Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007598**

ID профиля: **98849**

Вариант 12

Черновик

$x+1+9+2\cdot 3\cdot\sqrt{x+1}=\left(2\sqrt{4-x}\left(\sqrt{x+1}+1\right)\right)^2$

$x+10+6\sqrt{x+1}=4(4-x)\left(x+1+1+2\sqrt{x+1}\right)$

$x+10+6\sqrt{x+1}=4(4-x)\left(x+2+2\sqrt{x+1}\right)$

$x+10+6\sqrt{x+1}=16x+32+32\sqrt{x+1}-4x^2-\underline{8x}-8x\sqrt{x+1}$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$

$x+10+6\sqrt{x+1}=4(4+3x-x^2)+4-x+2(4-x)\sqrt{x+1}\cdot 2$

$2x+10+6\sqrt{x+1}=4(4+3x-x^2)+4+4(4-x)\sqrt{x+1}$

$x+5+3\sqrt{x+1}=2(4+3x-x^2)+2-2(4-x)\sqrt{x+1}$

$x+5$

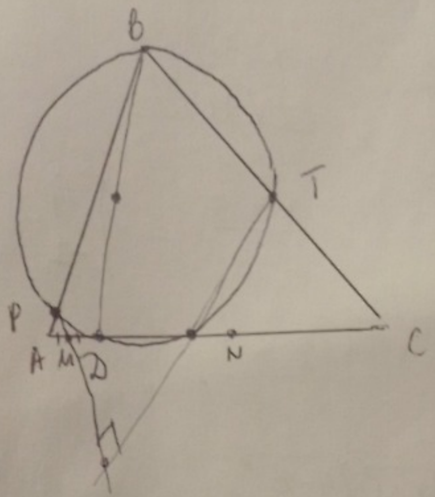
$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}$

$x+1-4+x=$
$=x-3$

$\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}}=$

$=$

Черновик



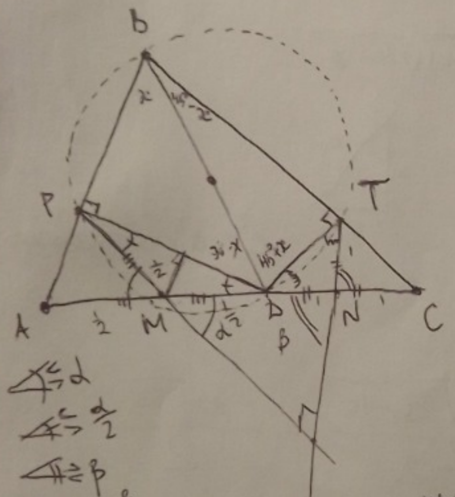
$S(\triangle ABC)$ – ?

$|PM| = \frac{1}{2}$

$|NT| = 1$

$|BD| = \frac{4}{3}$

$|AC| = 2|PM| + 2|TN| = 1 + 2 = 3$



$\angle \le \alpha$

$\angle \le \frac{\alpha}{2}$

$\angle \ge \beta$

$\angle \le \frac{\beta}{2}$

$P\hat{D}T = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180^\circ - \frac{(\alpha+\beta)}{2} \overset{\alpha+\beta=90^\circ}{=\!=} 135^\circ$

Тогда $A\hat{B}C = 45^\circ$.

$\cancel{|BD|^2 = |AB|^2 \frac{|AD|}{|AC|} + \frac{|BC|^2}{|AC|}}$

$\cancel{|BD|^2 = |AB|^2 \cdot \frac{|BC|}{|AC|}} + |BC|^2 \cdot \frac{|AB|}{|AC|}$

$|BD|^2 = |AB|^2 \cdot \frac{|CD|}{|AC|} + |BC|^2 \cdot \frac{|AD|}{|AC|} - |AD| \cdot |DC|$

$|BD|^2 = \frac{16}{9}$

$|AC| = 3$

$|AD| = 1$

$|CD| = 2$

$\cancel{|BD|^2 =}$

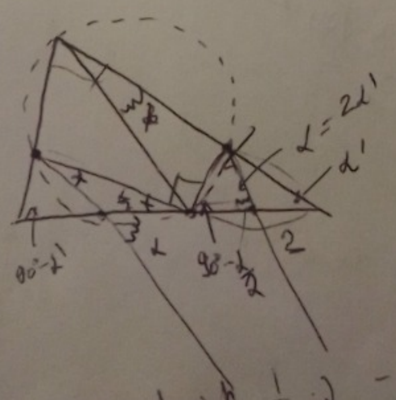
$\frac{16}{9} = \frac{2}{3}|AB|^2 + \frac{1}{3}|BC|^2 - 1 \cdot 2$

$\frac{16}{3} = 2|AB|^2 + |BC|^2 - 6$

$\frac{34}{3} = 2|AB|^2 + |BC|^2$

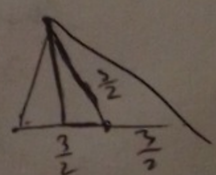
$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cdot \cos 45^\circ$

$9 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB| \cdot |BC| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$



$\sin\beta \cdot \frac{4}{3} = 2\sin\alpha'$

$\sin\beta = \frac{3}{2}\sin\alpha'$



$\frac{16}{9}\cos\beta \cdot \sin\beta \; \frac{1}{2} \cdot 2$ – площадь пр-ка

$4 \cdot \sin\alpha' \cdot \cos\alpha' \cdot \frac{1}{2} = \sin\alpha$

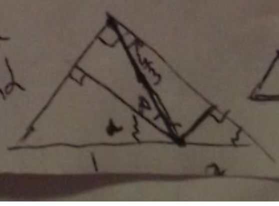
$= 2\sin\alpha\cos\alpha$

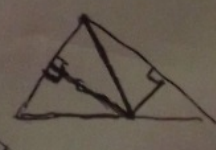
$\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin\alpha \quad \sin\alpha' \cdot \cos\alpha' \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}\sin\alpha$

$\frac{4}{3}\cos\beta = \cos\alpha$

$\frac{4}{3}\sin\beta = 2\sin\alpha$

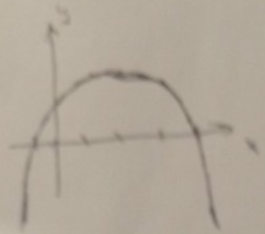




$\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$ Черновик

$4+3x-x^2=0$ -1, $+4$

$4+3x-x^2$



$\Leftrightarrow x^2-3x-4=0$

$4-3-1=0$
$4+12-16=0$

$x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm5}{2}=\left[\begin{array}{l}4\\-1\end{array}\right.$

$x\in[-1;4]$

$4-x\geq0$
$\cancel{x\geq4}$
$4\geq x$

$x+1\geq0$ $x\geq-1$

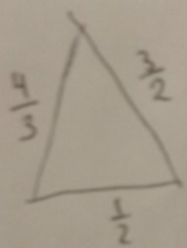
$\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}$

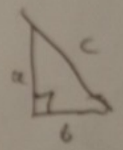
$x+1+4-x+2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}=4(x+1)(4-x)+9+2\cdot3\cdot2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}$

$5+2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}=4(x+1)(4-x)+9+12\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}$

$14\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}=4(x+1)(4-x)+4$

$7\underbrace{\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}}_{A}=2\underbrace{(x+1)(4-x)}_{A^2}+2$





$c^2=a^2+b^2-2ab\cos 90^\circ$, 0

$7A=2A^2+2$

$2A^2-7A+2=0$

$A=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot2\cdot2}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{49-16}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{33}}{2}$

$\frac{9}{4}=\frac{1}{4}+\frac{16}{9}-\frac{4}{3}\cos\beta$

$2=1+\frac{7}{9}-\frac{4}{3}\cos\beta$

$\frac{2}{9}=\frac{4}{3}\cos\beta$

$\cos\beta=-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9}$

$\cos\beta=-\frac{6}{36}=-\frac{1}{6}$

$\begin{cases}x+1+4-x-2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}=4(x+1)(4-x)+9-12\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}\\2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}-3\geq0\end{cases}$

$5+10\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}=4(x+1)(4-x)+9$

$5\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}=2(x+1)(4-x)+2$

$5\cdot1\cdot2=10$ $2\cdot1\cdot4+2=10$

$1+2+3=2\cdot1\cdot2$

$2\cdot1\cdot2-3\geq0$

$\frac{16+9-24}{1}$

$5-2\cdot1\cdot2=1$

$\frac{3-\sqrt{24}}{2}<\frac{3-4}{2}<-\frac{1}{2}$

$-1<$

$\frac{3+\sqrt{24}}{2}$

$2A^2-5A+2=0$

$A=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}$

$A=\frac{5\pm3}{4}$

$\left[\begin{array}{l}A=2\\A=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

$(x+1)(4-x)=4$

$-x^2+3x+4=4$

$3x-x^2=0$

$\left[\begin{array}{l}x=0 \text{ - подх.}\\x=3 \text{ - подх.}\end{array}\right.$

$(x+1)(4-x)=\frac{1}{4}$

$-x^2+3x+4=\frac{1}{4}$

$x^2-3x-4+\frac{1}{4}=0$

$x^2-3x-\frac{15}{4}=0$

$4x^2-12x-15=0$

$x=\frac{12\pm\sqrt{144+240}}{8}$

$x^2-3x-4=-\frac{1}{4}$

$x=\frac{12\pm\sqrt{384}}{8}$

$x=\frac{3\pm\sqrt{24}}{2}$

384	2
192	2
96	2
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$384:16=$
$=2^{7-4}\cdot3=$
$=2^3\cdot3=24$

$128\cdot3=$
$=384$

$\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{4}{3}\cdot\sin X+$

$+\frac{1}{2}\cdot2\cdot\frac{4}{3}\cdot\sin X$

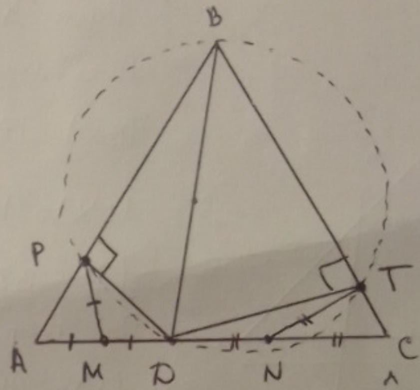
211007598 (U98849 M1276990)

Чистовик (стр 1) Математика, 10 кл

Задача 1

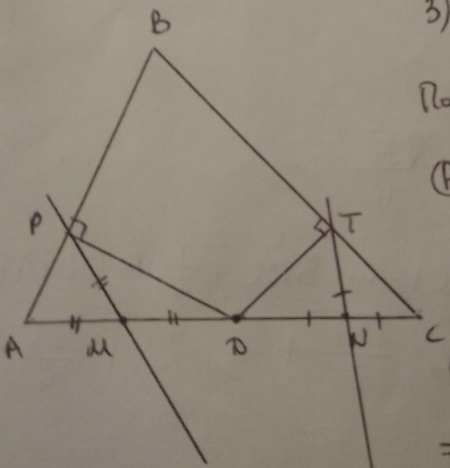
Дано:
$\triangle ABC$
$D \in [AC]$
Окр-ть с диам. $[BD]$ пересекает $[BA]$ в P и $[BC]$ в T.
M - сер $[AD]$
N - сер $[CD]$
$(PM) \parallel (TN)$

Найти
а) $\hat{ABC}$
б) $S(\triangle ABC)$, если $|MP| = \frac{1}{2}$; $|NT| = 1$; $|BD| = \frac{4}{3}$



1) P лежит на окр-ти с диаметром $[BD]$ => $B\hat{P}D = 90^\circ$
$\angle APD, \angle BPD$ - смежные => $A\hat{P}D = 180^\circ - B\hat{P}D = 90^\circ$
=> $\triangle APD$ - прямоугольный => (по св-ву прямоуг. треуг.)
$|PM| = |AM| = |MD|$
↑медиана

2) T лежит на окр-ти с диаметром $[BD]$ => $B\hat{T}D = 90^\circ$
$\angle BTD, \angle CTD$ - смежные => $CTD = 180^\circ - B\hat{T}D = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$
=> $\triangle DTC$ - прямоугольный => (по св-ву прямоуг. треуг.) $|TN| = |DN| = |NC|$
↑медиана



3) $\exists\, \alpha = P\hat{D}M$
$|PM| = |MD|$ => $\triangle PMD$ - равноб => $M\hat{P}D = P\hat{D}M = \alpha$
По теор. о сумме углов $P\hat{M}D = 180^\circ - \alpha - \alpha = 180^\circ - 2\alpha$
$(PM) \parallel (TN)$ => (по св-ву одностор. углов) $P\hat{M}D + D\hat{N}T = 180^\circ$
=> $D\hat{N}T = 180^\circ - P\hat{M}D = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha$

$|NT| = |DN|$ => $\triangle TND$ - равноб => $D\hat{T}N = T\hat{D}N$
По теор. о сумме углов тр-ка $D\hat{T}N + T\hat{D}N = 180^\circ - 2\alpha$ =>
=> $T\hat{D}N = D\hat{T}N = 90^\circ - \alpha$

Поскольку $A - D - C$, (т.е. $A\hat{D}C$ - развернутый, равен 180°), то
$A\hat{D}P + P\hat{D}T + T\hat{D}C = 180^\circ$, т.е. $\alpha + P\hat{D}T + 90^\circ - \alpha = 180^\circ$ => $P\hat{D}T = 90^\circ$

В четырехугольнике (вписанном) $PBTD$ $P\hat{B}T = 180^\circ - P\hat{D}T = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ =>
$\angle PBT \equiv \angle ABC$
=> $A\hat{B}C = 90^\circ$

4) $|TN| = 1$ => $|DC| = |DN| + |NC| = 1 + 1 = 2$
$|PM| = \frac{1}{2}$ => $|AD| = |AM| + |MD| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

1

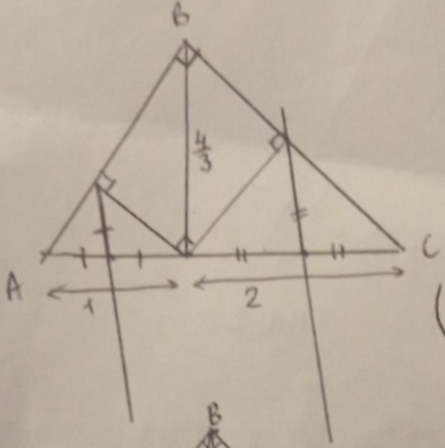
Чистовик (стр 2)

Пусть X – середина [AC].

Поскольку $\triangle ABC$ – прямоугольный, то

$|BX| = |AX| = |XC| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{3}{2}$

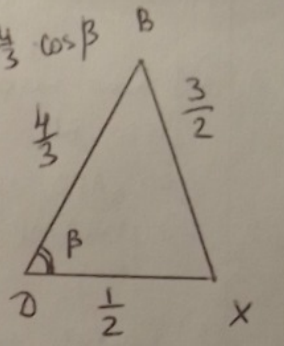
$|DX| = |CD| - |XD| = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$



$\exists\ \beta = B\hat{D}X$

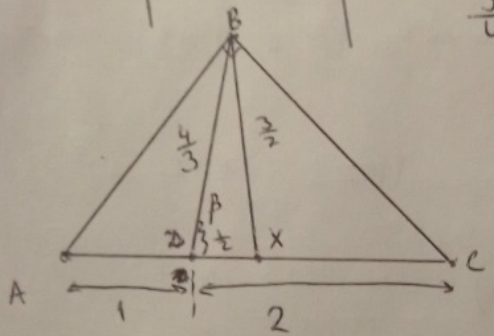
По теор. косинусов

$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cos\beta$



$\frac{9}{4} = \frac{1}{4} + \frac{16}{9} - \frac{4}{3}\cos\beta$

$2 = \frac{16}{9} - \frac{4}{3}\cos\beta$



$6 = \frac{16}{3} - 4\cos\beta$

$\cancel{4\cos\beta = 10}$

$4\cos\beta = \frac{16}{3} - 6$

$2\cos\beta = \frac{8}{3} - 3$

$2\cos\beta = -\frac{1}{3}$

$\cos\beta = -\frac{1}{6}$

$\sin\beta > 0 \Rightarrow \sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{6}$

(т.к. $\beta \in [0°, 180°]$

$S(\triangle ABC) = S(\triangle DBC) + S(\triangle ADB) = \frac{1}{2}|BD|\cdot|DC|\cdot\sin B\hat{D}C + \frac{1}{2}|BD|\cdot|AD|\cdot\sin A\hat{D}B = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{35}}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{35}}{6}$

$(\sin A\hat{D}B = \sin(180° - A\hat{D}B) = \sin B\hat{D}C = \sin\beta)$

$= \frac{\sqrt{35}}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot 3 = \frac{\sqrt{35}}{6}\cdot 2 = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Ответ: $A\hat{B}C = 90°$; $S(\triangle ABC) = \frac{\sqrt{35}}{3}$.

Задача 2 Чистовик (стр. 3)

Р.У. $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$

ОДЗ

$$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ 4-x\geq 0 \\ 4+3x-x^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\geq 0 \\ 4-x\geq 0 \\ (x+1)(4-x)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x\leq 4 \end{cases}$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}-3$$

$$\Rightarrow (x+1)+(4-x)-2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}=4(x+1)(4-x)+9-12\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}$$

$$\Leftrightarrow 5-2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}=4(x+1)(4-x)+9-12\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}=4(x+1)(4-x)+4$$

$A=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}$

$\Leftrightarrow 5A=2A^2+2 \Leftrightarrow 2A^2-5A+2=0$ (*)

Дискриминант конечного уравнения: $25-4\cdot 2\cdot 2=9>0$.

$$(*) \Leftrightarrow A=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=\frac{8}{4} \\ A=\frac{2}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=2 \\ A=1 \end{array}\right.$$

Случай 1: $A=2 \Leftrightarrow (x+1)(4-x)=4$

$\Leftrightarrow -x^2+3x+4=4 \Leftrightarrow 3x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

Проверим, подходят ли эти корни:

1) $x=0$:

$\sqrt{0+1}-\sqrt{4-0}+3=2\sqrt{4+3\cdot 0-0^2}$

$\Leftrightarrow 1-2+3=2\cdot 2 \Leftrightarrow 2=4$ – ложь

2) $x=3$

$\sqrt{3+1}-\sqrt{4-3}+3=2\cdot\sqrt{4+3\cdot 3-3^2}$

$\Leftrightarrow 2-1+3=2\sqrt{4+9-9} \Leftrightarrow 4=4$ – истина.

Случай 2: $A=\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x+1)(4-x)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow -x^2+3x+4=\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow x^2-3x-4=-\frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2-3x-\frac{15}{4}=0$

$\Leftrightarrow 4x^2-12x-15=0 \Leftrightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{144+15\cdot 16}}{8} \Leftrightarrow x=\frac{12\pm\sqrt{384}}{8}$

$\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{24}}{2}$ Оба эти корня подходят под ОДЗ.

1) $x=\frac{3+\sqrt{24}}{2}$ Решим тождество:

$$\sqrt{\frac{5+\sqrt{24}}{2}} - \sqrt{4-\frac{3+\sqrt{24}}{2}} + 3 = 2\sqrt{\frac{5+\sqrt{24}}{2}}\sqrt{4-\frac{3+\sqrt{24}}{2}}$$

$$\cancel{\sqrt{2+\sqrt{6}} = \sqrt{\ }}$$

$$\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}} + 3 = \sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{6}}\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}}\cdot 2$$

$$\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}} + 3 = 2\sqrt{\frac{25}{4}-6}$$

$$\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}} + 3 = 2\cdot\frac{1}{2}$$

$$\cancel{\frac{5}{2}+\sqrt{6} = \sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}} - \frac{5}{2}}$$

Но $\frac{5}{2}+\sqrt{6} > \frac{5}{2}-\sqrt{6}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}} > 0$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}} + 3 > 3 > \frac{1}{2}\cdot 2$

Т.о. $\frac{3+\sqrt{24}}{2}$ — не корень ур-я.

2) $x=\frac{3-\sqrt{24}}{2}$ Решим тождество:

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{24}}{2}} - \sqrt{4-\frac{3-\sqrt{24}}{2}} + 3 = 2\sqrt{\frac{5-\sqrt{24}}{2}}\sqrt{4-\frac{3-\sqrt{24}}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{6}} + 3 = 2\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}}\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{6}}$$

$$\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{6}} + 3 = 2\sqrt{\frac{25}{4}-6} = 2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}} + 3 - 1 = \sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{6}}$$

$$\left(\frac{5}{2}-\sqrt{6}\right)+4+\cancel{2}4\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}} = \frac{5}{2}+\sqrt{6}$$

$$4+4\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}-4}{4}$$

$$\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}-2}{2}$$

$$4\left(\frac{5}{2}-\sqrt{6}\right) = 6+4-4\sqrt{6}$$

$10-4\sqrt{6} = 10-4\sqrt{6}$ — ист. Этот корень подходит.

Ответ: $\left\{\frac{3-\sqrt{24}}{2}; 3\right\}$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007598**

ID профиля: **98849**

Вариант 12

$\cancel{2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4}}$

$\frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4}$

Черновик

$\cancel{2(x^4+y^4-2x^2y^2)}+9x^2y^2=\frac{9}{4}$

$2x^4-2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4}$

$\cancel{2(x^2-y)^2}$

$\begin{cases} a=x^2+y^2 \\ b=x^2y^2 \end{cases}$

$a=1: \quad 2-1-1=0$

$\frac{1}{a}+b=\frac{5}{4}$

$2\sqrt{2}$ $\sqrt[6]{2}$

$2a^3-a-1=0$

$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$2a^2+b=\frac{9}{4}$

$1-a-1=0$

6

$\frac{2\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$

$2a^2-\frac{1}{a}=1$

Внутри квадрата – точки с абсциссами и ординатами от 1 до 62:

$2a^3-1=a$

62^2 точек

3) Кол-во способов, когда оба узла на прямых:

3.1) Оба на $y=x$: $62\cdot 61$

3.2) Оба на $y=63-x$: $62\cdot 61$

3.3) Один – на $y=x$, другой – на $y=63-x$

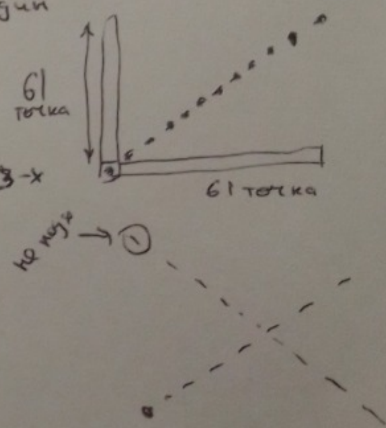
$62\cdot 60$

1) Кол-во способов, когда один узел – на $y=x$.

$62\cdot 61^2$

2) Кол-во способов, когда один узел – на $y=63-x$

$62\cdot 61^2$



Важно: эти 2 прямые не пересекаются в узлах сетки!

Ответ: $2\cdot 62\cdot 61^2 - 62\cdot 61 - 62\cdot 60$

5

$a=1$

$a^2+2ab+b^2 \geq 4ab$

$x^2+y^2=1$

$1+b=\frac{5}{4}$

$2a^3-a-1=0$

$b=\frac{1}{4}$

$(2a^3-2a^2)+(2a^2-2a)+(a-1)=0$

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

$(a-1)(2a^2+2a+1)=0$

$x^2+y^2=1$

$a+b\geq 2\sqrt{ab}$

$x^2y^2=\frac{1}{4}$

$2a^2+2a+1 > 0$

$a-1=0$

$x^2+y^2\geq 2xy$

$\frac{x^2+y^2}{2}\geq xy$

$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1 \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4=\frac{1}{4}}$

$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

$x^2+y^2\geq 2xy$

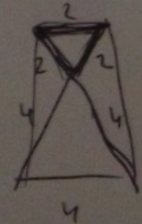
$(20-8\sqrt{3})\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$5\sqrt{3}-6$

$2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$20-8\sqrt{3}$



$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(4+8+8+16)=36\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}$

211007598 (U98849 M1276991)

Задача 4

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2(x^4+2x^2y^2+y^4)+x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \xLeftrightarrow{\begin{cases} a=x^2+y^2 \\ b=x^2y^2 \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}+b=\frac{5}{4} \\ 2a^2+b=\frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a}+b=\frac{5}{4} \\ 2a^2-\frac{1}{a}=1 \quad (*) \end{cases}$$

вычтем из нижнего верхнее

$\left(\text{ОДЗ: } x^2+y^2\neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{array}\right.\right)$

Решим ур-е $(*)$: $2a^2-\frac{1}{a}=1 \xLeftrightarrow{a=x^2+y^2\neq 0} 2a^3-a-1=0$

$\Leftrightarrow (2a^3-2a^2)+(2a^2-2a)+(a-1)=0$

$\Leftrightarrow (a-1)(2a^2+2a+1)=0 \Leftrightarrow (a-1)\left((a+1)^2+a^2\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ (a+1)^2+a^2=0 \end{array}\right. \xLeftrightarrow{\begin{cases} a^2\geq 0 \\ (a+1)^2\geq 0 \end{cases}} \left[\begin{array}{l} a=1 \\ \begin{cases} a^2=0 \\ (a+1)^2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ \begin{cases} a=0 \\ a=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow a=1.$$

Т.о. исходная система равносильна:

$$\begin{cases} \frac{1}{a}+b=\frac{5}{4} \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$\exists\, u=|x|$

$\exists\, v=|y|$

Тогда система равносильна $\begin{cases} u^2+v^2=1 \\ (uv)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{cases} \xLeftrightarrow{uv\geq 0} \begin{cases} u^2+v^2=1 \\ uv=\frac{1}{2} \end{cases}$

По неравенству Коши, $1=\underbrace{u^2+v^2\geq 2\sqrt{u^2v^2}}=2uv=2\cdot\frac{1}{2}=1$

В данном случае достигается равенство. Равенство в нер-ве Коши достигается тогда и только тогда, когда все слагаемые равны. Значит, $u^2=v^2$, а, поскольку $u,v\geq 0$, это равносильно $u=v$. Т.о.:

Тогда $2v^2=2u^2=u^2+v^2=1 \xLeftrightarrow{u,v>0} u=v=\sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\begin{cases} |x|=u=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ |y|=v=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \wedge y=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \wedge y=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x=\frac{1}{\sqrt{2}} \wedge y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \wedge y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$$

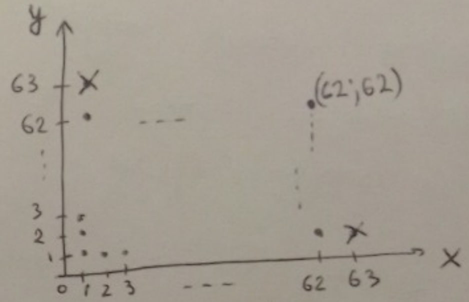
Ответ: $\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

Задача 5

1) Заметим, что прямые $y=x$ и $y=63-x$ не пересекаются в целочисленной точке.
Для этого решим уравнения:

$$\begin{cases} y=x \\ y=63-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x=63-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x=\frac{63}{2} \end{cases} \Leftrightarrow y=x=\frac{63}{2} \notin \mathbb{Z}$$

2) Посчитаем кол-во способов отметить 2 точки, чтобы один из узлов лежал на $y=x$ и оба узла не лежали ни на вертикальной, ни на горизонтальной прямой:



2.1) Точки, которые можно выбирать, имеют абсциссы и ординаты не менее 1 и не более 62.

2.2.) 62 - кол-во способов выбрать точку на $y=x$

В каждой вертикали и горизонтали 62 точки.

Пусть мы выбрали точку A на $y=x$. Тогда в пару с ней мы не можем выбрать саму точку A, $62-1=61$ точку, располагающуюся в одной горизонтали с A и $62-1=61$ точку, располагающуюся в одной вертикали с A, а все остальные - можем.

Т.о. каждой точке A можно ~~выбрать~~ подобрать $62^2-1-61-61 = 62\cdot 62-62-61 = 62\cdot 61-61 = 61^2$.

2.3.) При таком подсчёте, если точки A и B лежат на прямой $y=x$, то пару точек $(A;B)$ я подсчитал 2 раза.

Кол-во способов выбрать различные пары точек A и B: $\frac{62\cdot 61}{2}$

2.4) В итоге, кол-во способов выбрать один из узлов на $y=x$, чтобы всё было по правилам:

$$62\cdot 61^2-\frac{62\cdot 61}{2}$$

3) Посчитаем кол-во способов отметить 2 точки, чтобы один из узлов лежал на $y=63-x$ и оба узла не лежали ни на вертикальной, ни на горизонтальной прямой:

Этот случай получается симметрией из предыдущего относительно прямой $x=\frac{63}{2}$ (так как прямая $y=63-x$ и $y=x$ симметричны относительно прямой $\frac{63}{2}$), а значит, при такой симметрии точки из пункта 2) переходят в точки из этого (3) пункта и наоборот, следовательно, наблюдается биекция между такими точками, а значит, в этом пункте кол-во искомых пар точек такое же, как и в пункте 2, то есть

$$62\cdot 61^2-\frac{62\cdot 61}{2}$$

4)

Если мы сложим кол-во всех пар из пунктов

$$\left(62\cdot 61^2 - \frac{62\cdot 61}{2}\right)\cdot 2 = 2\cdot 62\cdot 61^2 - 62\cdot 61$$

то мы по два раза посчитаем случаи ~~когда~~ пар, когда одна точка лежит на $y=x$, а другая - на $y=63-x$.

Посчитаем кол-во таких пар и вычтем из полученного числа.

Кол-во способов выбрать точку на прямой $y=x$: 62.

Для каждой такой точки ~~$(x_0; y_0)$~~ $(x_0; x_0)$ на прямой $y=63-x$ подходят все 62 точки кроме ~~$(63-y_0$~~ $(x_0; 63-x_0)$ и $(63-x_0; x_0)$, которые лежат с ней на одних ~~гори~~ вертикалях / горизонталях, т.о. каждой точке на прямой $y=x$ я сопоставляю $62-2=60$ точек на $y=63-x$.

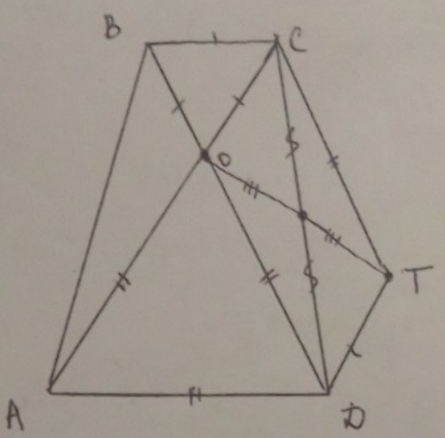
Т.о. искомое кол-во пар: $62\cdot 60$.

5) Суммарное кол-во пар равно

$$2\cdot 62\cdot 61^2 - 62\cdot 61 - 62\cdot 60 = 62(2\cdot 61^2 - 61 - 60)$$

Ответ: $(2\cdot 61^2 - 61 - 60)\cdot 62$

Задача №6



Дано

$ABCD$ - выпуклый четырехугольник

$\{O\} = [AC] \cap [BD]$

$\triangle BOC$, $\triangle AOD$ - правильные

T - симметрична O относительно середины $[CD]$.

а) (!) $\triangle ABT$ - правильный

б) $\dfrac{S(\triangle ABT)}{S(ABCD)}$, если $|BC|=2$; $|AD|=4$

Решение

1) При отражении относительно центра отрезка $[CD]$ точка O переходит в точку T; точка C переходит в точку D, точка D переходит в точку C. Значит, при таком движении, треугольник $\triangle COD$ переходит в треугольник $\triangle DTC$. Тогда $\triangle COD = \triangle DTC \Rightarrow \begin{cases}|DT|=|CO|\\|OD|=|CT|\end{cases}$

(также можно было сослаться на признак параллелограмма: диагонали четырехугольника $CODT$ при пересечении делятся пополам $\Rightarrow$

$\Rightarrow CODT$ - параллелограмм $\Rightarrow \begin{cases}|DT|=|CO|\\|OD|=|CT|\end{cases}$

2) $\angle BOC$ - угол в правильном $\triangle BOC \Rightarrow B\hat{O}C=60° \Rightarrow C\hat{O}D \underset{\uparrow}{=} 180° - B\hat{O}C = 180°-60°=120°$

св-во смежных углов

$CODT$ - параллелограмм $\Rightarrow \begin{cases}C\hat{T}D = C\hat{O}D = 120°;\\ O\hat{C}T = 180° - C\hat{O}D = 180°-120° = 60° = A\hat{D}T\end{cases}$

(по св-ву одностор. углов)

3) $\begin{cases}B\hat{C}O = 60° \text{ (т.к. } \triangle BOC \text{ - правильный)}\\ O\hat{C}T = 60° \text{ (из (2))}\end{cases} \Rightarrow B\hat{C}T = 60°+60°=120°$

$\begin{cases}O\hat{D}A = 60° \text{ (т.к. } \triangle AOD \text{ - правильный)}\\ A\hat{D}T = 60° \text{ (из (2))}\end{cases} \Rightarrow A\hat{D}T = 60°+60°=120°$

$A\hat{O}B = 180° - B\hat{O}C = 180°-60° = 120°$

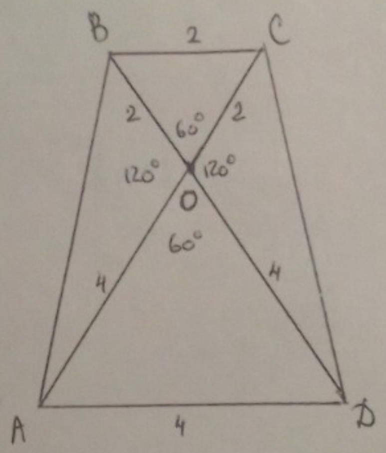
(по св-ву смеж. углов)

4) $\begin{cases}120° = A\hat{O}B = B\hat{C}T = A\hat{D}T\\ |AO| = |CT| = |AD|\\ |BO| = |BC| = |TD|\end{cases} \Rightarrow$ по 1 признаку равенства треугольников

$\triangle AOB = \triangle TCB = \triangle ADT \Rightarrow |AB|=|BT|=|AT|$

$\Rightarrow \triangle ABT$ - правильный.

Пункт а) доказан.

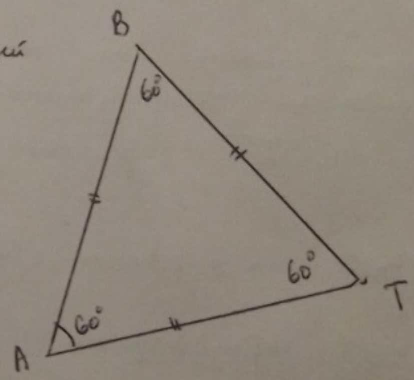


5) $S(ABCD) = S(\triangle AOB) + S(\triangle BOC) + S(\triangle COD) + S(\triangle DOA) =$
$= \frac{1}{2}|AO|\cdot|BO|\cdot\sin 120° + \frac{1}{2}|BO|\cdot|CO|\cdot\sin 60° + \frac{1}{2}|CO|\cdot|DO|\cdot\sin 120° +$
$+ \frac{1}{2}|DO|\cdot|AO|\cdot\sin 60°$ $\underline{\underline{\sin 60° = \sin 120°}}$
$= \frac{1}{2}\sin 60°\left(|AO|\cdot|BO| + |BO|\cdot|CO| + |CO|\cdot|DO| + |AO|\cdot|DO|\right)$

$|AO| = |DO| = |AD| = 4$ ($\triangle AOD$ – правильный)
$|CO| = |BO| = |BC| = 2$ ($\triangle BOC$ – правильный)

Тогда $S(ABCD) = \frac{1}{2}\sin 60°\cdot\left(4\cdot 2 + 2\cdot 2 + 4\cdot 2 + 4\cdot 4\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(8+4+8+16) =$
$= \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 36 = 9\sqrt{3}$

6) По теор. косинусов $|AB|^2 = |BO|^2 + |OA|^2 - 2|AO|\cdot|BO|\cdot\sin 120° =$
$= 2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 4 + 16 - 8\sqrt{3} = 20 - 8\sqrt{3}$



7) $S(\triangle ABT) = \frac{1}{2}\cdot\sin\hat{BAT}\cdot|AB|\cdot|AT| =$ ($\triangle BAT$ – правильный $\Rightarrow \hat{BAT} = 60°$; $|AT| = |AB|$) $= \frac{1}{2}\sin 60°\cdot|AB|^2 \overset{(6)}{=}$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(20 - 8\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4(5 - 2\sqrt{3}) = 5\sqrt{3} - 6$

8) $$\frac{S(\triangle ABT)}{S(ABCD)} = \frac{5\sqrt{3} - 6}{9\sqrt{3}} = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{9}.$$

Ответ: $$\frac{S(\triangle ABT)}{S(ABCD)} = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{9}.$$