Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

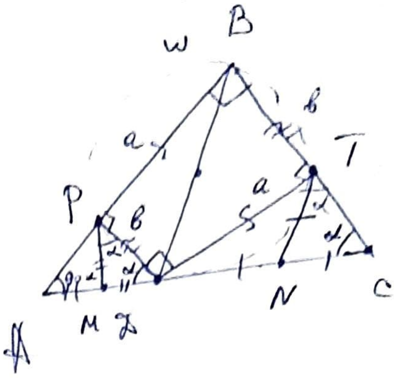
Шифр: **211007571**

ID профиля: **195907**

Вариант 12

№1

Дано:
$\triangle ABC$;
$D \in AC$;
$\omega \div BD$ - диаметр
$\omega \cap AB = P$
$\omega \cap BC = T$
M, N - середина AD и CD
$PM \parallel TN$
а) $\angle ABC$ - ?
б) S_{ABC} - ? если $MP = \frac{1}{2}$; $NT = 1$; $BD = \frac{4}{3}$



Т.к. BD - диаметр; $\angle DTB = \angle DPB = 90°$

~~Пусть~~ Тогда $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ - прямоугольные, PM и TN в них - медианы к гипотенузам;
т.е. $PM = AM = MD$; $TN = DN = NC \Rightarrow \triangle AMP$; $\triangle MPD$, $\triangle DNT$; $\triangle TNC$ - равнобедренные $\Rightarrow \angle NCT = \angle NTC = \alpha$. Тогда $\angle NDT = \angle DTN = 90 - \alpha$;

$\angle TND = 2\alpha$ как внешний к $\triangle TNC$; $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMD = 180° - \angle DNT = 180° - 2\alpha \Rightarrow \angle DPM = \angle MDP = \alpha \Rightarrow \angle MAP = \angle APM = 90 - \alpha \Rightarrow$

$\angle ABC = 180° - \angle PAM - \angle TCN = 90°$

б) ~~Т.к.~~ $\angle ABC = 90°$, $\angle DPB = \angle BTD = 90° \Rightarrow \angle PDT = \underbrace{360° - 90° \cdot 3}_{\text{сумма углов чет. } BTDP} = 90°$

Т.е. $BTDP$ - прямоугольник $\Rightarrow DT = PB = a$; $BT = PD = b$.

~~$\triangle DTC \sim \triangle$~~ $\overset{DN+CN}{DC} = 2TN = 2$; $\overset{AM+MD}{AD} = 2PM = 1$.

$\triangle DTC \sim \triangle APD$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{TC}{PD} = \frac{DT}{AP} = \frac{DC}{DA} = 2 \Rightarrow$

$TC = 2b$; $AP = \frac{a}{2}$.

$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BDC} = \frac{1}{2}(PD \cdot AB + DT \cdot BC) = \frac{1}{2}(b \cdot \frac{3}{2}a + a \cdot 3b) =$
$= 2{,}25\,ab = (\frac{9}{4}ab)$

По т. Пифагора для $\triangle DTB$ и $\triangle APD$:

$\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{16}{9} \\ \frac{a^2}{4} + b^2 = 1 \end{cases} \ominus \rightarrow \frac{3}{4}a^2 = \frac{7}{9}$; $a^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{7}{3}$; $a = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}$

Геометрия № 2

№ 1 (продолжение)

$$b^2 = \frac{16}{9} - a^2 = \frac{4}{9} \cdot 4 - \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{3}$$

$$b = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow$$

$$S_{abc} = \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{35}}{3}$$

Ответ: а) $\angle ABC = 90°$

б) $S_{abc} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Чистовик №3

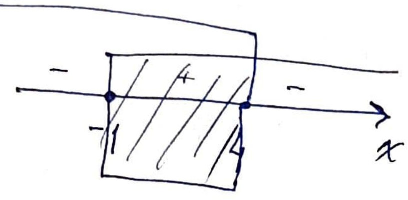
№2

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$\sqrt{4+3x-x^2}=\sqrt{(x+1)(4-x)}$$

ОДЗ: подкоренные выражения неотрицательны =>

$$\begin{cases} x+1\geqslant 0 \\ 4-x\geqslant 0 \\ (x+1)(4-x)\geqslant 0 \end{cases}$$



$x\in[-1;4]$

$\sqrt{x+1}+3=2\sqrt{(x+1)(4-x)}+\sqrt{4-x}$. ~~Во~~ Обе части неотрицательны. Возведём в квадрат.

$x+1+9+6\sqrt{x+1}=4(x+1)(4-x)+(4-x)+4\sqrt{(x+1)(4-x)}\cdot\sqrt{(4-x)}$

$x\in[-1;4]$, т.е. $4-x\geqslant 0$ можно объединить корень

$x+10+6\sqrt{x+1}=-4x^2+11x+20+4(4-x)\sqrt{x+1}\quad |:2$

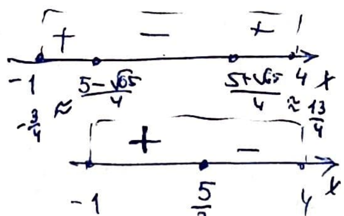
$2x^2-5x-5=(5-2x)\sqrt{x+1}$

; $\sqrt{x+1}\geqslant 0$ =>

$2x^2-5x-5$ и $5-2x$ должны быть 1 знака

$2x^2-5x-5\geqslant 0 \longrightarrow x=\frac{5+\sqrt{65}}{4}$, $x=\frac{5-\sqrt{65}}{4}$

$5-2x\geqslant 0 \longrightarrow x=\frac{5}{2}$



(1)

$\Rightarrow x\in\left[-1;\frac{5-\sqrt{65}}{4}\right]\vee\left[2,5;\frac{5+\sqrt{65}}{4}\right]$

Рассматриваем далее с этими значениями x

Обе части ур-я с 1 знаком => возведём в квадрат

$(2x^2-5x-5)^2=(5-2x)^2(x+1)$

$4x^4-24x^3+21x^2+45x=0$

$x(x-3)(4x^2-12x-15)=0$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \\ x=1,5+\sqrt{6} \\ x=1,5-\sqrt{6} \end{array}\right.$$

$x=0 \longrightarrow$ не входит в ~~нуж~~ диапазон (1)

$x=1,5+\sqrt{6} \longrightarrow$ не входит в диапазон (1), т.к. $2,5>\sqrt{6}>2 \Rightarrow 1,5+\sqrt{6}>3,5>\frac{5+\sqrt{65}}{4}$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1,5-\sqrt{6} \end{array}\right.$$

Ответ: $x=3$ или $x=1,5-\sqrt{6}$

Чистовик №4

№3

$x_a; y_a$ — координаты A; $x_B; y_B$ — координаты B.

Ур-е параболы:

$$ay = ax^2+4a^2x+4a^3+2; \quad |:a\neq 0$$

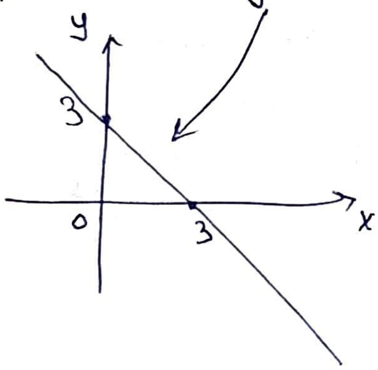
(если $a=0$, $2=0$, что не верно $\Rightarrow a\neq 0$)

$$y = x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$$

Вершина параболы (x^2+bx+c) имеет координаты $\left(-\frac{b}{2}; c-\frac{b^2}{4}\right) \Rightarrow$

$$x_B=-2a; \quad y_B = 4a^2+\frac{2}{a}-\frac{16a^2}{4}=\frac{2}{a}$$

Прямая $x+y=3$. Если A и B лежат по 1 сторону от этой прямой, то



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_a+y_a<3\\ x_B+y_B<3\end{cases}\\ \begin{cases}x_a+y_a>3\\ x_B+y_B>3\end{cases}\end{array}\right.$$

$\rightarrow$ потому, что $x+y=k$ — мн-во прямых, параллельных $x+y=3$. А через точку можно провести ровно 1 прямую $\parallel$ данной. И если провести такие прямые через A и через B, то они будут по 1 сто-рону от $x+y=3$, если k_a и k_b будут оба меньше или оба больше 3.

Координаты A удовл. ур-ю $2a^2-2ax_a-6ay_a+x_a^2+2x_ay_a+5y_a^2=0$:

$$x_a^2+x_a(2y_a-2a)+5y_a^2-6ay_a+2a^2=0$$

$$x_a=\frac{2a-2y_a\pm\sqrt{4(y_a-a)^2-4(5y_a^2-6ay_a+2a^2)}}{2}=a-y_a\pm\sqrt{y_a^2-2ay_a+a^2-}$$

$$\overline{-5y_a^2+6ay_a-2a^2}=a-y_a\pm\sqrt{-4y_a^2+4ay_a-a^2}=a-y_a\pm\sqrt{-(2y_a+a)^2}$$

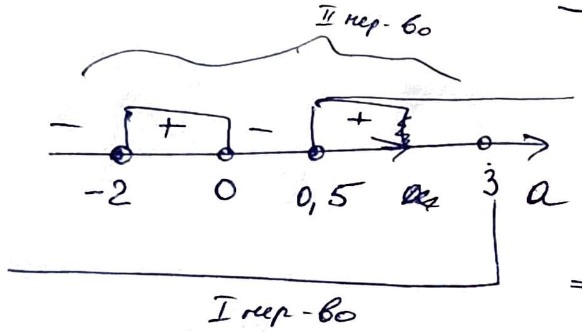
$(2y_a+a)^2\geq 0 \Rightarrow -(2y_a+a)^2\leq 0 \Rightarrow$ ур-е имеет корни только при $2y_a+a=0$; $\Rightarrow y_a=-\frac{a}{2} \Rightarrow x_a=a-y_a=a+\frac{a}{2}=\frac{3}{2}a$

Исследование №5

№3 (продолжение)

I система:

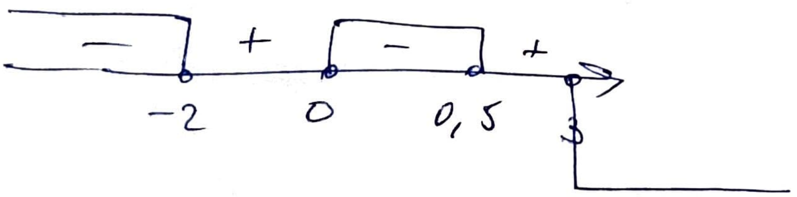
$$\begin{cases} \frac{3}{2}a - \frac{a}{2} < 3 \\ \frac{2}{a} - 2a < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 3 \\ \frac{2 - 2a^2 - 3a}{a} < 0 \quad |\cdot(-0{,}5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 3 \\ \frac{(a-0{,}5)(a+2)}{a} > 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow \quad a \in (-2;0) \vee (0{,}5;3)$

II система:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}a - \frac{a}{2} > 3 \\ \frac{2}{a} - 2a > 3 \end{cases} \quad \begin{cases} a > 3 \\ \frac{(a-0{,}5)(a+2)}{a} < 0 \end{cases}$$



система не имеет решений

$\Rightarrow$ совокупность имеет решение $a \in (-2;0) \vee (0{,}5;3)$

$\Rightarrow$ Ответ: $a \in (-2;0) \vee (0{,}5;3)$

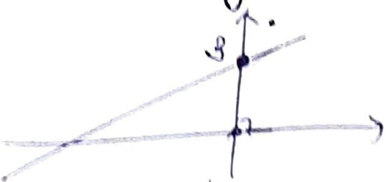
$x_a; y_a: \quad 2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$ Черновик №6

$x_b, y_b: \quad ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$

$x^2 + 4ax + 4a^2 + \frac{2}{a} = y$ $\quad c - \frac{b^2}{4a}$ $\quad \frac{-4a}{2} = -2a$

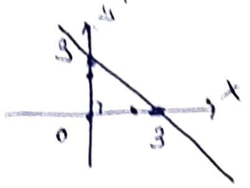
$x_B = \frac{-4a}{2} = -2a$ $\quad \frac{2}{a} - \frac{16a^2}{4a}$ $\quad 4a^2 - 8a^2 + 4a^2$

$y_B = 4a^2 - 8a^2 + 4a^2 + \frac{2}{a} = \frac{2}{a}$



$\frac{2}{}$ $\quad 4a^2 + \frac{2}{a} - 4a^2$

$-2+2$ $\quad 2-2$



$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_a + y_a < 3 \\ x_B + y_B < 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x_a + y_a > 3 \\ x_B + y_B > 3 \end{cases} \end{array}\right.$ $\quad \frac{2}{3} - 6$

$-\frac{2}{4} + 2 \cdot 4 > 3$

$\frac{2}{3} - 6 \not> 3$

$> \quad \frac{2}{a} - 2a < 3 \rightarrow \frac{2}{a} - 2a^2 - 3a > 0$ $\quad \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} =$

$2a^2 + 3a - 2 < 0$

>3 — -2 $\quad 0{,}5$

$\frac{2}{4} + \frac{3}{2} - 2$ $\quad \frac{2}{4} + \frac{3}{2} - 2$ $\quad = [0{,}5; -2$

<3 — -2 $\quad 0{,}5$ $\quad 8 - 6 - 2$

$x^2 - 2ax + a^2 +$

$+ 9y^2 - 6ay + a^2 - 4y^2 + 2xy = 0$

$(x-a)^2 + (3y-a)^2 +$

$+ 2y(-2y + x) = 0$

$x^2 + 2xy - 2ax + 2a^2 - 6ay + 5y^2 = 0$

$y^2 + a^2 - 2ay - 2a^2 + 6ay - 5y^2$

$= -4y^2 + 4ay - a^2$

Черновик №7

$5 -$ $25 + 4 \cdot \frac{25}{4} - 20 \cdot \frac{5}{4}$

$(x+1)(5-2x)^2 = (2x^2-5x-5)^2$ $4 \cdot 1 = (18-15-5)^2$

$1+2+3 \neq$

$(x+1)(25+4x^2-20x) = (4x^4+25x^2+25-20x^3-20x^2+30x)$ $\neq 2 \cdot 2$

4 $25+4\cdot 9-60=1$ $4 \cdot 3^4 + 25\cdot 3^2 + 25 - 20 \cdot 3^3$

$\cancel{4x^4 - 20x^3 + 25x^2 + 30x + 25} = 25x + 4x^3 - 20x^2 + 25 + 4x^2 - 20x$

$4x^4 - 24x^3 + 41x^2 + 25x = 0$

$\sqrt{2{,}5+\sqrt6} - \sqrt{2{,}5-\sqrt6} + 3 =$

$= \sqrt2$

$x(4x^3 - 24x^2 + 41x + 25) = 0$

$4\cdot3\cdot9 - 24\cdot9 + 41\cdot3 + 25$

$-12\cdot9 + 41\cdot3 + 25$

$x+1 = 4-x$

$x = 1{,}5$

$-36\cdot3$

$36\cdot9 - 60\cdot9 + 25\cdot9 + 90 + 25 = 99+25$

$5\cdot3$

$1-2+3=2$

$25\cdot3 + 4\cdot3\cdot9 - 20\cdot9 + 25 + 4\cdot9 - 20\cdot3 =$

16

$12 - 20 + 4 =$

$4 + 3\cdot\frac32 - \frac94$

$4 + \frac94 = \frac{25}{4} = \frac52$

$= 25 + 5\cdot3 - 4\cdot9 = 4$

40 15 36

$6.$

$4\cdot9 - 16\cdot3 + 5$

36 $30+18$

$4x^4 - 20x^3 + 5x^2 + 50x + \cancel{25} = 4x^3 - 16x^2 + 5x + \cancel{25}$

2

$4\cdot3^4 - 20\cdot3^3 + 5\cdot3^2 + 50\cdot3$

27

4

$-8\cdot3^3 + 5\cdot3^2 + 50\cdot3 = -19\cdot3^2 + 3\cdot50 = 3(50-30-27)$

$108 - 24\cdot9$

-21

$4x^4 - 24x^3 + 21x^2 + 45x = 0$

$108 - 216 + 36 + 45$

$180+36$

216

$x(4x^3 - 24x^2 + 21x + 45) = 0$

189 81

$-12\cdot9 + 21\cdot3 + 45$

$7\cdot9$

$-5.$

$x=3$

$$\begin{array}{l|l} 4x^3 - 24x^2 + 21x + 45 & x-3 \\ \underline{4x^3 - 12x^2} & \overline{4x^2 - 12x - 15} \\ \quad -12x^2 + 21x & \\ \quad \underline{-12x^2 + 36x} & \\ \quad\quad -15x + 45 & \\ \quad\quad \underline{-15x + 45} & \\ \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$144 + 240 = 384$

$12 = 2^2\cdot3$

$2^4\cdot3^2 + 2^4\cdot3\cdot5$

$2^4\cdot3(2^3 = 2^7\cdot3 = 2^6\cdot6$

$x(x-3)(4x^2-12x-15) = 0$

$x=0$

$x=3$

$3 > \sqrt6 > 2$

$2{,}5^2 = 6{,}25$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 + 16\cdot15}}{4\cdot2} = \frac{12 \pm 8\sqrt6}{8} = 1{,}5 \pm \sqrt6$ -

$-2 > -\sqrt6 > -3$

$2{,}5 > \sqrt6 > 2$

$x^2 - 3x - \frac{15}{4}$

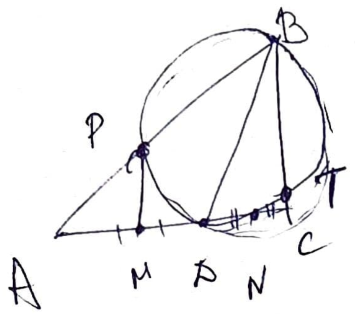
$4 > 1{,}5+\sqrt6 > 3{,}5$

$9 + 15 = 24 = 2^2\cdot6$

$-0{,}5 > 1{,}5-\sqrt6 > -1{,}5$

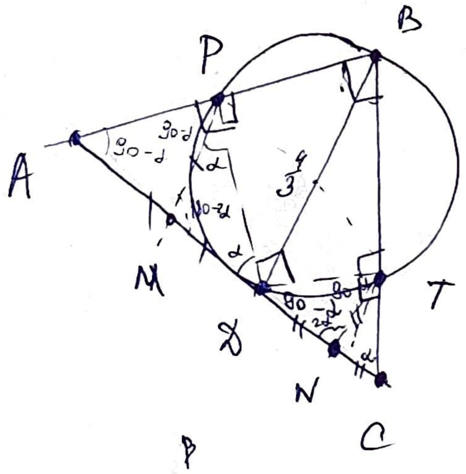
$\frac{3 + 2\sqrt6}{2}$

Черновик №8



$PM \parallel TN$

$\angle ABC - ?$



$\angle ABC = 90°$

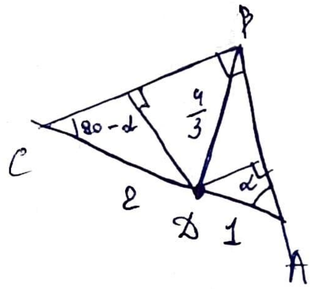
$+ MP = \frac{1}{2};\ NT = 1;\ BD = \frac{4}{3}$

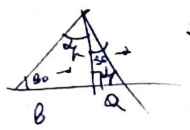
$S_{ABC} - ?$

$CD = 2;\ AD = 1;\ AC = 3$

$0{,}75 + 1{,}5 =$

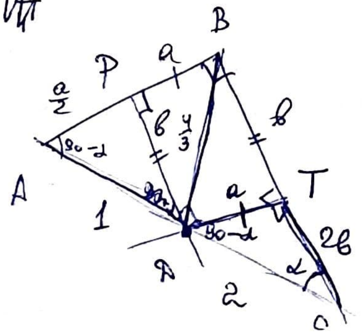
$\frac{9}{4} = 2{,}25$





$tg\, \alpha = \frac{b}{h} = \frac{h}{a}$

$h = \sqrt{ab}$



$a^2 + b^2 = \frac{16}{9}$

$b \cdot \frac{3}{4} a + a \cdot \frac{3}{2} b = ab \cdot 2{,}25 - ?$

$3b \cdot \frac{3}{2} a \cdot \frac{1}{2} = ab \cdot \frac{9}{4} = 2{,}25ab$

$\frac{a^2}{4} + b^2 = 1$

$\frac{3}{4} a^2 = \frac{7}{9}$

$a^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{3} =$

$a = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$

$b^2 = \frac{16}{9} - \frac{4}{9} \cdot \frac{7}{3} = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)$

$b = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$

$S = \frac{9}{4} \cdot ab = \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Черновик № 9

$-2x+3=0$

$x=\frac{3}{2}$

$y=4+\frac{9}{2}-\frac{9}{4}$

$=4+\frac{9}{4}=\frac{25}{4}$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$ $=2\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$x\geq -1$

$4-x\geq 0$ $x\leq 4$ ОДЗ: $x\in[-1;4]$

$4x-x^2+4-x$

$4+3x-x^2\geq 0$

$x^2-3x-4\leq 0$

$\cancel{x+1+4-x+9+6\sqrt{x+1}+}$

$-1;4$

$1-2+3=2\cdot 2$

$2{,}5=\frac{5}{2}\geq\sqrt{4+3x-x^2}\geq 0$

$\sqrt{5}\geq\sqrt{x+1}\geq 0$ $x\in[-1;4]$

$\sqrt{5}\geq\sqrt{4-x}\geq 0$ $x\in[-1;4]$

$0\geq-\sqrt{4-x}\geq-\sqrt{5}$

$5\geq$ ≥ 0

$x=3$

$\sqrt{5}\geq\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}\geq-\sqrt{5}$

$100+160=260$

$3+\sqrt{5}\geq$ $\geq 3-\sqrt{5}$ >0

$2+5-5$

$4x^2-10x-10$ $4x-10$

$32-20-5$ $25+40=65$ $=5\cdot 13$

$\sqrt{x+1}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}+\sqrt{4-x}$

$2-1+3=4$

$4+3\cdot 3-9$

$x+1+9+6\sqrt{x+1}=4(4+3x-x^2)+(4-x)+4\sqrt{(x+1)(4-x)}\cdot\sqrt{4-x}$

$x+10+6\sqrt{x+1}=16+12x-4x^2+4-x+4(4-x)\sqrt{x+1}$

$4x^2-10x-10=\sqrt{x+1}(-6+16-4x)=(10-4x)\sqrt{x+1}$

$2x^2-5x-5=(5-2x)\sqrt{x+1}$ V

$2x^2-5x-5\geq 0$

$2\cdot 9-5\cdot 3-5=(5-6)\cdot 2=-2$

-20

$x=\frac{5\pm\sqrt{65}}{4}\approx\frac{5\pm 8}{4}=\left[\begin{array}{l}\frac{13}{4}\\-\frac{3}{4}\end{array}\right.$

$2\cdot\frac{25}{4}-\frac{25}{2}-5$

$4\cdot 27-24\cdot 9+21\cdot 3+25$

$-12\cdot 9$ $9\cdot 7$

$+$ $-$ $+$

-1 $\approx-\frac{3}{4}$ $\approx\frac{13}{4}$ 4

$\frac{2x^2-5x-5}{5-2x}=\sqrt{x+1}$

$[-1;\approx-\frac{3}{4}]$ $2{,}5$ $3,$ $[2{,}5;\approx\frac{13}{4}]$ $-5\cdot 9$ $0,$

$3{,}25$

$(x+1)(25+4x^2-20x)=4x^4+25x^2+25+50x-20x^2-20x^3$

$25x+4x^3-\cancel{20x^2}+\cancel{25}+4x^2-\cancel{20x}=4x^4+20x^3-\cancel{20x^2}+25x^2+50x\cancel{+25}$

$4x^4-24x^3+21x^2+25x=0$

$x(4x^3-24x^2+21x+25)=0$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007571**

ID профиля: **195907**

Вариант 12

~~Черновик~~ Чистовик №1 Вариант №12

№4

$x^2+y^2\neq 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2+x^2y^2=\frac{9}{4} \end{cases} \ominus \quad (1)$$

$$2(x^2+y^2)^2-\frac{1}{x^2+y^2}=1 \quad \Big| \cdot (x^2+y^2)\neq 0$$

$$2(x^2+y^2)^3-(x^2+y^2)-1=0$$

Пусть $x^2+y^2=t$ $(t\geq 0)$, Тогда

т.к. квадраты всегда неотрицательны

$$2t^3-t-1=0$$

$$(t-1)(2t^2+2t+1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t-1=0 \\ 2t^2+2t+1=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t=1 \\ D<0 \Rightarrow \varnothing \end{array}\right. \Rightarrow$$ Вернемся к прежней переменной:

$(D=2^2-2\cdot 4=-4)$

$x^2+y^2=1 \Rightarrow$ у (1)

$$2\cdot 1^2+x^2\cdot y^2=\frac{9}{4}$$

$$x^2y^2=\frac{1}{4} \quad (2)$$

Т.к. $x^2=1-y^2$, во (2): $y^2(1-y^2)=\frac{1}{4}$; $y^4-y^2+\frac{1}{4}=0$; $\left(y^2-\frac{1}{2}\right)^2=0 \Rightarrow$

$y^2=\frac{1}{2}$ и соотв. $x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow$

$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$; $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Все возможные комбинации пары этих чисел дают ответ:

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Чистовик №2

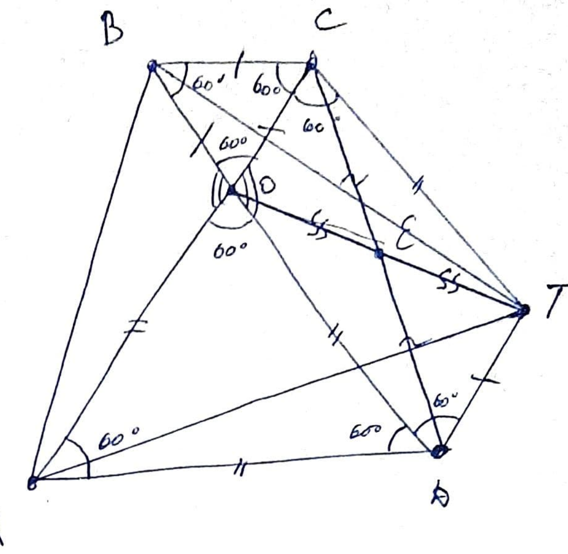
№6

Дано:
$ABCD$; $AC \cap BD = O$
$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ — правильное;
E — середина CD;
T симметрична O относ. E

а) ! $\triangle ABT$ — правильный

б) $BC = 2$; $AD = 4$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ — ?



Т.к. $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ — правильное, $BC = BO = OC$; $AO = OD = AD$; $\angle CBO = \angle BCO = \angle BOC = \angle AOD = \angle ODA = \angle DAO = 60°$. $\Rightarrow$ $\angle COD = \angle BOA = 120°$ как смежное с углом $\angle BOC = 60°$.

$OCTD$ — параллелограмм, т.к. диагонали делятся точкой пересечения пополам ($OE = ET$ в силу симметричности O и T относ. E, $CE = ED$, т.к. E — середина CD по условию) $\Rightarrow$

$OC \parallel DT$; $OD \parallel CT$; $OC = TD$; $OD = CT$.

$\Downarrow$

$\angle ODT = 180° - \angle DOC = 60°$; $\angle OCT = 180° - \angle DOC = 60°$ — односторонние углы

Значит $\angle ADT = \angle BCT = 120° = \angle AOB$; $AO = AD = CT$; $BO = DT = CB \Rightarrow$

$\triangle AOB = \triangle TCB = \triangle ADT$ по I признаку $\Rightarrow$ $AB = BT = AT \Rightarrow$

а) $\rightarrow$ $\triangle ABT$ — равносторонний.

(что говорит о том, что его углы по 60°)

б) Как показано выше + с учетом условий п.б

$BC = BO = OC = DT = 2$; $AD = AO = OD = CT = 4$.

По т. косинусов для $\triangle BCT$: $BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2 \cdot BC \cdot CT \cdot \cos\angle BCT = 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 20 + 8 = 28$

$S_{ABT} = \frac{AT \cdot BT \cdot \sin\angle BTA}{2} = \frac{BT^2 \cdot \sin 60°}{2} = 14 \sin 60°$

Чистовик №3

№6 (продолжение)

$S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{AOD} + S_{AOB} + S_{COD} = \frac{BC \cdot CO \cdot \sin\angle BCO}{2} + \frac{OD \cdot AO \cdot \sin\angle AOD}{2} +$

$+ \frac{OC \cdot OD \cdot \sin\angle COD}{2} + \frac{BO \cdot OA \cdot \sin\angle AOB}{2} = 2\sin 60^\circ + 8\sin 60^\circ + 4\sin 120^\circ +$

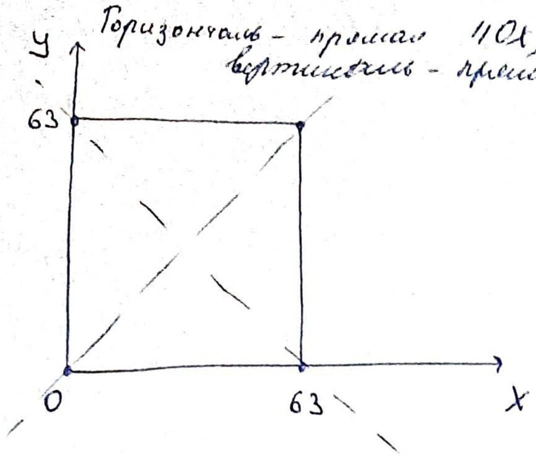
$+ 4\sin 120^\circ = 18\sin 60^\circ$ (т.к. согласно формулам приведения $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ$)

$\Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{14\sin 60^\circ}{18\sin 60^\circ} = \frac{7}{9}$

Ответ: б) $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$ $\left(\frac{7}{9}\right)$

Чистовик №4

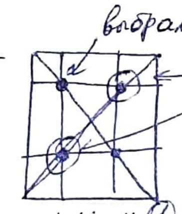
№ 5



Прямая однозначно задается 2 точками. Значит, т.к. $0=0$, $63=63$ точки $(0;0)$; $(63;63)$ лежат и задают прямую $x=y$ => ~~эта прямая~~ $0=63-63$ и $63=63-0$ — точки $(63;0)$ и $(0;63)$ лежат на прямой $y=63-x$ =>

$y=x$ и $y=63-x$ — диагонали квадрата.

Внутри квадрата (без включения границ) лежат точки 62 горизонтальных и 62 вертикальных целых прямых (проходящих по линиям сетки). => на диагоналях кв. по 62 целые точки (узла); в каждом ряду и столбце сетки внутри квадрата 62 узла. (т.к. $63 \not\vdots\, 2$, диагонали пересекаются не в узле)



Выбранные узлы могут:

① Оба быть на разных диагоналях.

Кол-во II-ух вариантов для узла на I диагонали – 62; а другого на II ~~сет~~ – $62-2=60$ (Выбираем 62 способами узел на 1 д. и 62−2 способами на второй д.)

↑ не можем ставить в ту же горизонталь и вертикаль.

Итого $62\cdot60$ вариантов

② Оба узла на 1 диагонали:

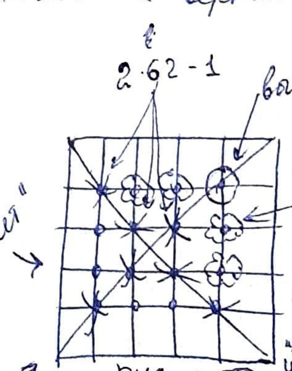
$$\frac{2\cdot62\cdot61}{2}=61\cdot62$$

кол-во способов выбрать I узел

кол-во способов выбрать II узел

2 одинаковых диагонали

каждую пару подсчитали дважды.



③ Один узел на диагонали, другой нет.

Кол-во способов выбрать узел на диагонали – $2\cdot62$.

Всего внутри квадрата 62^2 узла. 1 из них уже выбрали, еще $2\cdot62-1$ ост. узлы диагоналей и $2\cdot60$ – ост. узлы одной горизонтали и вертикали с выбранным узлом. (см. картинку)

Чистовик №5

№5 (продолжение)

Т.е. выбрать 2 узел можно $62^2-1-(2\cdot 62-1)-$
$-2\cdot 60=(62^2-2\cdot 62)-2\cdot 60=62\cdot 60-2\cdot 60=\cancel{(61+1)(61-1)-2\cdot 61}=$

$=\cancel{61^2-1}\ 60(62-2)=60^2$ способов

Т.е. можно выбрать из 60^2 узлов II узел $\Rightarrow 2\cdot 62\cdot 60^2$ вариантов для 3 случая

Больше способов взаимного расположения узлов нет, т.к. это были все возможности для хотя бы 1 узла на диагонали.

Итого: $62\cdot 60+61\cdot 62+2\cdot 62\cdot 60^2=62\cdot(60+61+2\cdot 60^2)=$
$=62(121+7200)=62\cdot 7321=453\,902$

$$\begin{array}{r} \times\ 7321 \\ 62 \\ \hline 14642 \\ 43926 \\ \hline 453902 \end{array}$$

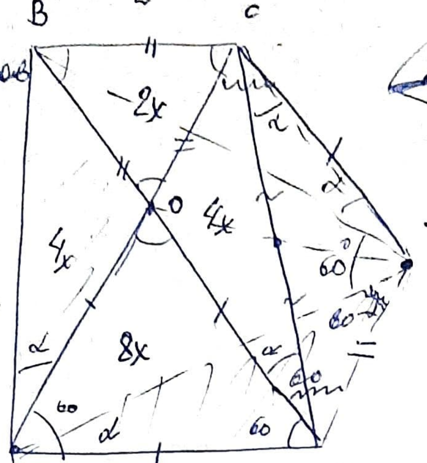
Ответ: 453 902 варианта

Черновик №6

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – прав.

Т есть. O относ. сер. CD; ! $\triangle ABT$ – правильный

! $\triangle ABT$ прав



$8+8+2$

$\frac{4}{18}=\frac{2}{9}$

$\frac{1}{8}S_0$

$\frac{2\cdot 4}{2}=4$

Если $BC=2$; $AD=4$

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?

$\frac{14}{18}=\frac{7}{9}$

$$S_{ABCD}=\frac{2^2\cdot\sin 60}{2}+\frac{4^2\cdot\sin 60}{2}+\left(\frac{2\cdot 4\cdot\sin 120}{2}\right)\cdot 2=$$

$$=\sin 60\,(2+8+8)=18\sin 60^\circ$$

$$S_{ABT}=\frac{BT^2\cdot\sin 60}{2}=14\sin 60^\circ$$

$$BT^2=2^2+4^2-2\cdot2\cdot4\cdot\cos 120^\circ=2^2+4^2+4^2\cos 60=4+16+8$$

$\cancel{BT=}AT$

решить №4

$$\begin{cases}\frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4}\\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4}\end{cases}$$

$x^2+y^2\neq 0$

$$1+x^4y^2+x^2y^4-\frac{5}{4}(x^2+y^2)=0$$

$$2x^4+5x^2y^2+2y^4-\frac{9}{4}=0$$

$$x^4y^2+x^2\left(y^4-\frac{5}{4}\right)+1-\frac{5}{4}y^2=0$$

$$x^2=\frac{-5y^2\pm\sqrt{25y^4-8\left(2y^4-\frac{9}{4}\right)}}{4}=\frac{-5y^2\pm\sqrt{9y^4+18}}{4}$$

$$\frac{1}{a+b}+ab=\frac{5}{4}$$

$$2a^2+2b^2+5ab=\frac{9}{4}$$

$$2(a+b)^2+ab=\frac{9}{4}$$

$$2(a+b)^2-\frac{1}{(a+b)}=1$$

$$2c^3-c+1=0$$

$c=1$

$c\neq 1$

$\boxed{x^2+y^2=1}$

$\boxed{x^2\cdot y^2=\frac{1}{4}}$

$$\begin{array}{l|l} 2c^3+0c^2-c-1 & c-1 \\ \hline 2c^3-2c^2 & 2c^2+2c+1 \\ 2c^2-c & \\ 2c^2-2c & \\ c-1 & \end{array}$$

$2c^3-\cancel{2c^2}+\cancel{2c^2}-2c-1+c$

$x^2=1-y^2$

$y^2(1-y^2)=\frac{1}{4}$

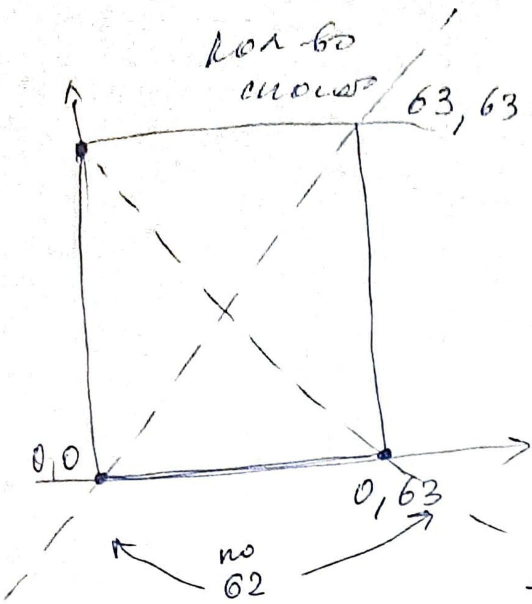
$y^4-y^2+\frac{1}{4}=0$

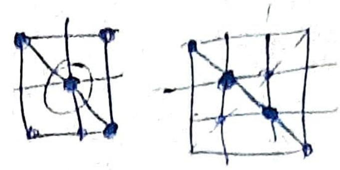
$y^2=\frac{1\pm\sqrt{1-1}}{2}=\frac{1}{2}$

$x^2=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$

Черновик № 7





① $g_1 + g_2 - (n-1)\cdot(n-3)$

② $g_1 + g_1 - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

③ $g_2 + g_2 - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$

④ $g_i +$ нег

$(n-1)$

$n-1$, $n-1$

$(n-1)^2$

$2(n-1)\cdot\left((n-1)^2 - (4n-8)\right)$

$-\left((n-1) + 2n-4\right) = -(3n-5)$

$(n-1)(n-3) + (n-1)(n-2) + 2(n-1)(n-3)^2$

$3\cdot 5 + 2\cdot 6 + 7 = 36$ $\quad 15,\ 12,\ 29$

$4\cdot 3 - 8$ $\quad 12,\ 4$

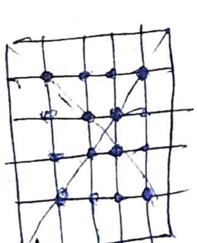
$(n-1)(n-3) + (n-1)(n-2) + 2(n-1)\left((n-1)^2 - (4n-8)\right)$

③ $2\cdot 0 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2\left(2^2 - (8-5)\right) = 2$ $\quad 0,\ 4$

$62 \cdot 62 = 124,\ 372,\ 3844$; $\ 244$

$61 \cdot 4 = 244$

$61^2 + 2\cdot 61 + 1 -$ $\quad 6$



⑤ $4\cdot 2 + 4\cdot 3 + 2\cdot 4\left(4^2 - (15-5)\right) =$ $\quad 8,\ 8,\ 10,\ 6,\ 3600$

$= 8 + 12 + 48 = 68$

$9 + 8 + 7 + 6 + 7 + 6 + 5 + 4 = 20 + 32$ $\quad 14,\ 17,\ 20,\ 15,\ 9,\ 18$

$\boxed{n = 63}$

$62\cdot 60 + 62\cdot 61 + 2\cdot 62\left(62^2 - 4\cdot 61\right)$

$62\cdot 121 + 2\cdot 62\left(62^2 - 4\cdot 61\right) = 62\cdot(121 + 2\cdot 60^2)$

7200

$62 \cdot 7321$

$2 + 2 + 2 + 2 + 12 = 20$

$(n-1)^2 - 4n + 8$

$16 - 20 + 8 = 4 \quad 4\cdot 8$

2 диаг.

$(n-1)^2 - 2(n-1) - (n-3) - (n-3)$

$(n-1)^2 - 3n + 1 - 1 + 3 + 3$

$4\cdot 63 - 2 - 4$ $\quad -6$

$16 - 15 + 6$

$2(n-1) + 2(n-2)$ $\quad (n-1)^2 - 3n + 6$

$2\cdot 62 + 2\cdot 61$

$4\cdot 63 - 8$