Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007599**

ID профиля: **806634**

Вариант 12

Чистовик

3

б) $\cancel{\angle AB}$

$\angle APD = 90^\circ \Leftrightarrow AM = MD = PM = \frac{1}{2} \Leftrightarrow AD = 1$

$\angle DTC = 90^\circ \Leftrightarrow DN = TN = NC = 1 \Leftrightarrow DC = 2$

$\angle APD = \angle ABC \Leftrightarrow PD \parallel BC \Leftrightarrow \cancel{AP : PB = 1}$

$\Leftrightarrow \cancel{AP : PB} = AP : AB = PD : BC = 1 : 3$

Пусть $AB = 3a$, $BC = 3b$, тогда

$PB = 2a$, $AP = a$, $APD = \cancel{2}b \Leftrightarrow$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} AP^2 + PD^2 = a^2 + b^2 = 1 = AD^2 \\ BP^2 + PD^2 = 4a^2 + b^2 = \frac{16}{9} = BD^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3a^2 = \frac{16}{9} - 1 = \frac{7}{9} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 = \frac{7}{27} \\ b^2 = \frac{20}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\frac{7}{27}} \\ b = \sqrt{\frac{20}{27}} \end{cases}$$

$$S_{\triangle ABC} = 9\frac{ab}{2} = 9\frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{7}}{2 \cdot 27} = \frac{\sqrt{35}}{3\cancel{27}}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{35}}{\cancel{27}3}$

№3 чистовик

4

если $a=0$, то второе уравнение сводится к
$2=0$ $\varnothing$ $\Rightarrow a\neq 0$

B - вершина параболы $y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$
x координата ~~B = $\frac{-4ax}{2}$~~ B равна $\frac{-4a}{2}=-2a$
y координата B равна $\frac{16a^2}{4} - \frac{16a^2}{2}+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$
~~коро~~ координаты точки B $(-2a, \frac{2}{a})$
~~второе~~ 1-ое уравнение ~~прини~~ равносильно
т.к точка определена однозначно
уравнение можно представить в виде
суммы квадратов

Пусть координаты точки A - (x_1, y_1)
тогда подойдут все a, при которое
$(x_1+y_1-3)(-2a+\frac{2}{a}-3)>0$

Чистовик (2)

Чистовик (1)

№2

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2} \Leftrightarrow$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}$

Замена

$a = \sqrt{x+1}$ $a \geq 0$

$b = \sqrt{4-x}$ $b \geq 0$

~~Заменим~~

Заметим, что $a^2+b^2 = x+1+4-x = 5$

$\Downarrow$

$\begin{cases} a-b+3 = 2ab \\ a^2+b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a-b+3-5 = -a^2+2ab-b^2 \\ a^2+b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (a-b)^2+(a-b)-2 = 0 \\ a^2+b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} (a-b-1)(a-b+2) = 0 \\ a^2+b^2 = 5 \end{cases}$

1) $a = b+1$

$b+1-b+3 = 2b(b+1) \Leftrightarrow$

$2 = b^2+b \Leftrightarrow$

$(b-1)(b+2) = 0$

1.1) $b = 1$

$a = 2$

1.2) $b = -2$ н

$b<0$

$\Downarrow$

не подходит

обратная замена

$\begin{cases} \sqrt{x+1} = 2 \\ \sqrt{4-x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 4 \\ 4-x = 1 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$x = 3$

2) $b = a+2 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2a^2+4a+4 = 5 \\ 2a(a+2) = a-a-2+3 = 1 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} 2a^2+4a-1 = 0 \\ 2a^2+4a+3 = 0 \end{cases}$

$\varnothing$

Ответ: $x = 3$.

211007599 (U806634 M1273291)

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$\cancel{(ax+by+c)}^2=0$

$10y^2+4xy+2x^2-6ay-2ax+2a^2=0$

$(3y-a)^2+y^2+4xy+2x^2-2ax+a^2=0$

$\cancel{(3y-a)^2+(y}$

$(3y-a)^2$

$2a^2-4ax-12ay+2x^2+4xy+10y^2=0$

$X\ \cancel{2a^2-4ax}$

$a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$\cancel{2a^2-2ax}$

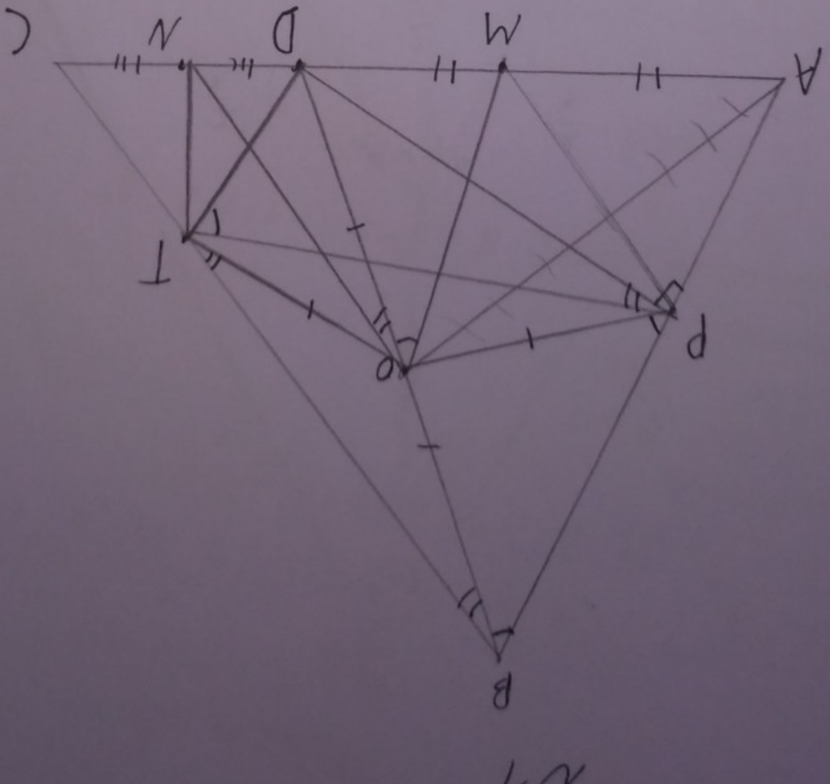
$2a^2-4ax-12ay+2x^2+4xy+10y^2=0$

$(x+2y)^2+6y^2-12ay^2+a^2$

N1

(2)

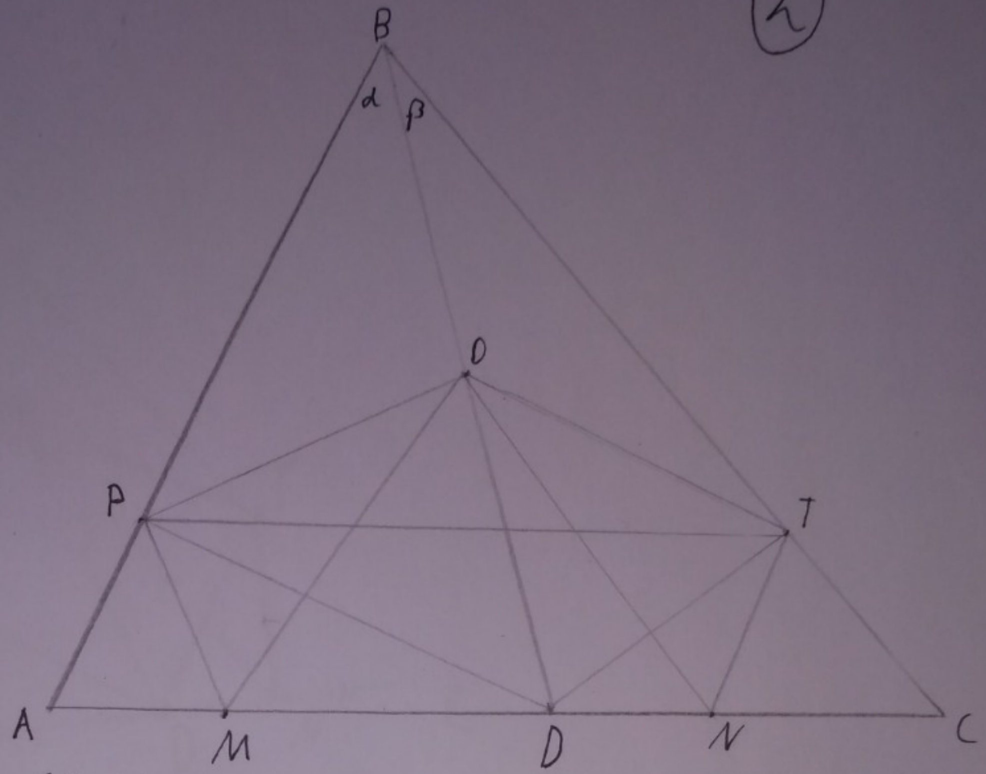
(1)



чистовик

№7

2



а) Пусть O - ~~центр~~ середина BD, $\angle PBD = \alpha$, $\angle DBT = \beta$

$PB = BO = OD$ <=> медиана равна половине основания <=> $\angle BPD = 90^\circ$ <=> $PM = MD$

$BO = OD = OT$ <=> медиана равна половине основания <=> $\angle BTD = 90^\circ$ <=> $DN = NT$

~~Пусть $\angle AMP = x$~~

~~$PM \parallel NT$ <=> $\angle ANT = x$~~ <=> /

Пусть $\angle AMP = x$, тогда

$PM \parallel NT$ <=> $\angle ANT = \angle AMP = x$

$PM = MD$ <=> $\cancel{\angle PDM = 90 - \angle} \frac{\angle AMP}{2} = 0$ $\angle PDM = \frac{\angle AMP}{2} = \frac{x}{2}$

$\angle$/ $DN = NT$ <=> $\angle NDT = 90 - \frac{\angle DNT}{2} = 90 - \frac{x}{2}$

$\angle PDT = 180 - \angle PDA - \angle TDN = 90^\circ$

$\angle ABC = 360 - \angle BPD - \angle PDT - \angle DTB = 90^\circ$

~~а~~ Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$

Черновик

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$(x+y)^2+2a^2-2ax+6ay+4y^2=0$

$3(a-y)^2-a^2-2ax+x^2+2xy+2y^2=0$

$a=\sqrt{x+1}$ $b=\sqrt{4-x}$

$a-b+3=2ab$

$a^2+b^2=5$

$\cancel{a-b+3=}$ $a-b+3-5=-a^2+2ab-b^2 \Leftrightarrow$

$a-b-2=-a^2+2ab-b^2 \Leftrightarrow$

$(a-b)^2+(a-b)-2=0$

$c=a-b$

$c^2+c-2=0$

$c=1,\ -2$

1) $a-b=1$

$a=b+1$

$4=2b(b+1) \Leftarrow$

$b^2+b-2=0$

$b=1$

$a=2$

$\begin{cases}\sqrt{x+1}=2\\ \sqrt{4-x}=1\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}x+1=4\\ 4-x=1\end{cases} \Leftrightarrow$

$x=3$

2) $a-b=-2$

$b=a+2$

$\cancel{a-a}-2+3=2a(a+2)$

$2a^2+4a-1=0$

$D=$

211007599 (U806634 M1273291)

Черновик

$\cancel{2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0}$

$\cancel{(x+y)^2+2a^2-2ax+6ay+4y^2=0}$

$\cancel{3(a-y)^2}-a^2-2ax+x^2+2xy+2y^2=0$

$a=\sqrt{x+1}$ $\quad b=\sqrt{4-x}$

$a-b+3=2ab$

$a^2+b^2=5$

$\cancel{a-b+3=}$ $a-b+3-5=-a^2+2ab-b^2 \Leftrightarrow$

$a-b-2=-a^2+2ab-b^2 \Leftrightarrow$

$(a-b)^2+(a-b)-2=0$

$c=a-b$

$c^2+c-2=0$

$c=1,\ -2$

1) $a-b=1$

$a=b+1$

$4=2b(b+1) \Leftarrow$

$b^2+b-2=0$

$b=1$

$a=2$

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}=2\\ \sqrt{4-x}=1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x+1=4\\ 4-x=1\end{cases} \Leftrightarrow$$

$x=3$

2) $a-b=-2$

$b=a+2$

$\cancel{a-a}-2+3=2a(a+2)$

$2a^2+4a-1=0$

$D=$

$\cancel{ax+b}$

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$\cancel{x}\ x=-y$

$\cancel{2a^2+2}\ \cancel{2a^2-2ax+6ax+x^2-2y^2+5y^2=0}$

$2a^2+4ax+$

$2a^2-2ax+6ax+x^2-2x^2+5x^2=0$

$4x^2+4ax+2a^2=0$

$\cancel{2x^2+2ax+a}$

$(2x+c$

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$4a^2-4ax-12ay+2x^2+4xy+10y^2=0$

$(x+y)^2+4a^2-4ax-12ay+x^2+9y^2=0$

если однозначно, то сумма квадратов

$(x+y)^2+(x-2a)^2+9y^2-12ay=0$

$(x+y)^2+(x-2a)^2+(3y-2a)^2=4a^2$

$(x+y-2a)(x+y+2a)+(x-3y)(x+3y-4a)=0$

$\cancel{x^2+2xy+6a}$

$x^2+(2y-2a)x+5y^2-$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

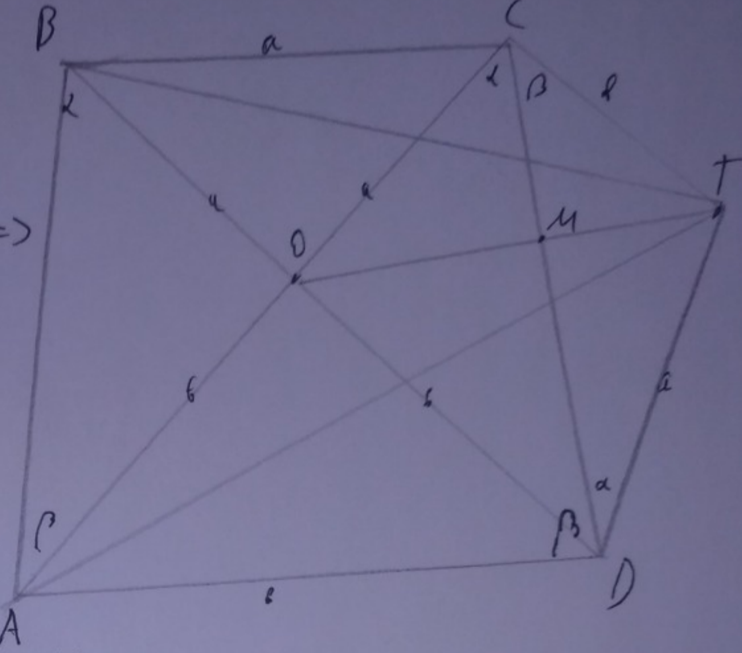
Шифр: **211007599**

ID профиля: **806634**

Вариант 12

чистовик (4)

№6



a) $\angle ADB = \angle DBC = 60^\circ \iff$ $AD \parallel BC$

$BO = AO$, $CO = DO$, $\angle AOB = \angle COD \iff$

~~$AB = CD$~~

$\triangle AOB = \triangle COD \Rightarrow AB = CD$

$\Downarrow$

~~Знач~~ З ~~тре~~ перед нами равнобедренная трапеция

пусть M — ~~сре~~ середина CD

$M \in OT$

$OM = MT$, $BC = CT \Rightarrow TD \parallel CO$, ~~$TC$~~ $CT \parallel DO \Rightarrow$

~~$\angle COM = OM \parallel AD$,~~

Пусть $\angle TDC = \alpha$, тогда ~~$\angle T$~~ $\angle DCA = \angle ABO = \alpha$

$\angle DCT = \beta$, тогда $\angle BAC = \angle CDB = \beta$

если б правильный, то $\angle CBT = \alpha$, $\angle DAT = \beta$

чистовик

5

б) $S_{ABCD} = \frac{BD \cdot AD \cdot \sin 60}{2} + \frac{BC \cdot BD \cdot \sin 60^\circ}{2} =$

$= \frac{BC \cdot (BC + AD) \cdot \sin 60}{2} + \frac{AD \cdot (BC + AD) \cdot \sin 60'}{2} =$

$= \frac{(AD+BC)^2 \cdot \sin 60}{2} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$

$AB^2 = OB^2 + AO^2 - 2 \cdot AO \cdot OB \cdot \cos\angle BOA = OB^2 + AO^2 + AO \cdot OB =$

$= BC^2 + BC \cdot AD + AD^2 = 4 + 8 + 16 = 28$

$AB = 4\sqrt{\cancel{4}}$

$S_{\triangle ABT} = \frac{AB \cdot BT \cdot \sin\angle ABT}{2} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60}{2} = \frac{28 \cdot \sqrt{3}}{4} = 7\sqrt{3}$

$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$

Ответ: $\frac{7}{9}$

211007599 (U806634 M1273292)

№ 4 чистовик

1

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

замена $a = x^2$, $b = y^2$

$$\begin{cases} \frac{1}{a+b} + ab = \frac{5}{4} \\ 2a^2+2b^2+5ab = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{a+b} + ab = \frac{5}{4} \\ 2a^2+2b^2+4ab - \frac{1}{a+b} = 2(a+b)^2 - \frac{1}{a+b} = 1 \end{cases}$$

замена $c = a+b$

$2c^2 - \frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow$

$2c^3 - c - 1 = 0$

1) $c = 1$

обратная замена

$$\begin{cases} \cancel{ab = \frac{1}{a}} \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b = 1 \\ ab = \frac{5}{4} - \frac{1}{a+b} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

2) $2c^2 + 2c + 1 = 0$

$D = 4 - 8 = -4 < 0$

$\varnothing$

по теореме Виета a, b – корни квадратного трёхчлена

$\cancel{x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow a = b} = \frac{1}{2}$

~~обратная замена~~

$z^2 - z + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow (z - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow a = b = \frac{1}{2}$

обратная замена

$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Ответ: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

чистовик

№5

(2)

~~при выборе возможны~~

заметим, что ~~$y=x$ $y+$~~ $y=x$ и $y=63-x$ в узлах сетки не пересекаются

также есть всего 5 групп случаев, рассм их.

~~.разны группы случаев~~

1) обе точки на $y=x$

таких $\cancel{\frac{62\cdot 61}{2}}=\frac{62\cdot 61}{2}$

2) обе точки на $y=63-x$

таких $\frac{62\cdot 61}{2}$

3) Одна на $y=x$, другая на $y=63-x$

таких $\underbrace{62}_{\text{выберем на } y=x}\cdot\underbrace{(62-2)}_{\text{всего 62 варианта, но 2 лежат с выбранной точкой на прямой параллельной осям координат}}=62\cdot 60$

4) одна на $y=x$, другая не на $y=x$ или $y=63-x$

$\underbrace{62}_{\text{выбрать на } y=x}\cdot(\underbrace{62^2}_{\text{всего узлов}}-\underbrace{2\cdot 62}_{\text{узлов на диагональных}}-\underbrace{(2\cdot 62-1)}_{\text{вместе с выбранной точкой лежат на прямой параллельной осям координат}}+\underbrace{3}_{\text{посчитали дважды}})=62\cdot(62-2)^2=62\cdot 60^2$

5) одна на $y=63-x$, другая ~~не на~~ не на $y=x$ или $y=63-x$

таких $\underbrace{62}_{\text{выберем на } y=63-x}\cdot(\underbrace{62^2}_{\text{всего узлов}}-\underbrace{2\cdot 62}_{\text{узлов на } y=x \text{ или } y=63-x}-\underbrace{(2\cdot 62-1)}_{\text{вместе с выбранной точкой лежат на прямой параллельной осям координат}}+3)=62\cdot(62-2)^2=62\cdot 60^2$

+3 в формуле – точки на пересечении прямых $y=x$ и $y=63-x$ с прямыми ~~паралельн~~ параллельными осям координат, содержащих выбранную точку мы их вычли дважды, когда убирали варианты

(0,0) (0,63) (63,63) (63,0)

1) ~~один из лежит~~ на $y=x$

~~так~~

~~$62\cdot($~~

1) оба на $y=x$

$$\frac{62\cdot 61}{2}=1891$$

2) оба на $y=63-x$

$$\frac{62\cdot 61}{2}=1891$$

3) одна на $y=x$, вторая не на $y=63-x$

~~$62\cdot(62^2-2\cdot 62+1-$~~ посчит 2 раза

$62\cdot(62^2-2\cdot 62-2\cdot 62+4)=62(62^2-4\cdot 62+4)$

всех узлов — диагонали — лежащие на одной ~~прямой~~ ‖ если пару ~~состоит~~ координ

4) одна на $y=\overset{63-x}{\cancel{x}}$ вторая не на $63-x$

$62(62^2-2\cdot 62+4)$

5) одна на $y=x$, вторая на $y=63-x$

$62\cdot(62-2)$ всего

~~$62\cdot(31+$~~$31+$~~$2\cdot 6(6$~~

$62(31+31+2(62-2)^2+62-2)=62(62+2\cdot 60^2+60)=$

$=62(122+2\cdot 60^2)=62\cdot 7322$

$$\begin{array}{r} 61\\ \times\ 31\\ \hline 61\\ 183\\ \hline 1891 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7200\\ +\ 122\\ \hline 7322\\ \times\ 62\\ \hline 14644\\ 43922\\ \hline 453964 \end{array}$$

211007599 (U806634 M1273292)

$$\frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4}$$

$$2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4}$$

$a=x^2 \quad b=y^2$

$$\frac{1}{a+b}+ab=\frac{5}{4}$$

$$2a^2+2b^2+5ab=\frac{9}{4}$$

$$2a^2+2b^2+4ab-\frac{1}{a+b}=1$$

$$2(a+b)^2-\frac{1}{a+b}=1$$

замена $c=a+b$

$\cancel{2c^3}$ $2c^3-c-1=0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2c^3-c-1 & c-1 \\ \underline{2c^3-2c^2} & 2c^2+2c+1 \\ 2c^2-c-1 & \\ \underline{2c^2-2c} & \\ c-1 & \end{array}$$

1) $c=1$ 2) $2c^2+2c+1=0$

$D=4-8<0$

$\cancel{x^2+}$ $a+b=1$

$ab=\frac{1}{4}$

a, b - корни $x^2-x+\frac{1}{4}=0$

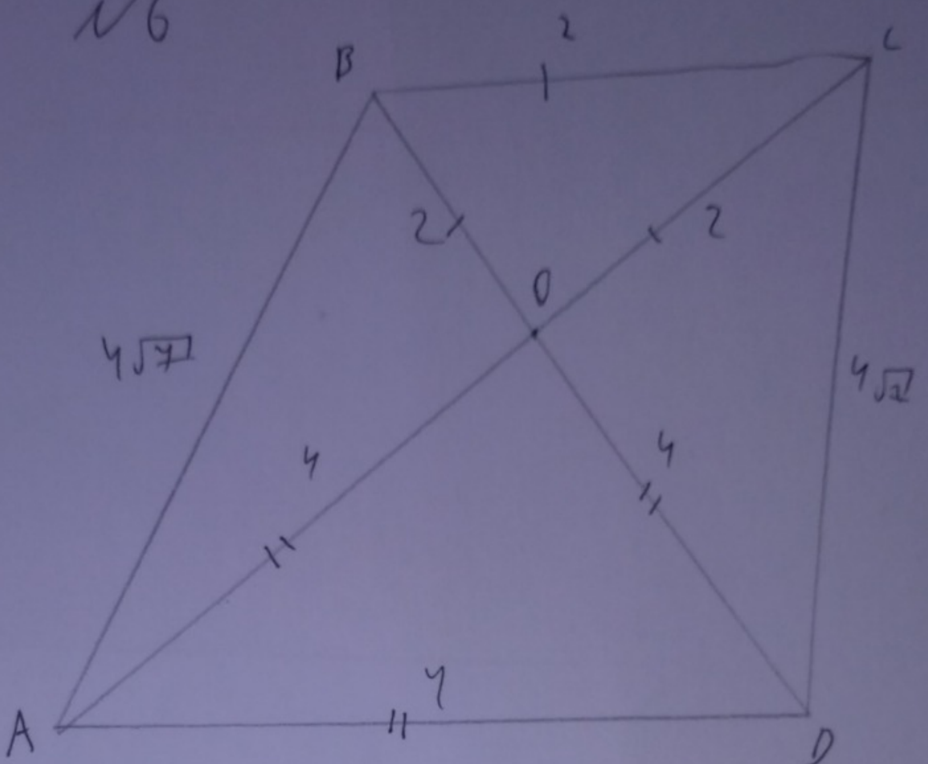
$4x^2-4x+1=0$

$\cancel{D}=(2x-1)^2=0$

$a=b=\frac{1}{2}$

211007599 (U806634 M1273292)

№6



$\angle CAD = \angle ACB = 60^\circ \Rightarrow BC \parallel AD$

$\angle BOA = \angle COD,\ BO = OC,\ AO = OD \Rightarrow \triangle ABO = \triangle OCD \Leftrightarrow \Rightarrow$

$AB = CD$

Значит перед нами равнобокая трапеция

$BC = 2 \quad AD = 4$

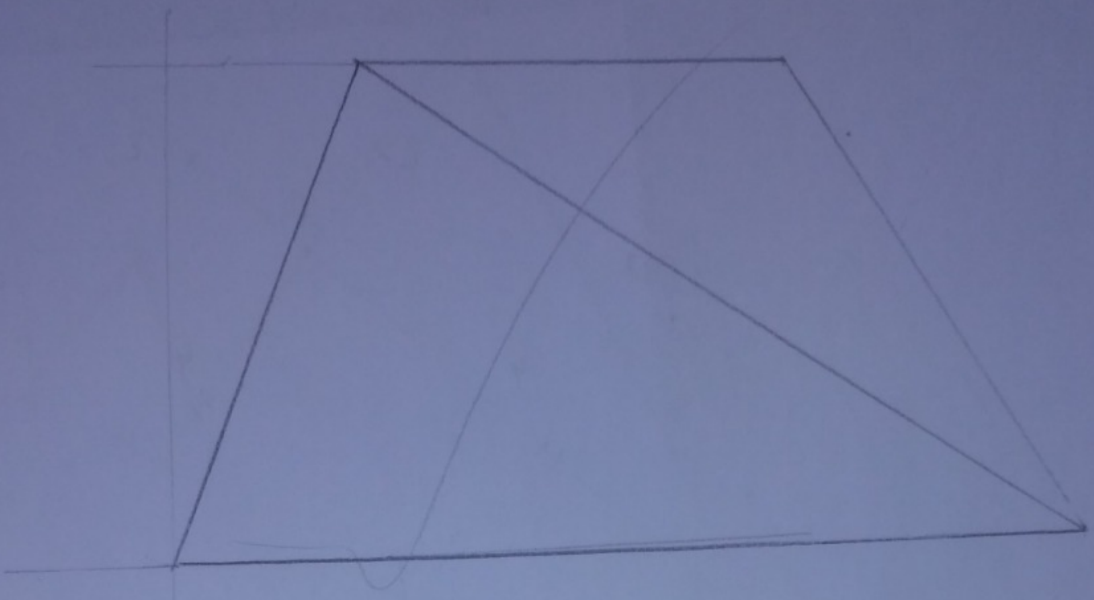
$\cancel{S_{\triangle ABT} = \frac{AB^2 \cdot \sin 60}{2}} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$AB^2 = 4 + 16 + 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos \overset{60}{\cancel{120}}{}^\circ = 4 + 16 + 8 = 28$

$AB = 2\sqrt{7}$

$S_{\triangle ABD} = \frac{AB^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 7\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \frac{6 \cdot 4 \cdot \sqrt{3}}{\cancel{4}} + \frac{2 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$



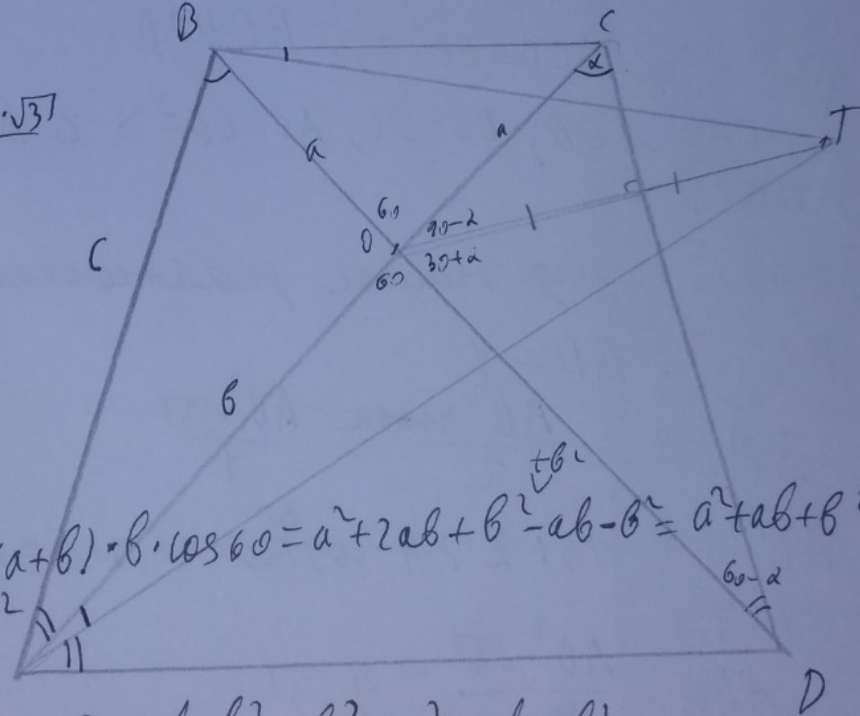
$90+\alpha$

$$S_{\triangle OCD}=\frac{ab\cdot\sin 60}{2}=\frac{ab\cdot\sqrt{3}}{4}$$

$$CD=\sqrt{a^2+b^2+ab}$$

$$OT\cdot CD=\frac{ab\cdot\sqrt{3}}{2}$$

$$OT=\frac{ab\cdot\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+b^2+ab}}$$



$\cancel{(a+b)^2+}$

$$CD^2=(a+b)^2+b^2-2(a+b)\cdot b\cdot\cos 60=a^2+2ab+b^2-ab-b^2=a^2+ab+b^2$$

$\cancel{CD=}$ $\cancel{\cos\alpha=}\frac{AC^2+CD^2}{2b}$

$$\cos\alpha=\frac{AC^2+CD^2-AD^2}{2\cdot AC\cdot CD}=\frac{a^2+2ab+b^2-b^2+a^2+ab+b^2}{2\cdot(a+b)\sqrt{a^2+ab+b^2}}$$

Чистовик ③

всего получаем

$\cancel{62\cdot 61+62\cdot 6}$

$62\cdot61+62\cdot60+2\cdot62\cdot60^2=62(121+7200)=62\cdot7321=$

$$
\begin{array}{r}
\times\ 7321 \\
62 \\
\hline
14642 \\
43926\ \ \\
\hline
453902
\end{array}
$$

$=453902$

Ответ: 453902