Часть 1

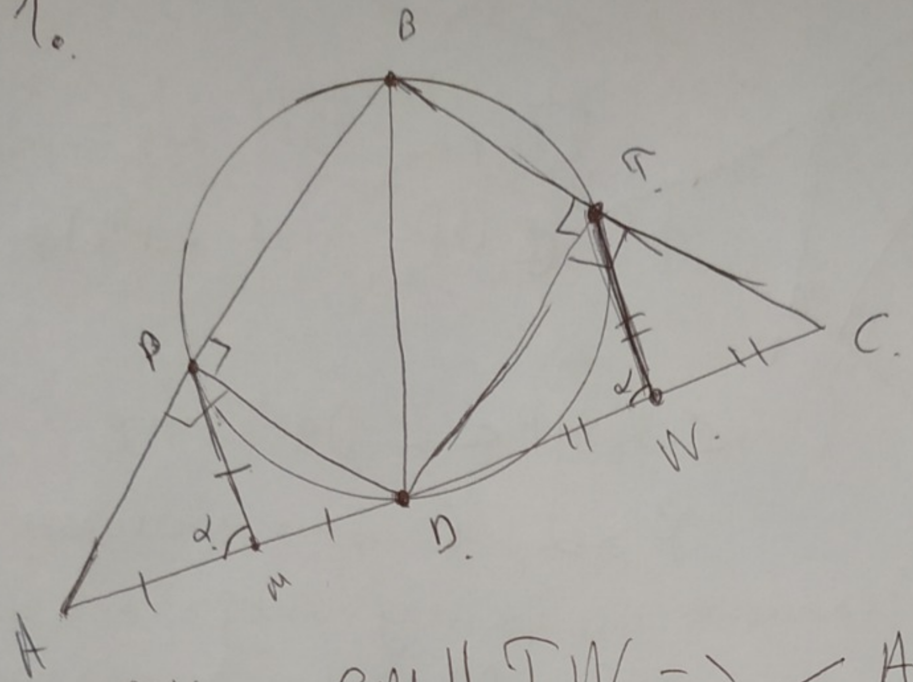
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007494**

ID профиля: **803633**

Вариант 12

1.



Т.к. $PM \parallel TW \Rightarrow \angle AMP = \angle DWT = \alpha$ как соответствующие углы.

$\angle DPB = \angle DTB = 90$, как опирающие на диаметр углы. $\Rightarrow \triangle APD$ и $\triangle DTC$ — прямоугольные

следует, что $AM = PM = MD$ и $DW = WT = WC$

Выразим углы $\angle PAM$ и $\angle TCD$ через α.

$\angle PAM = 90 - \frac{\alpha}{2}$

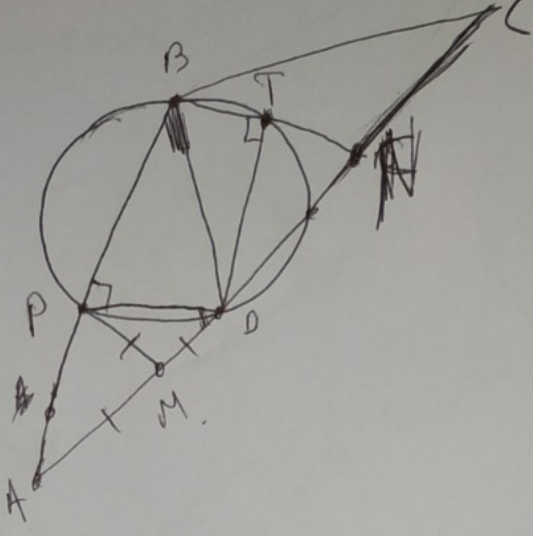
$\angle TCD = \frac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow$ $\angle PAM + \angle TCD = 90 \Rightarrow$

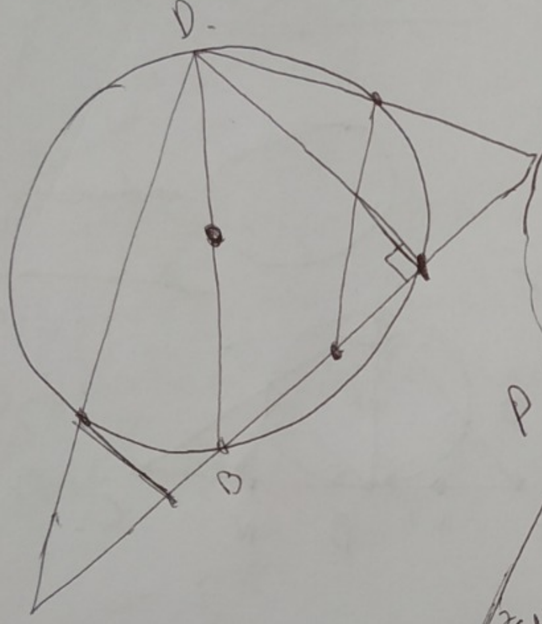
$\boxed{\angle ABC = 90^\circ}$

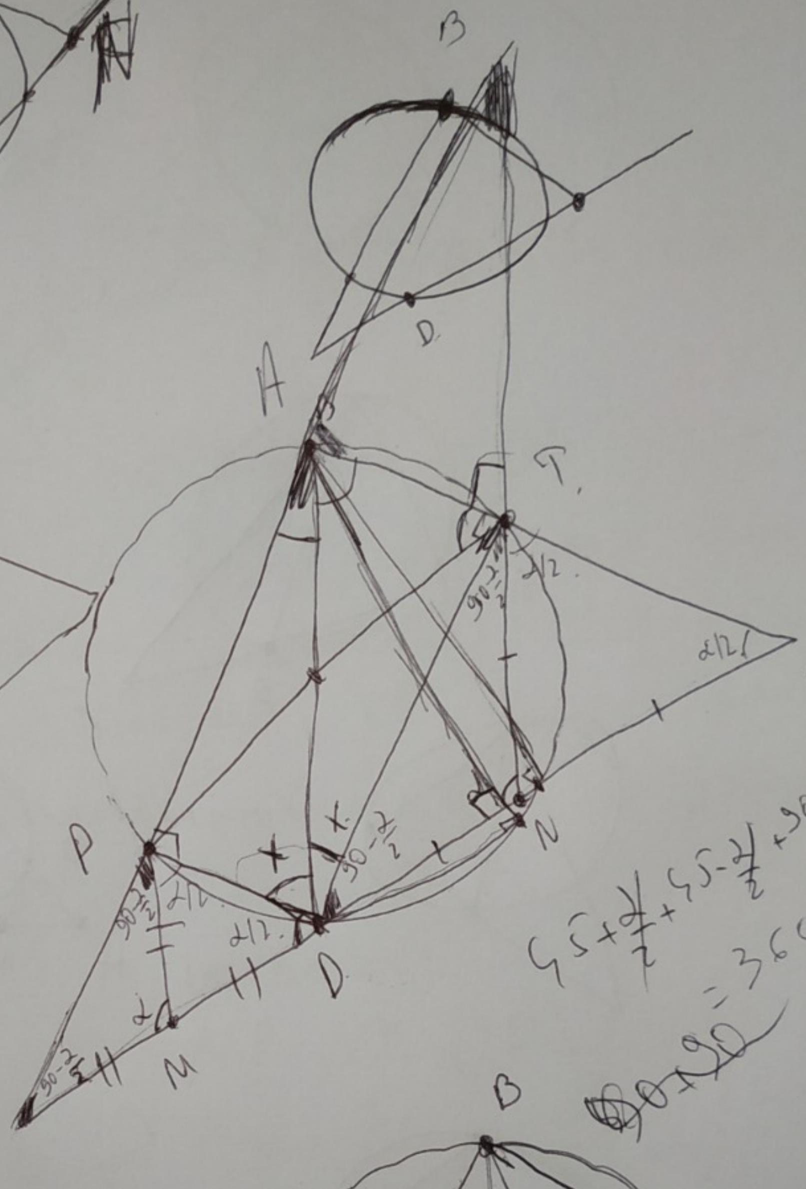
Чистовик.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2a < 3 \\ \frac{2}{a} < 3 \\ x_A < 3 \\ y_A < 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a > \frac{3}{2} \\ \frac{2}{a} < 3. \\ x_A < 3 \\ y_A < 3. \end{cases} \\ \\ \begin{cases} -2a > 3 \\ \frac{2}{a} > 3 \\ x_A > 3 \\ y_A > 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a < \frac{3}{2} \\ \frac{2}{a} > 3. \\ x_A + y_A > 6. \end{cases} \end{array}\right.$$

чистовик.







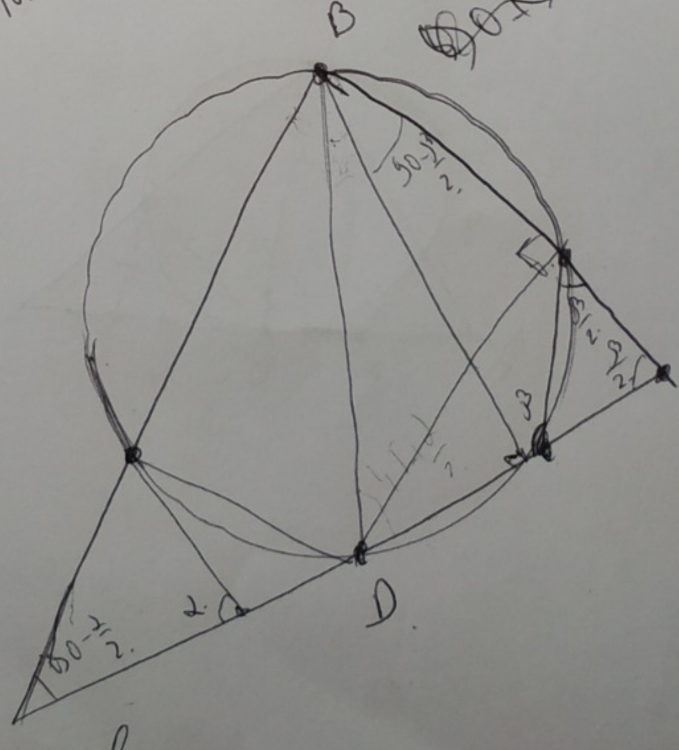
$45+\frac{\alpha}{2}+45-\frac{\alpha}{2}+90-\frac{\beta}{2}+90-\frac{\beta}{2}+90$

$=360.$

$\cancel{90=90}$

$\cancel{x=3}$

$x=\frac{3}{2}-\sqrt{6}.$



черновик

3. Найдем вершину параболы.

$$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$$

$$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$$

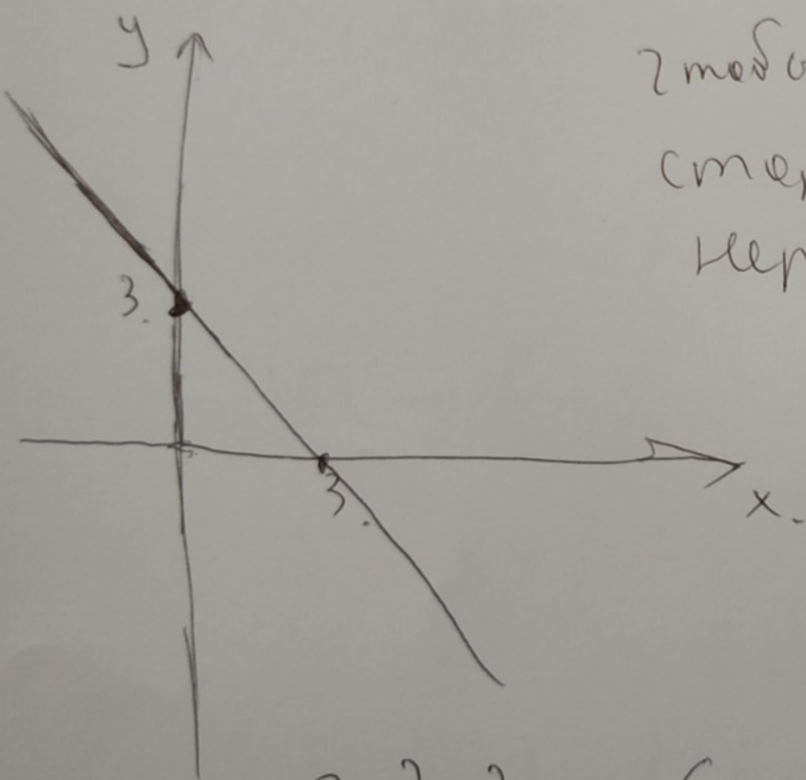
$$y'=2x+4a$$

$$y'=0$$

$$x_B=-2a$$

$$y_B=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$$

Нарисуем прямую $y=3-x$.



Чтобы точки были по одну сторону нужно чтобы выполнялось неравенство.

$$\begin{cases} x_A<3 \\ y_A<3 \\ x_B<3 \\ y_B<3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_A>3 \\ y_A>3 \\ x_B>3 \\ y_B>3 \end{cases}$$

$$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+4y^2+y^2=0$$

$$\cancel{(x^2+(2y)^2)} \quad (x+2y)^2+y^2-2xy+2a^2-2ax-6ay=0$$

чистовик.

$$\sqrt{x+1} = \frac{1}{1-\sqrt{4-x}}$$

$$x+1 = \frac{1}{1+4-x-2\sqrt{4-x}}$$

$$3 = a^2+b^2-2.$$

$$a+a^2+b^2-2-b-2ab=0.$$

$$a^2+b^2-2ab+a-2-b=0.$$

$$(a-b)^2+a-b=2.$$

$$(a-b)(a-b+1)=2.$$

$$a-b+3=2ab.$$

$$\cancel{a\,1b} \quad a+3=2ab+b.$$

$$a^2+9+6a=4a^2b^2+b^2+4b^2a.$$

черновик

2. $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$.

Для начала разложим $4+3x-x^2$ на множи[illegible]

корень $x_1=-1$ легко находится, а второй корень найдем из т. Виета. $x_2=4$. $\Rightarrow$

$$4+3x-x^2=(4-x)(x+1).$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}.$$

легко увидеть замену.

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}=a. & (1)\\ \sqrt{4-x}=b. & (2)\\ a-b+3=2ab. & (3)\end{cases}$$

$3=a^2+b^2-2.$

$\Rightarrow 9=3a^2+3b^2-6.$

Возведем (3) в квадрат.

~~[illegible] $=4a^2b^2+b^2+4b^2a$.~~

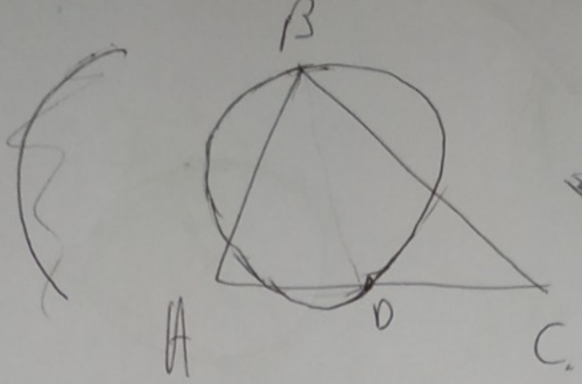
$$a^2+b^2-2ab=4a^2b^2+9-12ab.$$

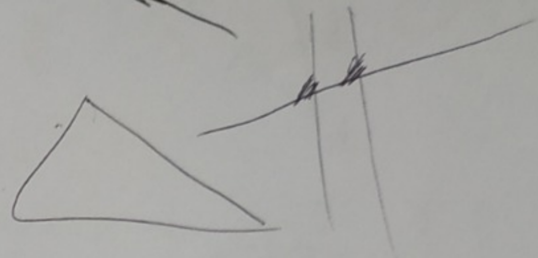
$$a^2+b^2-4a^2b^2=9-10ab.$$

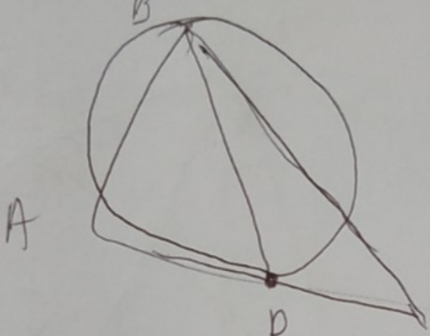
~~[illegible]~~

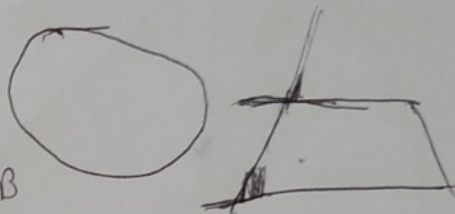
чистовик

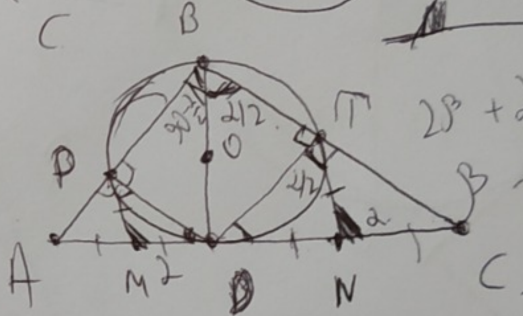
211007494 (U803633 M1276226)





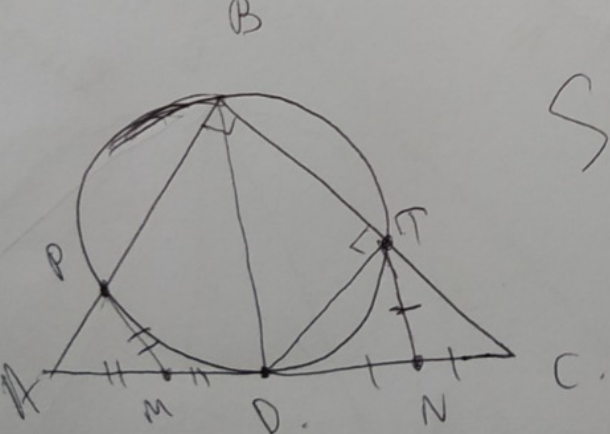




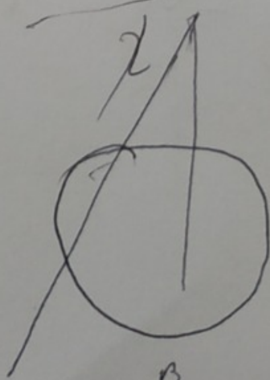


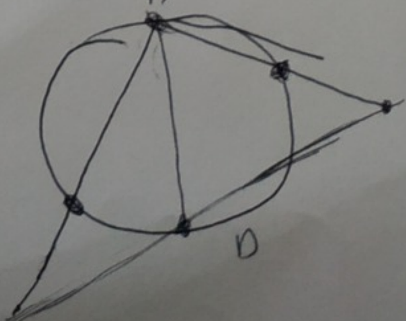
$2\beta + \alpha = 180$

$\beta = 90 - \frac{\alpha}{2}$



$S = \frac{(1+2)\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{3}}{\cancel{2}} = 2.$





Черновик.

$a^2+b^2-4a^2b^2=3a^2+3b^2-6-10ab.$

$6+\cancel{a}10ab=2a^2+2b^2+4a^2b^2.$

$3+5ab=a^2+b^2+2a^2b^2.$

$\cancel{a^2+b^2}\ 2+5ab=\cancel{a^2+b^2}+2a^2b^2.$

$2a^2b^2-5ab+2=0.$

$a\cdot b=t.$

$2t^2-5t+2=0.$

$\cancel{t_1=\frac{5+\sqrt{25-16}}{4}=2}$

$\cancel{t_2=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}}$

$\begin{cases} t_1=2. \\ t_2=\frac{1}{2}. \end{cases}$

$\begin{cases} \sqrt{(x+1)(4-x)}=2. \\ \sqrt{(x+1)(4-x)}=\frac{1}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3. \\ x=0 \text{ — не уд} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2}-\sqrt{6}. \\ x=\frac{3}{2}+\sqrt{6} \text{ — не уд} \end{array}\right. \end{cases}$

Убедимся что это выполнет ОДЗ. подстановкой.

$4-(\frac{3}{2}-\sqrt{6})>0.$

$4+\sqrt{6}-\frac{3}{2}>0.$ — правильно.

$\boxed{\text{Ответ: } x=3,\ x=\frac{3}{2}-\sqrt{6}.}$

2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$4+3x-x^2=0$

$x^2-3x-4=0$

$x=-1$

$x=4$

$(-x+4)(x+1)$

$\cancel{4x+4-x^2-x}$

$\sqrt{(x+1)} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{(4-x)(x+1)}$

$a - b + 3 = 2a \cdot b$

$a - b + 3 = 2ab$ $\qquad 3 = a^2 + b^2 - 2$

$a + 3 = 2ab + b$

$a - b + 3 - 2ab = 0$

$a - \cancel{b} + a + \cancel{b} - 2 - 2ab = 0$

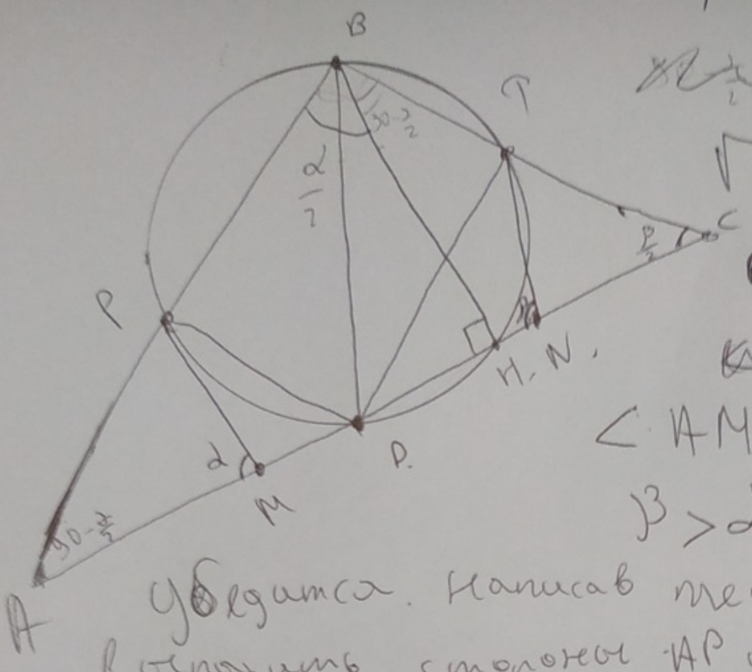
$2a - 2 - 2ab = 0$

$a - ab - 1 = 0$

$a(1-b) = 1$

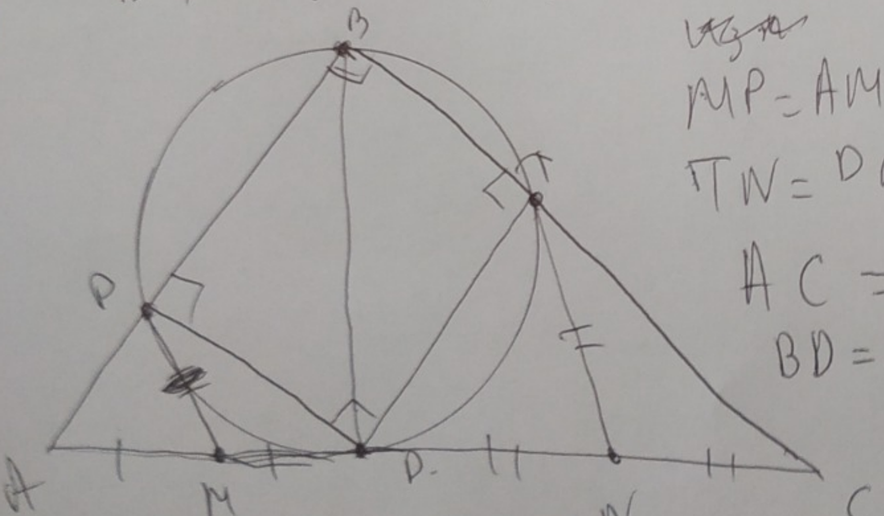
черновик

Проводем высоту BH



Пока BH не совпадает
с BD угл ∠DNT

$\angle AMP < \angle DNT$ т.е.
$\beta > \alpha$, в этом можно
убедится. написав теорему пифагора и
выразить стороны AP и DT через стороны.
значит параллельность будет пр. услови, что
$T.H = T.D$.



$MP = AM = MD = \frac{1}{2}$
$TN = DN = NC = 1.$ $\Rightarrow$
$AC = 3$
$BD = \frac{4}{3}$ $\Rightarrow$ $\boxed{S = \frac{ah}{2} = 2}$

чистовик.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007494**

ID профиля: **803633**

Вариант 12

~~2.~~

$$x^2+y^2=1.$$

Возведьем в квадрат

$$\begin{cases} x^4+y^4+2x^2y^2=1. \quad (4) \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4} \quad (2). \end{cases}$$

$2\cdot(4)-(2).$

$$\begin{cases} x^2y^2=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4} \\ x^2+y^2=1. \end{cases} \quad \begin{cases} x^2=1-y^2 \\ (1-y^2)y^2=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$4y^2-4y^4-1=0.$$

$$4y^4-4y^2+1=0.$$

$$(2y^2-1)^2=0.$$

$$\left[2y^2=1.\right. \Rightarrow \begin{cases} y^2=\frac{1}{2} \\ x^2=1-y^2=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

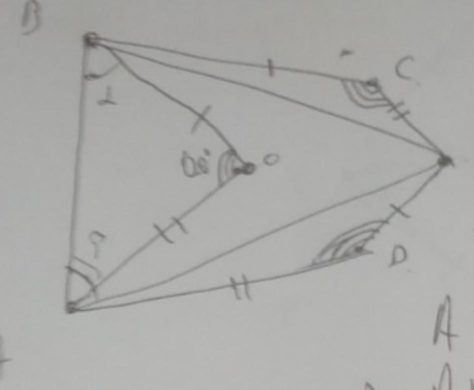
$$\boxed{\text{Ответ: } x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

чистовик

т.е. $CD = AB$, теперь проведем отрезки AT и BT

рассмотрим треугольники $\triangle AOB$, $\triangle ADT$, $\triangle BCT$

(хулаем картинку



$\angle BCT = \angle ADT = 60 + \alpha + \beta$, но

т.к. $\angle BOA = 120° \Rightarrow \alpha + \beta = 60 \Rightarrow$

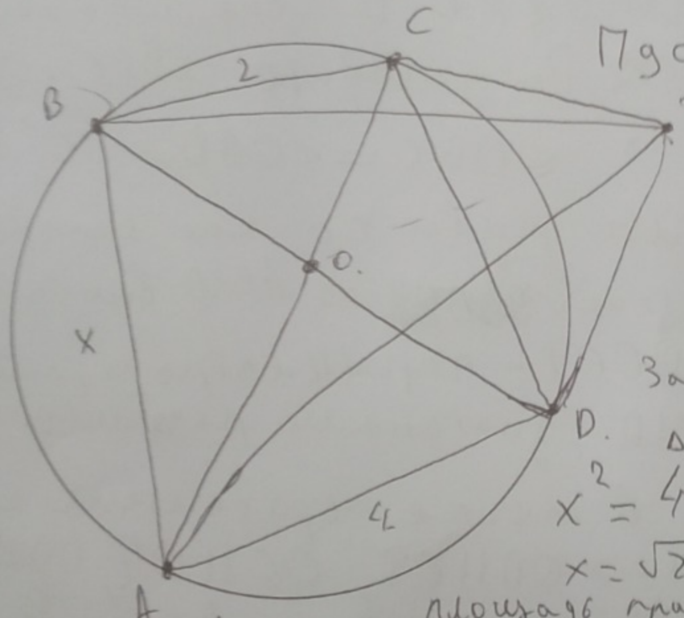
$\angle BCT = \angle ADT = \angle BOA = 120°$

но тогд $\triangle BCT = \triangle ADT = \triangle BOA \Rightarrow$

$AB = BT = TA \Rightarrow$ г.т.д.

$\triangle ABT$ правильный

б.



Пусть сторона $AB = x$

т.к. треугольники BOC и AOD правильные $\Rightarrow BO = 2$, $AO = 4$, $\angle BOA = 120°$

Запишем т. косинусов для $\triangle ABO$

$$x^2 = 4 + 16 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 = 28$$

$$x = \sqrt{28}$$

площадь правильног треугольника ABT будет равно

$$S_{ABT} = \frac{28}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = 14\sqrt{\frac{3}{2}}$$

а площадь четырехугольника будет суммой площадей

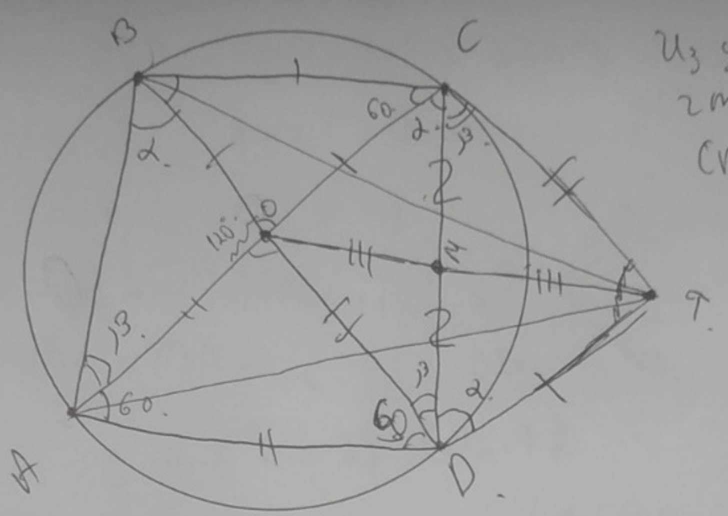
$$S_{ABCD} = S_{BOC} + S_{AOD} + S_{BOA} + S_{OCD} = 2\sqrt{\frac{3}{2}} + 8\sqrt{\frac{3}{2}} + 4\sqrt{\frac{3}{2}} + 4\sqrt{\frac{3}{2}} = 18\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$K = \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{\cancel{14}^{7}\sqrt{\frac{3}{2}}}{\cancel{18}_{9}\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{7}{9}$$

$\boxed{\text{Ответ: } k = \frac{7}{9}}$

чистовик.

6.



Из условия следует что OM медиана CM = MD, OM = MT.

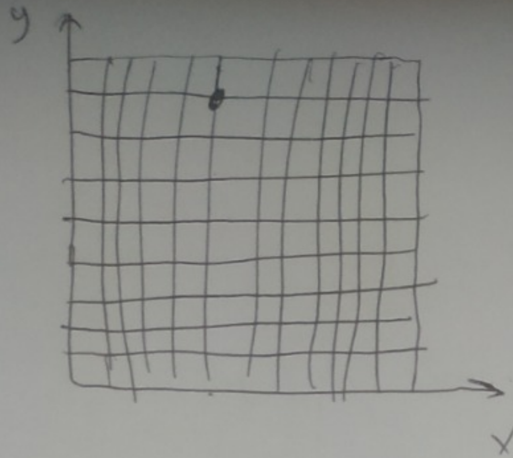
Докажем, что ABCD вписанный четырехугольник: По условию △BOC и △AOD правильные: => <OBC = <OAD = 60° =>. ~~Вписанные~~ углы равны т.е они опираются. На одну и ту же дугу ~~[illegible]~~ => ABCD вписанный:

четырехугольник DOCT – параллелограм, потому что OM = MT, CM = MD, диагонали разделились на два равных части в точке пересечения => параллелограм => OD || CT, OC || DT, OD = CT, OC = DT. Обозначим угол <ABO за α, а <BAD = β, тогда

<BAD = <ODC = <DCT = β.
<ABO = <OCD = <CDT = α. | => <BOA = <CTD = 120°.

Получаем, что △DTC = △AOB | по двум сторонам и углу между ними

Чистовик



Количество всех ~~точек~~ узлов ~~к~~ будет посчитан таким образом. $64 \cdot 64 - 4 = 4(64 \cdot 16 - 1)$

Количество ~~узлов~~ находящихся на $y=x$ будет $\underline{63}$

соотве

чистовик.

Математика 10.

1. $$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} & (1) \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} & (2). \end{cases}$$

(2) − (1).

$$2x^4+2y^4+4x^2y^2 = 1+\frac{1}{x^2+y^2}$$

$$2(x^2+y^2)^2 = 1+\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Замена: $x^2+y^2=t$.

$$2t^2 = 1+\frac{1}{t}.$$

$$2t^3-t-1=0.$$

$t=1$; очевидный корень, разложим на множители

$$(t-1)(2t^2+2t+1)=0.$$

$$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ 2t^2+2t+1=0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t\in\varnothing : D<0. \text{ (дискриминант } <0). \end{array}\right.$$

чистовик.

$x^2y^2=\frac{1}{4}$

$x^2+y^2=1$

$x^2=1-y^2$

$(1-y^2)(y^2)=\frac{1}{4}$

$4y^2-4y^4=1$

$4y^4-4y^2+1=0$

$y^4-y^2+\frac{1}{4}=0$

$\left(y^2-\frac{1}{2}\right)^2$

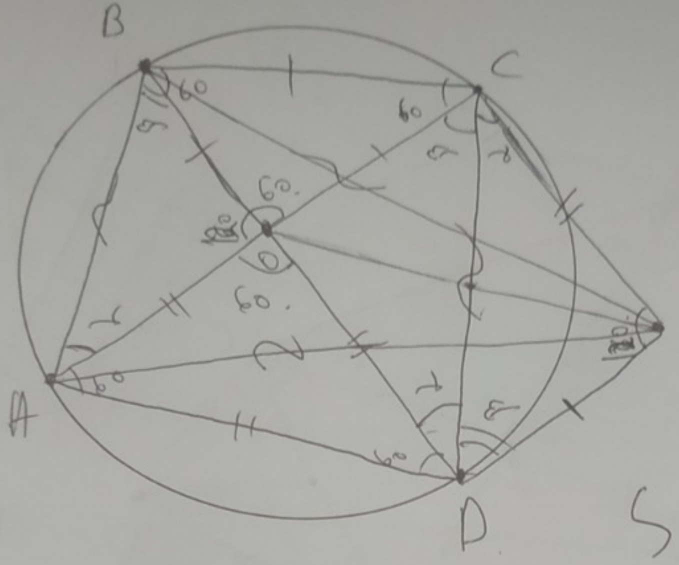
$y^2=\frac{1}{2}$

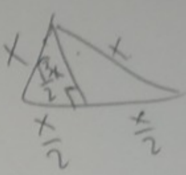
$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x^2=\frac{1}{2}$

$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Черновик

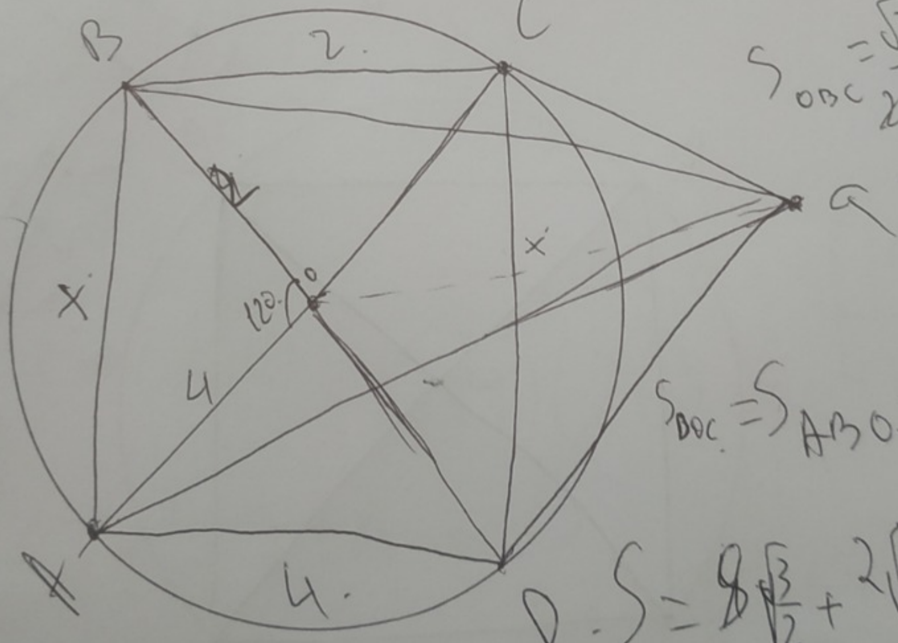




$x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}$

S.

$S_{ABT} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{2\sqrt{2}}$



$S_{OBC} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot 4 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$S_{AOD} = \frac{16}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

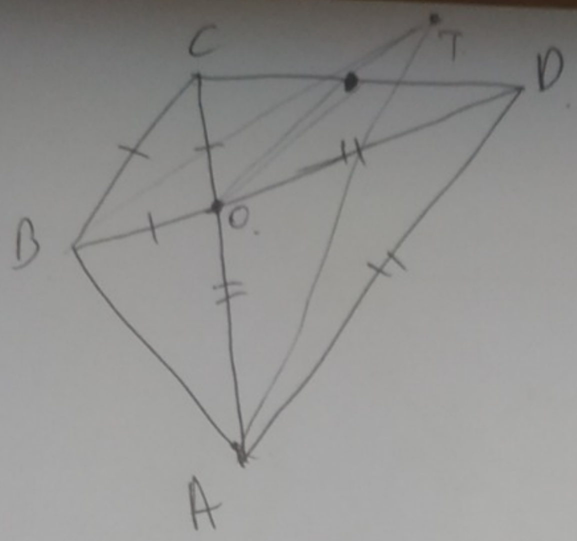
$S_{DOC} = S_{ABO} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

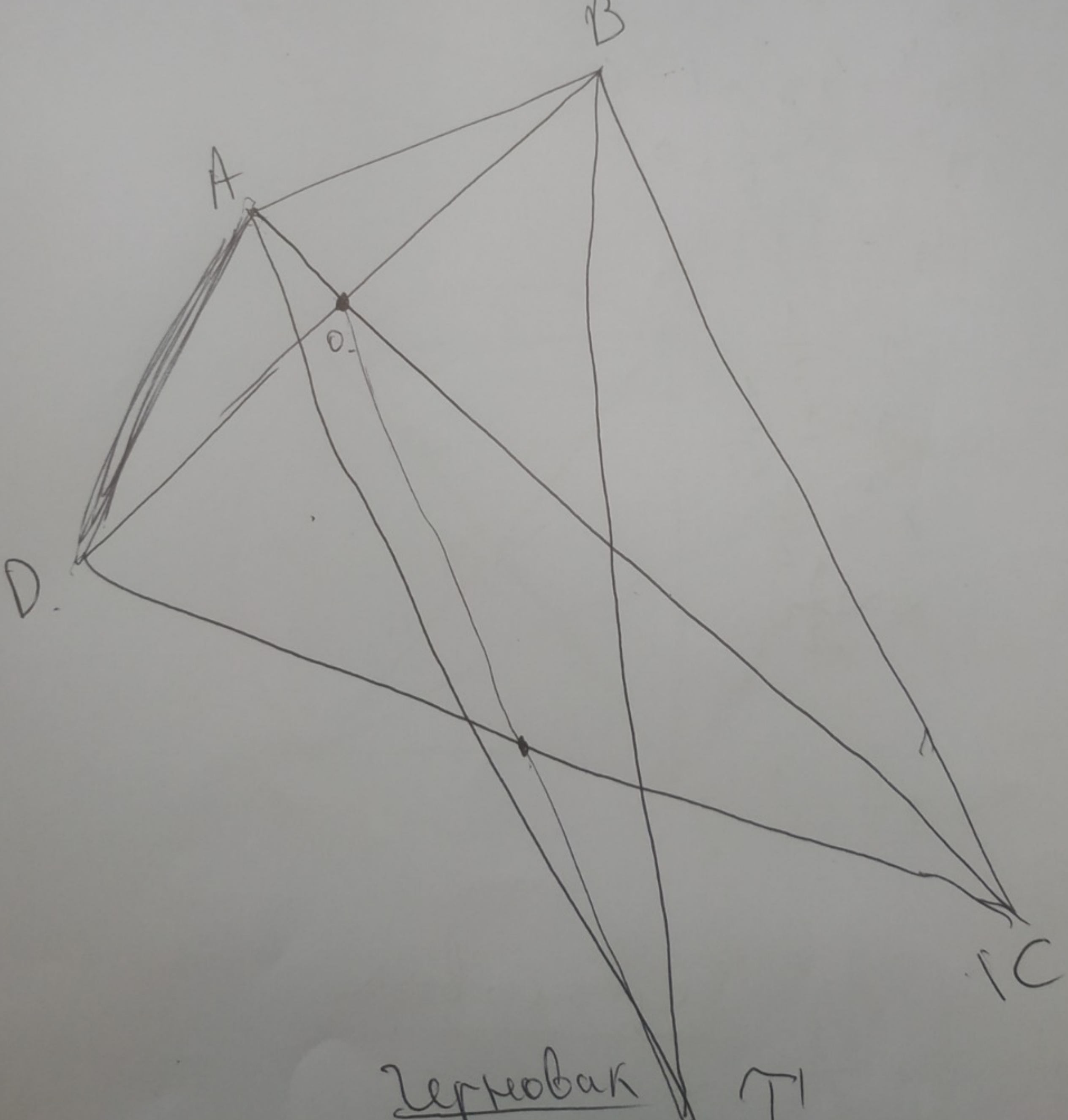
$S = 8\sqrt{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{\frac{3}{2}} + 8\sqrt{\frac{3}{2}} = 18\sqrt{\frac{3}{2}}$

$x = 16 + 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = 28$

$\frac{7 \cdot 28}{9}$

чорновик $\frac{S_{ABT}}{S} = \frac{\frac{28^2}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}}{18\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{28^2}{36} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 28}{4 \cdot 9}$





Черновак

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^4 + 2y^4 + 4x^2y^2 = 1 - \frac{1}{x^2+y^2} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$(x^2+y^2)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right)$$

$$t^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t}\right)$$

$$2t^2 = 1 + \frac{1}{t}$$

$$2t^3 - t - 1 = 0$$

$$t = +1$$

$2t^3 - t + 1 \,|\, t+1$

$(t-1)(2t^2+2t-1)$

$$(t+1)(2t^2 - 2t + 1) = 0$$

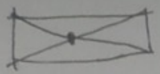
$2t^3 - 2t^2 + t + 2t^2 - 2t + 1$

$$2t^2 - 2t + 1 = 0$$

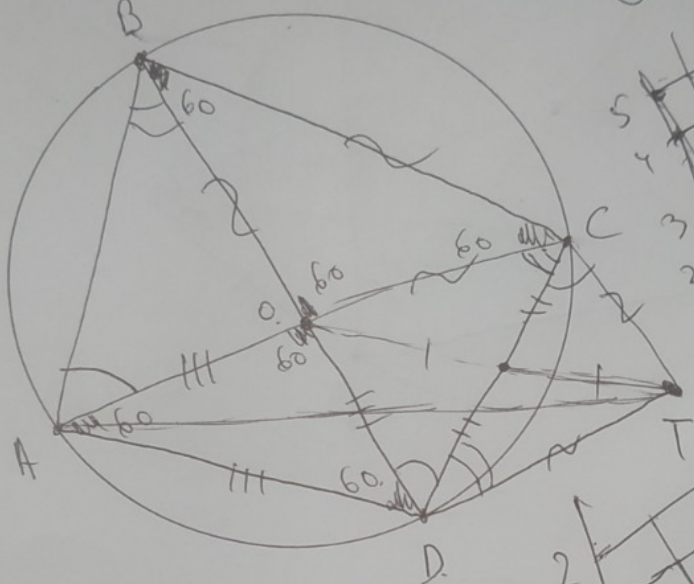
$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4}}{4}$$

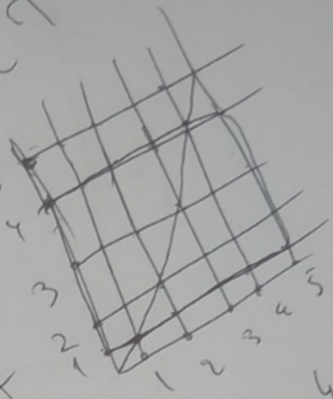
$x^2 + y^2 = 1$

Черновик

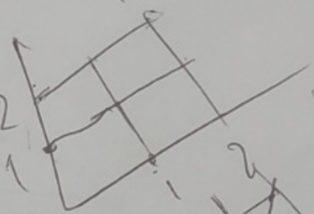


DT = BO
CT = AO.

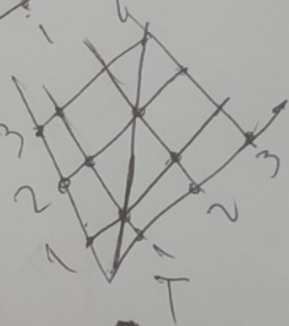


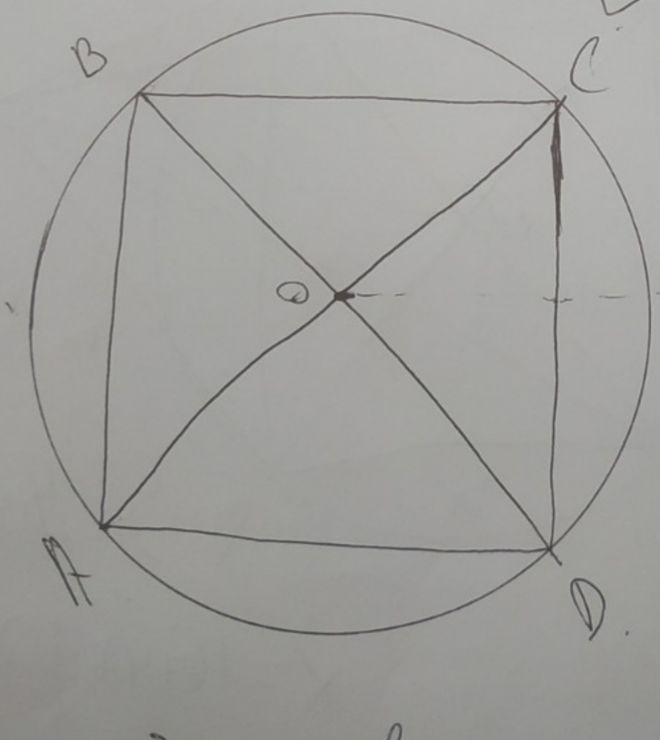


$64 \cdot 4 - 4 = 4 \cdot 63$



4·3−4.





Черновик.

$(t-1)(2t^2+2t+1) = 2t^3-2t^2+2t^2-2t+t-1$

$= 2t^3-t-1=0.$

$(t-1)(2t^2+2t+1)=0.$

$t=-2\pm\sqrt{}$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\dfrac{5}{4}. & (1). \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\dfrac{9}{4}. & (2) \end{cases}$$

$(2)-(1)$

$2x^4+2y^4+4x^2y^2=1+\dfrac{1}{x^2+y^2}.$

$(\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}y^2)^2=1+\dfrac{1}{x^2+y^2}$

$2t^2=1+\dfrac{1}{t}.$

$2t^3-t-1=0.$

$x^2=1-y^2.$

$(1-y^2)(y^2)=\dfrac{1}{4}.$ $4y^2-4y^4=1$

$y^2-y^4=\dfrac{1}{4}$

$x^2+y^2=1.$

$2x^4+2y^4+\cancel{4}x^2y^2=2.$

$2x^4+2y^4+5x^2y^2=\dfrac{9}{4}.$

$x^2y^2=\dfrac{9}{4}-2.=\dfrac{1}{4}.$

$xy=\pm\dfrac{1}{2}.$

черновик