqrt{6}$

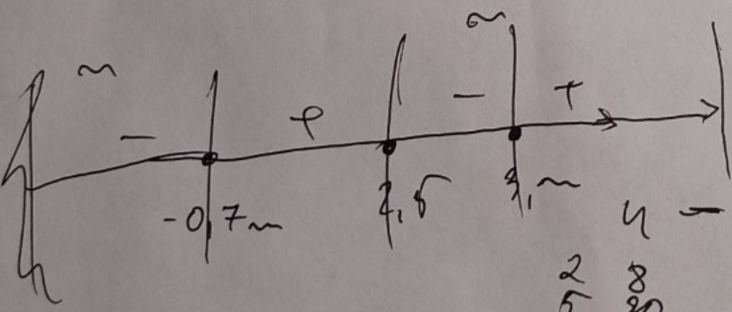
$x=\frac{3}{2}-\sqrt{6}$

$(2x^2-5x-5)(5-2x)\geq0$

$25+40=65$

$\approx0{,}7$

$\frac{5\pm\sqrt{65}}{4}$



	4	-16	-11	55	50
2	8	0	-22	-11	28
	-2	-8	0	22	11

$\frac{5+\sqrt{65}}{4}$

$4x^4-20x^3+5x^2+50x+25=-4x^3+16x^2-5x-25$

$4x^4-16x^3-11x^2+55x+50=0$

$$\sqrt{x+1}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}+\sqrt{4-x}$$

$$\left(\sqrt{x+1}+3\right)^2=\left(2\sqrt{4+3x-x^2}+\sqrt{4-x}\right)^2$$

$$x+1+9+6\sqrt{x+1}=4\cdot(4+3x-x^2)+4-x+4\sqrt{(4-x)(x+1)(4-x)}$$

$$x+10+\cancel{6\sqrt{x+1}}=16+12x-4x^2+4-x+(10-4x)\sqrt{x+1}$$

$$10=16+10x-4x^2+4$$

$$4x^2-10x-10=(10-4x)\sqrt{x+1}$$

$$2x^2-5x-5=(5-2x)\sqrt{x+1}$$

$$(2x^2-5x-5)^2=(5-2x)^2(x+1)$$

$$(4x^4-10x^3-10x^2-10x^3+25x^2+25x-10x^2+25x+25)$$

$$=(25-20x+4x^2)(x+1)$$

$$4x^4-20x^3+5x^2+50x+\cancel{25}=4x^3-20x^2+25x+4x^2-20x$$

-16

$$4x^4-24x^3+21x^2+45x=0 \qquad 4x^3-16x^2+5x+25 \quad \cancel{+25}$$

$$x(4x^3-24x^2+21x+45)=0$$

$$x(x-3)(4x^2-12x-15)=0 \qquad -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}$$

$$\underbrace{\sqrt{x+1} + 3}_{\geq 0} = \underbrace{2\sqrt{(x+1)(4-x)} + \sqrt{4-x}}_{\geq 0}$$

$$x+1+9+6\sqrt{x+1} = 4(x+1)(4-x) + (4-x) + 4(4-x)\sqrt{x+1}$$

$$x+10+6\sqrt{x+1} = 16+12x-4x^2+4-x+(16-4x)\sqrt{x+1}$$

$$4x^2-12x+x+x+10-16-4 = (10-4x)\sqrt{x+1}$$

$$4x^2-10x-10 = (10-4x)\sqrt{x+1}$$

$$2x^2-5x-5$$

$$\cancel{D = 100+}$$

$$D = 25 - 4\cdot 5\cdot 2 =$$

$$= 65$$

$$\cancel{(2x-5)(x+1)}$$

$$a - b + 3 = 2ab$$

$$\cancel{a + b = (2a+1)b}$$

ОДЗ:

$x+1 \geq 0$ $\quad x \geq -1$

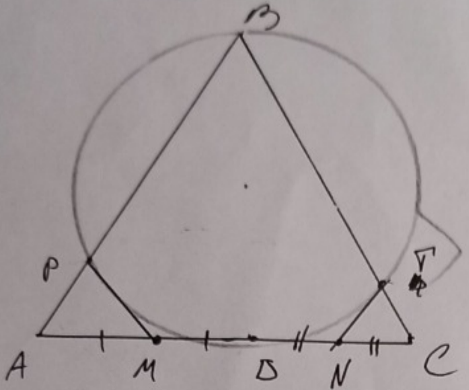
$4-x \geq 0$ $\quad x \leq 4$

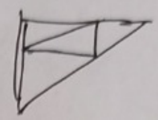
$4+3x-x^2 \geq 0$

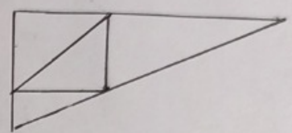
$x^2-3x-4 \leq 0$

$(x-4)(x+1) \leq 0$ $\quad + \; -1 \; - \; 4 \; +$

№ 1

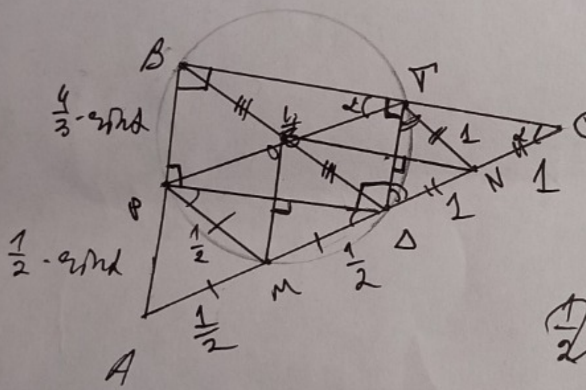






$MP = \frac{1}{2}$

$NF = 1$



$BD = \frac{4}{3}$

$\frac{9}{4}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1,5}{8}\cdot\cos\alpha\cdot 1,5\cdot\sin\alpha$

$\frac{9}{8}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\sin\alpha$

$(1\cdot\sin\alpha)^2+(\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha)^2=\frac{16}{9}$

$4\sin\alpha^2+\cos^2\alpha=\frac{64}{9}$

$\sin\alpha^2+\frac{\cos\alpha^2}{4}=\frac{16}{9}$

$3\cdot\sin\alpha^2=\frac{64-9}{9}$

211007616 (U377429 M1274898)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007616**

ID профиля: **377429**

Вариант 12

№ 4 Чистовик Математика, 10 кл.

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} & (1) \\ 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4} & (2) \end{cases}$$

вычтем из (2) (1)

$$2(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{x^2+y^2} = 1$$

$$x^2+y^2 = t$$

$$2t^2 - \frac{1}{t} = 0$$

$\boxed{t \neq 0}$

$$2t^3 - 1 = t$$

$$2t^3 - t - 1 = 0$$

$$(t-1)(2t^2+2t+1) = 0$$

$$D < 0$$

$$t = 1$$

$$x^2+y^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1} + x^2y^2 = \frac{5}{4}$$

$$x^2y^2 = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x = \frac{1}{2y} \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x = -\frac{1}{2y} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{1}{4y^2} + y^2 = 1 \\ x = \frac{1}{2y} \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{4y^2} + y^2 = 1 \\ x = -\frac{1}{2y} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4y^4 - 4y^2 + 1 = 0 \\ x = \frac{1}{2y} \end{cases} \\ \begin{cases} 4y^4 - 4y^2 + 1 = 0 \\ x = \frac{1}{2y} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} (2y^2-1)^2 = 0 \\ x = \frac{1}{2y} \end{cases} \\ \begin{cases} (2y^2-1)^2 = 0 \\ x = -\frac{1}{2y} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2 = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2y} \end{cases} \\ \begin{cases} y^2 = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2y} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{1}{2 \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases} \end{array}\right. \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

1

Ответ: $(x;y) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

№5 Чистовик Математика. 10 кл

Внутри квадрата со „стороной" 63 находится $(63-1)^2 = 62^2$ узлов сетки, из них $62 \cdot 2 = 124$ узла принадлежат либо $y=x$, либо $y=63-x$

Рассмотрим 2 варианта, когда 1 из узлов лежит на прямой и когда оба лежат на прямых.

1) всего существует $124 \cdot (62^2 - 124)$ пар у них нужно исключить $124 \cdot 120$ пар проходящих через ~~дан~~ одни из 124 узлов, т.к. на прямых параллельных коор. осям лежит $2 \cdot (62-2) = 120$ узлов, не лежащих на $y=x$, $y=63-x$.

2) если оба лежат на прямых, то всего $\frac{124 \cdot 123}{2}$ варианта, из них исключаем $4 \cdot \frac{62}{2} = 124$ пары узлов, через которые проходит ~~парал~~ прямые парал. осям коорд.

всего $N = 124 \cdot (\overset{3844}{62^2} - 124) - 124 \cdot 120 + \frac{124 \cdot 123}{2} - 124 =$

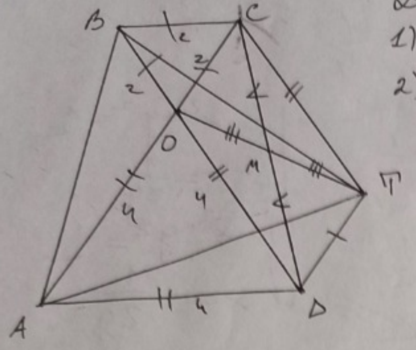
$= 124 \cdot 3600 + 62 \cdot 123 - 124 = 62 \cdot 7200 + 62 \cdot 123 - 2 \cdot \overset{62}{\cancel{124}} =$

$= 62 \cdot 7321 = 454902$

Ответ: 454902

2

№6 в Чистовик математика, 10 кл. (3)



Доказать:
1) $AB\Gamma$ – равносторонний
2) $\frac{S_{AB\Gamma}}{S_{ABCD}}$ – ?

1) M – середина CD, $CM = MD$, т. Γ симметрична относительно т. M => $OM = O\Gamma$ => т.к. $OM = M\Gamma$, $CM = MD$, то $OC\Gamma D$ – параллелограмм, $OC = D\Gamma$, $OD = C\Gamma$,
$\angle AOD = 60°$ => $\angle COD = 120°$ => $C\Gamma D = 120°$
$BC = \Gamma D$, $BD \parallel C\Gamma$, т.к. $OC\Gamma D$ – параллелограмм =>
$BC\Gamma D$ – равнобокая трапеция => $BC\Gamma = 120°$ и
$\angle BD\Gamma = 60°$ => $\angle AD\Gamma = 120°$. $\angle AOB = 120°$.
$\triangle AD\Gamma = \triangle BC\Gamma = \triangle AOB$, т.к. $AD = C\Gamma = AO$, $D\Gamma = BC = BO$,
$\angle AD\Gamma = \angle BC\Gamma = \angle AOB$ => $AB = B\Gamma = A\Gamma$ => $\triangle AB\Gamma$ – правильный ЧТД

2) Пусть $S = S_{AOB} = S_{BC\Gamma} = S_{AD\Gamma} = S_{COD} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \sin 120 = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{BOC} + 2S = \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 4\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

$S_{ABC\Gamma D} = S_{ABCD} + S = 11\sqrt{3}$

$S_{AB\Gamma} = S_{ABC\Gamma D} - 2S = 7\sqrt{3}$

$\frac{S_{AB\Gamma}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$

Ответ: 2) $\frac{S_{AB\Gamma}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$

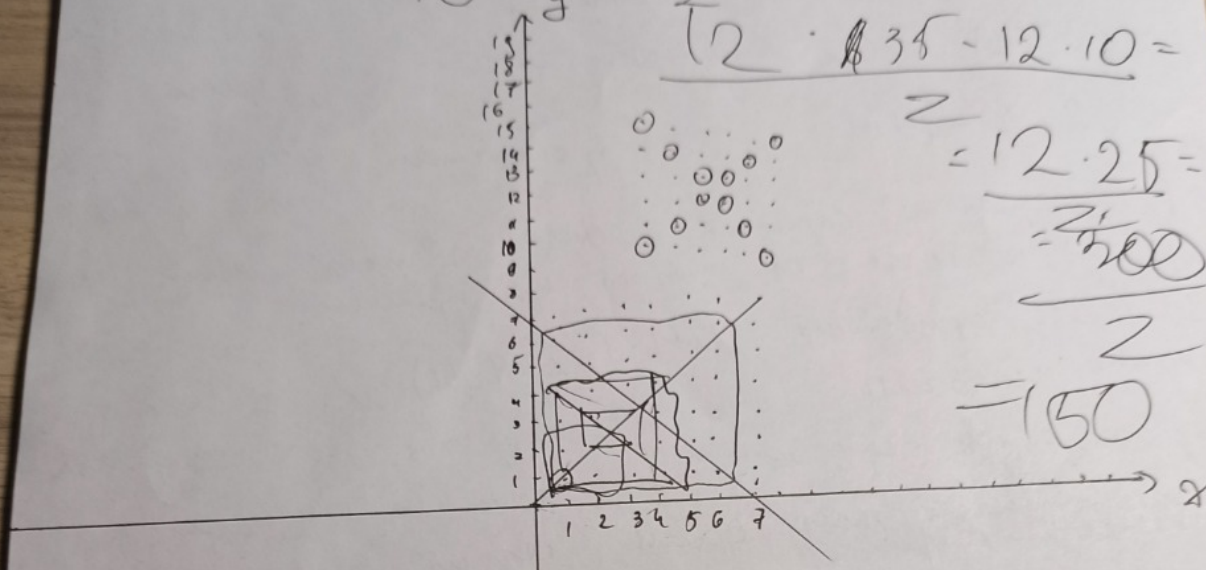
$12 \cdot 24 - 12 \cdot 10 + \frac{12 \cdot 11}{2} - \frac{6}{2} \cdot 4$

$\frac{12 \cdot 35 - 12 \cdot 10}{2} =$

$= \frac{12 \cdot 25}{2} =$

$= \frac{300}{2}$

$= 150$



$4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 4$

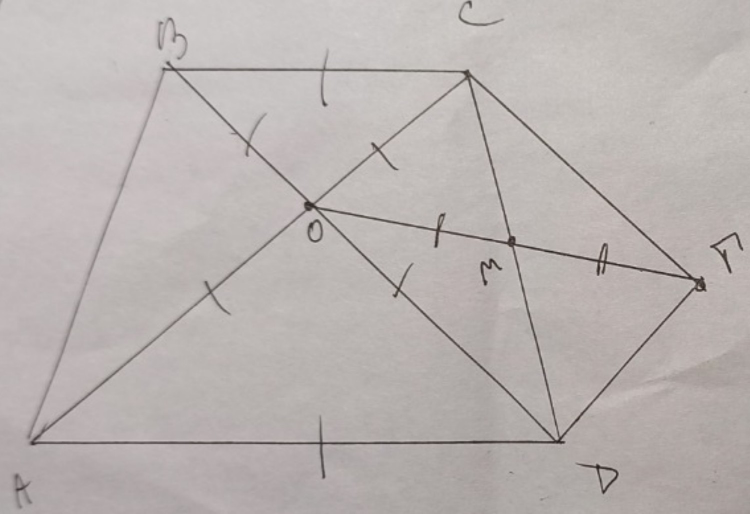
$8 \cdot 15 - 8$

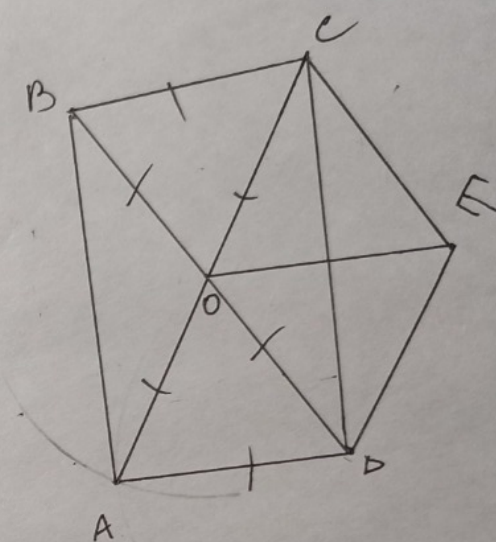
$8 \cdot 15 - 8 \cdot 6 =$

$= 72 -$

$= 64$

$12 \cdot 35 - 12$

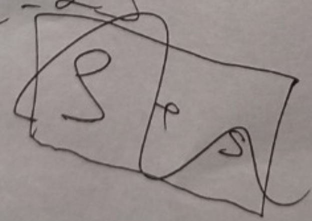


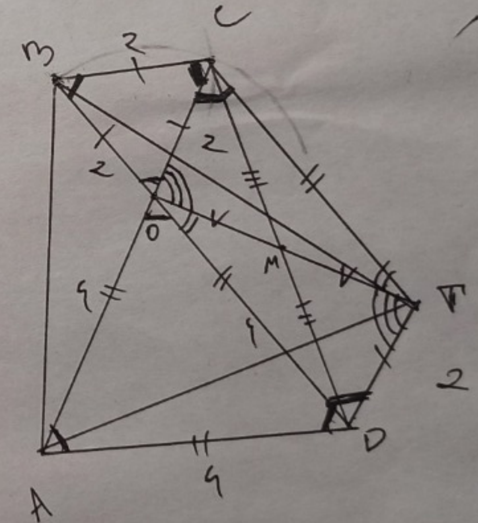


Sodly – S

$\frac{1}{2}\cdot 16\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ Sodly – 2 S

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} =$





$S_Г = S - 2S$

$(x+y)^4$ x^4+y^4

$$\begin{array}{c} 1\quad 1 \\ 1\quad 2\quad 1 \\ 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\ 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \end{array}$$

b4

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$x+y=a$

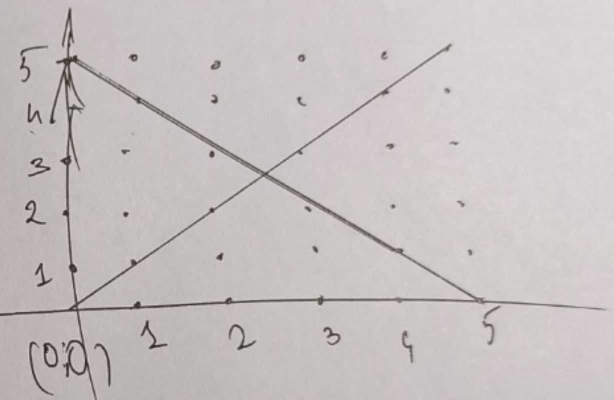
$xy=b$

$(2x^2+y^2)(2y^2+x^2)$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ \cancel{(2x^2+y^2)(x^2+2y^2) = \dfrac{9}{4}} \end{cases}$$

$$\dfrac{1}{a^2-2b} + b^2 = \dfrac{5}{4}$$

$3844 - 124 = 3720 - 120 = 3600$



$62 \times 2 = 124$

$$\frac{62^2\cdot(62^2-1)}{2}$$

$3844 - 124$

372

$3844(62^2-(24)) - 124 \cdot 120 + \dfrac{124\cdot 123}{2} - \dfrac{62}{2}\cdot 4$

$(62^2-1) - 124$

$124 + 3720 = 3844$

$62 \times 62 = 124$

7321×62: $14642 + 43926 = 453902$

$14642 \times 3 = 43926$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$\cancel{xy=a}$ $\cancel{x+y=b}$ $x+y=a$ $xy=b$

$$2x^4+4x^2y^2+2y^4+x^2y^2=\frac{9}{4}$$

$$2(x^2+y^2)^2+x^2y^2=\frac{9}{4}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2-2b} + b^2 = \frac{5}{4} \\ 2(a^2-2b)^2+b^2=\frac{9}{4} \end{cases}$$

$-$

$$2(a^2-2b)^2-\frac{1}{a^2-2b}=1$$

$$2b^2-\frac{1}{b}=1$$

$$2b^3-1=b$$

$$2b^3-b-1=0$$

$$(b-1)(2b^2+2b+1)=0$$

$$D=4-2\cdot4=-4$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=\frac{1}{2y} \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=-\frac{1}{2y} \end{cases} \end{array}\right.$$

$b \neq 0$

	2	0	-1	-1
1	2	2	1	0

$$4y^4-4y^2+1=0$$

$$(2y^2-1)=0$$

$$y^2=\frac{1}{2} \quad y=$$

211007616 (U377429 M1274899)