Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007477**

ID профиля: **373168**

Вариант 12

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$x^2+x(2y-2a)+5y^2-6ay+2a^2=0$

$D=4y^2-8ay+4a^2-20y^2+24ay-8a^2=$

$=-16y^2+16ay-4a^2=$

$=-(4y-2a)^2=0$

$\boxed{2y=a,\ x=0,5a}$

$ay=ax^2+4a^2x+4a^3+2$

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

$(x+2a)^2+\frac{2}{a}$

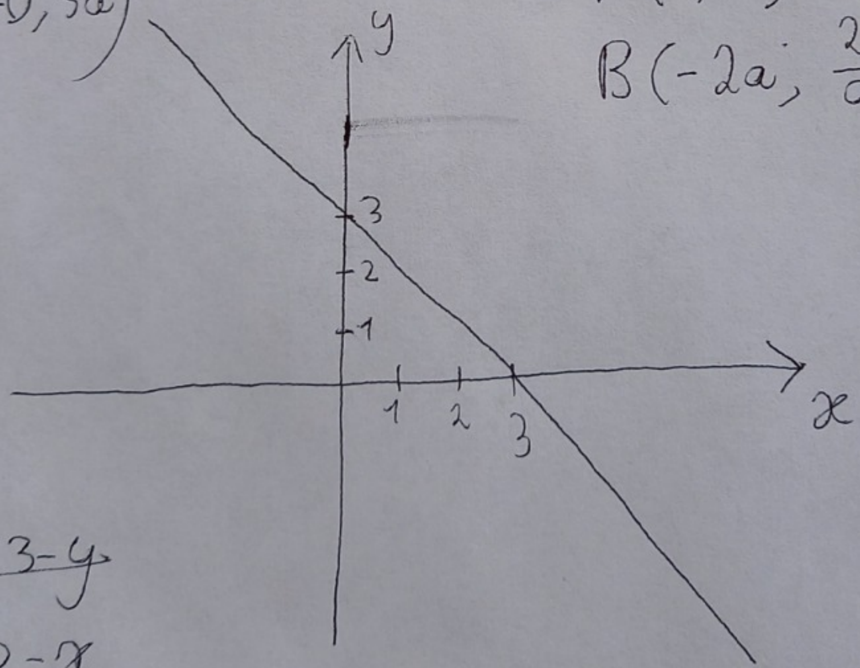
$2a^2-2ax-3a^2+x^2+ax+5\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2=$

$=x^2-ax+0,25a^2=$

$=(x-0,5a)^2$

$A(0,5a;\ 0,5a)$

$B(-2a;\ \frac{2}{a})$



~~$x\leq 3-y$~~

$y\geq 3-x$

$\begin{cases}0,5a\geq 3-0,5a\\ \frac{2}{a}\geq 3+2a\end{cases}$ ~~$a\geq 3$~~

$0,5a\leq 3-0,5a,\ a\leq 3$

$\frac{2}{a}\leq 3+2a$

$\frac{-3\pm5}{4}=\left[\begin{array}{l}-2\\ \frac{1}{2}\end{array}\right.$

$+\quad -2\quad -\quad \frac{1}{2}\quad +$

$2a-\frac{2}{a}+3\geq 0$

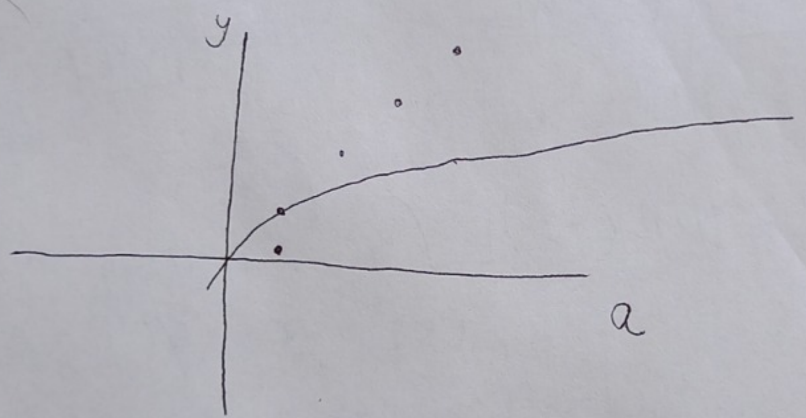
$2a^2+3a-2=0$

$D=9+16=5^2$

$$\frac{\sqrt{5-a}-3}{1-2\sqrt{5-a}} = \frac{x-3}{1-2x} = -\frac{1}{2} - \frac{\frac{5}{2}}{1-2x} =$$

$$-\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{1-2x}\right)$$

$$-\frac{1}{1-2x} \quad \frac{1}{2x-1}$$



$$y = \sqrt{a}$$

$$y = -\frac{1}{2} - \frac{\frac{5}{2}}{1-2\sqrt{5-a}} =$$

$$= \frac{\frac{5}{2}}{2\sqrt{5-a}-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2\sqrt{5-a}-1} - 1\right)$$

211007477 (U373168 M1277232)

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$x+1 \geq 0$

$4-x \geq 0$

$x \leq 4$

$x \geq -1$

$x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$

$4-x = a$

$x+1 = b$

$\sqrt{b} - \sqrt{a} + 3 = 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - a - b$

~~$b + a - 2\sqrt{ab} = 4ab - 12\sqrt{ab} + 9$~~

~~$b + a + 10\sqrt{ab} - 4ab - 9 = 0$~~

~~$v + 10t - 4t^2 - 9 = 0$~~

~~$4t^2 - 10t + 9 - v = 0$~~

$D = 100$

$x+1 = a$

$4-x = -x-1+5 = a+5$

$\sqrt{a} - \sqrt{\cancel{a+5}} + 3 = 2\sqrt{a(a+5)}$

$\sqrt{a} - \sqrt{5-a} + 3 = 2\sqrt{a(5-a)}$

$2\sqrt{ab} + \sqrt{a} - \sqrt{b} = 3$

$a - b + 3 = 2ab, \quad a \geq 0, b \geq 0$

$a(1-2b) = b - 3$

$\sqrt{a}(1 - 2\sqrt{b}) = \sqrt{b} - 3$

$a = \frac{b-3}{1-2b}$

$a(4b - 4\sqrt{b} + 1) = b - 6\sqrt{b} + 9$

$\sqrt{x+1} = \frac{\sqrt{4-x} - 3}{1 - 2\sqrt{4-x}}$

$(\sqrt{x+1})(1 - 2\sqrt{4-x}) = \sqrt{4-x} - 3$

$a - b + 3 = 2ab$

$[0;5]$ $[0;5]$

$(x+1)(4(4-x) - 4\sqrt{4-x} + 1) =$

$= 4 - x - 6\sqrt{4-x} + 9$

$5 \quad 2$

$5 - b = 4b$

$b = 1$

$a = 2$

$6 - b = 6b$

$b = \frac{6}{7}$

$x = 3$

$\sqrt{a}(1 - 2\sqrt{5-a}) = \sqrt{5-a} - 3$

$\sqrt{a} = \frac{\sqrt{5-a} - 3}{1 - 2\sqrt{5-a}}$

$-\frac{5}{2}$

$\cancel{a = 3}$

$\frac{x-3}{1-2x}$

$k + \frac{b}{1-2x}$

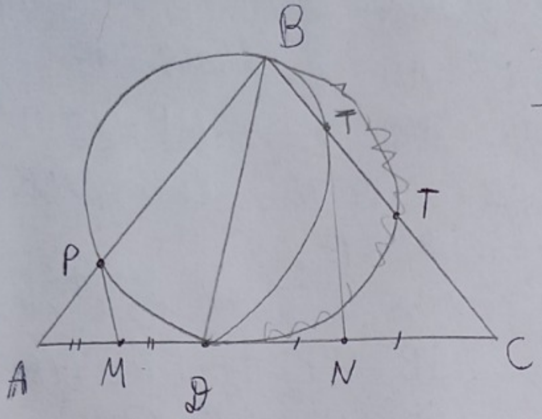
$\frac{k - 2kx + b}{}$

$k = -0{,}5$

$-\frac{1}{2} - \frac{\frac{5}{2}}{1-2x}$

$-\frac{1}{2} + \frac{b}{1-2x} = \frac{-\frac{1}{2} + x + b}{1-2x}$

$(c+b)(a+d)$



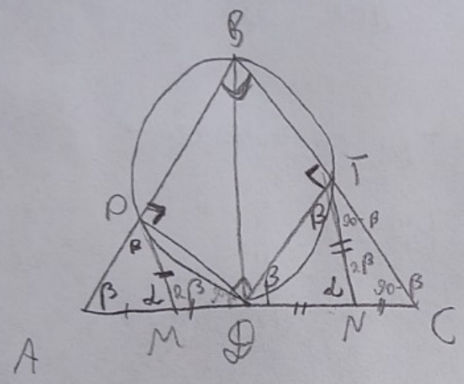
$$\frac{2\sqrt{29}+4}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{29}+8}{3\sqrt{5}} =$$

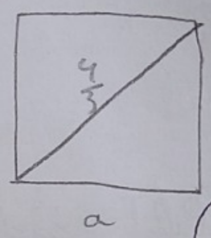
$a^2 = \frac{8}{9} =$

$$= \frac{\cancel{2\sqrt{2}}\ 358+16\sqrt{29}+4\sqrt{29}+32}{45}$$

$2a^2 = \frac{16}{9}$

$90+20\sqrt{29}$



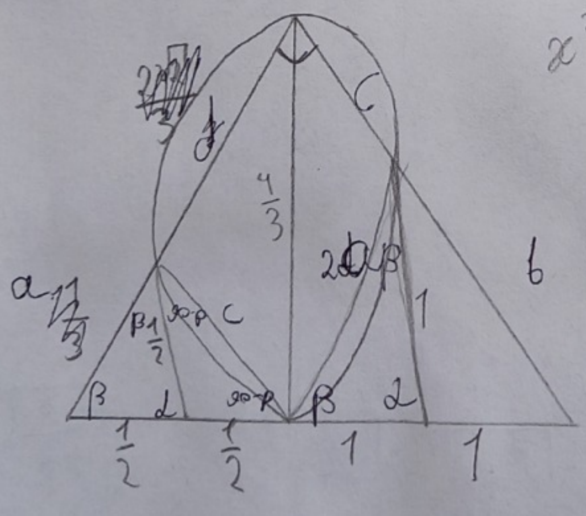


$$\frac{18+4\sqrt{29}}{9}$$

$$\frac{9+2\sqrt{29}}{9}$$

$\frac{8}{9} + x^2 = 4$

$x^2 = \frac{28}{9} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$



$$\begin{cases} a^2+c^2=1 \\ d^2+b^2=4 \\ c^2+d^2=\frac{16}{9} \\ d=2c \end{cases}$$

$c^2+4c^2 = \frac{16}{9}$

$5c^2 = \frac{16}{9}$

$c^2 = \frac{16}{45}$

$a^2+c^2=1$

$a^2 = \frac{29}{45}$

$c = \frac{4}{3\sqrt{5}}$

$a = \frac{\sqrt{29}}{3\sqrt{5}}$

$\frac{64}{45} + b^2 = \frac{180}{45}$

$b^2 = \frac{116}{45} = \frac{4\cdot 29}{5\cdot 9}$

$d = \frac{8}{3\sqrt{5}}$

$b = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{29}{5}}$

Чистовик, страница 3, задача 3.

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$x^2+x(2y-2a)+5y^2-6ay+2a^2=0$

$D=4y^2-8ay+4a^2-20y^2+24ay-8a^2=-16y^2+16ay-4a^2=$

$=-(4y-2a)^2\geqslant 0, \Rightarrow 4y=2a,\ y=0,5a$. Иначе

$D<0$.

$2a^2-2ax-3a^2+x^2+ax+5\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2=$

$=x^2-ax+0,25a^2=(x-0,5a)^2=0, \Rightarrow x=0,5a$

Координаты точки A: $A(0,5a;\ 0,5a)$

$ay=ax^2+4a^2x+4a^3+2$, $a\neq 0$ (иначе $2=0$, что невозможно)

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}=(x+2a)^2+\frac{2}{a}$

Координаты точки B: $B\left(-2a;\ \frac{2}{a}\right)$

Запишем условие нахождения точек с одной стороны от прямой:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0,5a\geqslant 3-0,5a\\ \frac{2}{a}\geqslant 3+2a\end{cases}\\ \begin{cases}0,5a\leqslant 3-0,5a\\ \frac{2}{a}\leqslant 3+2a\end{cases}\end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\geqslant 3\\ a\in\left[-2;\frac{1}{2}\right]\end{cases} \text{ - нет решений}\\ \begin{cases}a\leqslant 3\\ a\in(-\infty;-2]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)\end{cases}, \Rightarrow\end{array}\right.$$

$a\in(-\infty;-2]\cup\left[\frac{1}{2};3\right]$

Ответ: $\cancel{(-\infty;-2]\cup[\frac{1}{2};3]}$ ~~кроме точки 0~~.

$(-\infty;-2]\cup\left[\frac{1}{2};3\right]$, кроме точки 0 ($a\neq 0$)

211007477 (U373168 M1277232)

Чистовик, страница 2, задача 2

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$, $x+1\geq 0, \Rightarrow x\geq -1$

$4-x\geq 0, \Rightarrow x\leq 4$

$\sqrt{a}-\sqrt{5-a}+3=2\sqrt{a(5-a)}$

$\sqrt{a}(1-2\sqrt{5-a})=\sqrt{5-a}-3$

$$\sqrt{a}=\frac{\sqrt{5-a}-3}{1-2\sqrt{5-a}}=-\frac{1}{2}-\frac{\frac{5}{2}}{1-2\sqrt{5-a}}=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2\sqrt{5-a}-1}-1\right)$$

$\cancel{\sqrt{a}}$ $\begin{cases} y=\sqrt{a} \text{ - возрастающая} \\ y=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2\sqrt{5-a}-1}-1\right) \text{ - возрастающая, т.к} \end{cases}$

$\left(\frac{5}{2\sqrt{5-a}}\right)$ с увеличением a знаменатель уменьшается, т.е значение дроби увеличивается.

Отсюда система имеет только одно решение

$a=4$.

$x+1=4$

$x=3$

$\sqrt{3+1}-\sqrt{4-3}+3=2\sqrt{4+9-9}$

$4=4$ - корень подходит

Ответ: 3

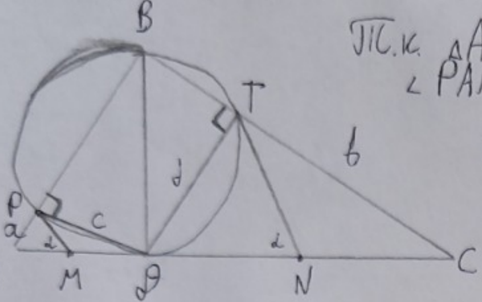
211007477 (U373168 M1277232)

Чистовик, страница 1, задача 1

а) $\angle BTD = \angle BPD = 90^\circ$, т.к. DB - диаметр., $\Rightarrow \angle APD = 90^\circ$, $\angle DTC = 90^\circ$

$AM = MD$, $\Rightarrow PM$ медиана, $\Rightarrow PM = AM = MD$. Аналогично,

$TN = DN = NC$. $PM \parallel TN$, $\Rightarrow \angle AMP = \angle DNT$.



Т.к. $\triangle APM$ и $\triangle DTN$ равнобедрены, $\angle PAM = \angle TDM = \beta$.

Но т.к $\angle DTC = 90^\circ$, то $\angle TCD = 90^\circ - \beta$.

$\angle ABC + \angle BCA + \angle BAC = 180^\circ$

$\angle ABC + \beta + 90^\circ - \beta = 180^\circ$

$\angle ABC = 90^\circ$

Ответ 90°

б) $\angle PBT = 90^\circ$, $\Rightarrow \angle PDT = 90^\circ$, $\Rightarrow PBTD$ - прямоугольник.

Пусть $PD = c$, $TD = d$, $TC = b$, $PA = a$.

Из подобия $\triangle PAM$ и $\triangle DTN$, $d = 2a$ $\left(\frac{NT}{PM} = 2\right)$.

$AD = 2PM = 1$, $DC = 2TN = 2$

$$\begin{cases} PD^2 + BP^2 = \frac{16}{9} \\ AP^2 + PD^2 = 1 \\ TD^2 + TC^2 = 4 \\ \cancel{AD} = 2\,\cancel{PA}\,PA \\ TD \end{cases} \quad \begin{cases} c^2 + d^2 = \frac{16}{9} \\ a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 4 \\ d = 2a \end{cases} \quad \begin{cases} c^2 + 4a^2 = \frac{16}{9} \\ a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + 4a^2 = 4 \end{cases} \quad \cancel{3a^2 = \frac{7}{9}}$$

$$c^2 + 4a^2 - (a^2 + c^2) = \frac{16}{9} - 1$$

$$3a^2 = \frac{7}{9},\ a = \sqrt{\frac{7}{27}},\ c = \sqrt{1 - a^2} = \sqrt{\frac{20}{27}},\ d = 2\sqrt{\frac{7}{27}}$$

$$\frac{7}{27} \cdot 4 + b^2 = 4$$

$$b^2 = 2\frac{26}{27} = \frac{80}{27},\ b = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{27}}$$

$$S_{ABC} = (a + d)(c + b) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{27}} \cdot \frac{\sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{27}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{7} \cdot 6\sqrt{5}}{27} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{35}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{35}}{3}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007477**

ID профиля: **373168**

Вариант 12

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\dfrac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2+x^2y^2=\dfrac{9}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a}+b=\dfrac{5}{4} \\ 2a^2+b=\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$2a^2-\frac{1}{a}=1$$

$$2a^3-a-1=0,\quad a=1$$

$$\begin{array}{l|l} 2a^3-a-1 & a-1 \\ \underline{2a^3-2a^2} & 2a^2+2a+1 \\ \quad 2a^2-a & \\ \quad \underline{2a^2-2a} & \\ \qquad a-1 & \end{array}$$

$$a=1$$

$$b=\frac{1}{4}$$

$$x^2+y^2=1 \qquad x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x^2y^2=\frac{1}{4} \qquad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a+b=1$$

$$ab=\frac{1}{4}$$

$$a+\frac{1}{4a}=1$$

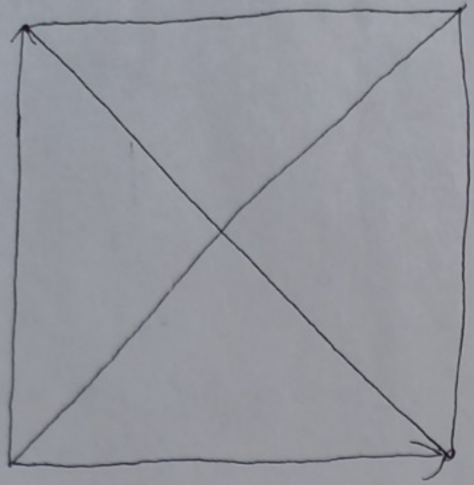
$$a^2-a+\frac{1}{4}=0$$

$$4a^2-4a+1=0$$

$$(2a-1)^2=0$$

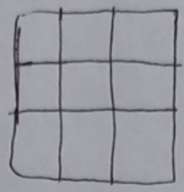
$$\begin{cases} a=0,5 \\ b=0,5 \end{cases}$$

211007477 (U373168 M1277233)



Общ кол-во вариантов

62^2 узлов



$62+62$ позиций

$124\cdot(62^2-1)$

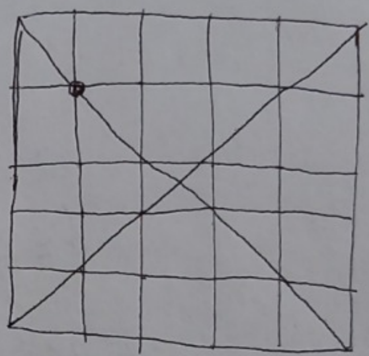
$124\cdot(62^2-124)+$

$+124\cdot(124-1)\cdot\frac{1}{2}$

$62(62-2)$

$62\cdot 60$

$$\begin{array}{r} \times\,124 \\ 6 \\ \hline +\,744 \\ 123 \\ \hline -\,867 \\ 242 \\ \hline 625 \end{array}$$



$(5-1-1)2$

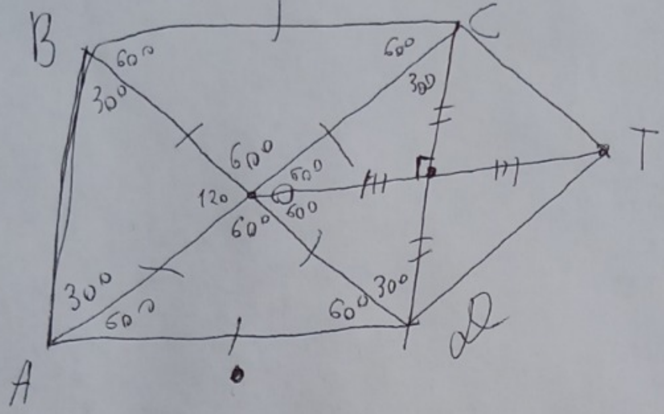
$61\cdot 2$

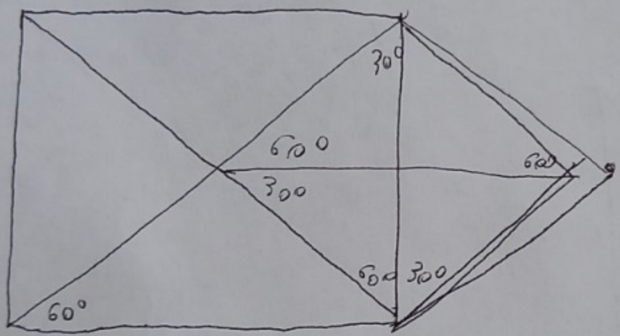
$124\cdot 61$

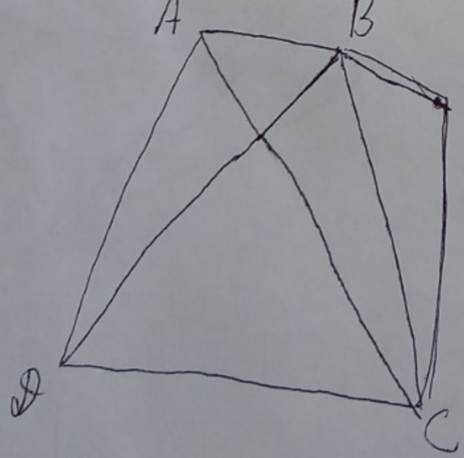
$$2\cdot 62\cdot(62^2-62\cdot 2)+62\cdot 123-124\cdot 61$$

$$\begin{array}{r} \times\,625 \\ 62 \\ \hline +\,1250 \\ 3450 \\ \hline 38750 \end{array}$$

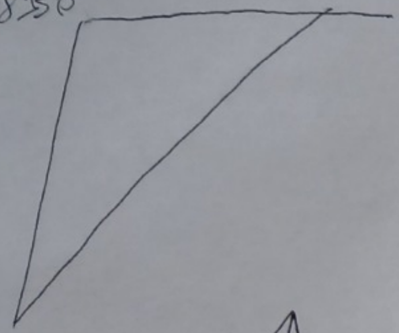
211007477 (U373168 M1277233)

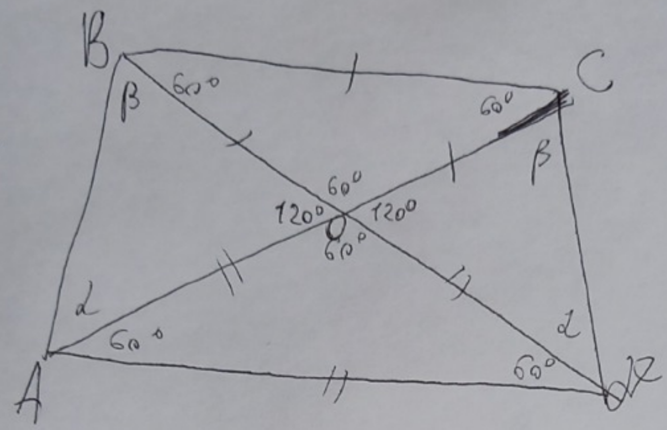

B
C
T
A
D
60°
30°
120


30°
60°
30°
60°


A
B
D
C

$$\begin{array}{r} 625 \\ \times\ 62 \\ \hline 1250 \\ +3750 \\ \hline 38750 \end{array}$$





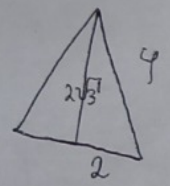
ABC

$\Delta BTD = \Delta \cancel{ABC}, \Rightarrow$

$BT = AB$

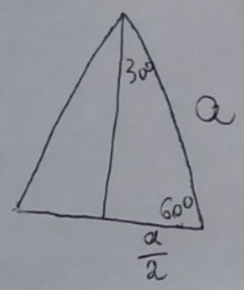
$\Delta BCT = \Delta ATD, \Rightarrow$

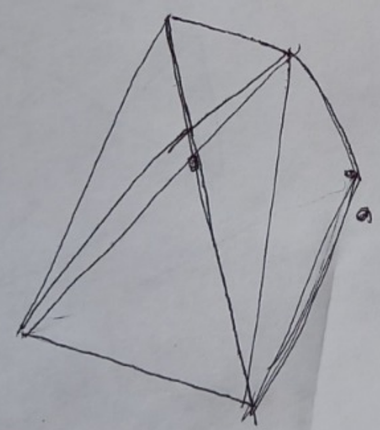
$AT = BT$

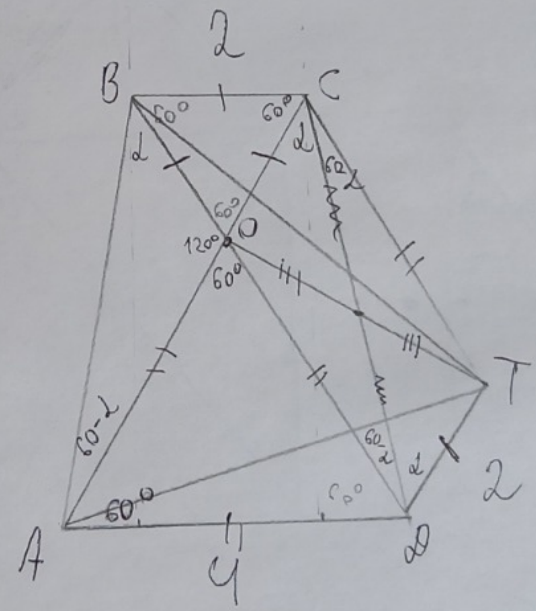


$4\sqrt{3}$

1





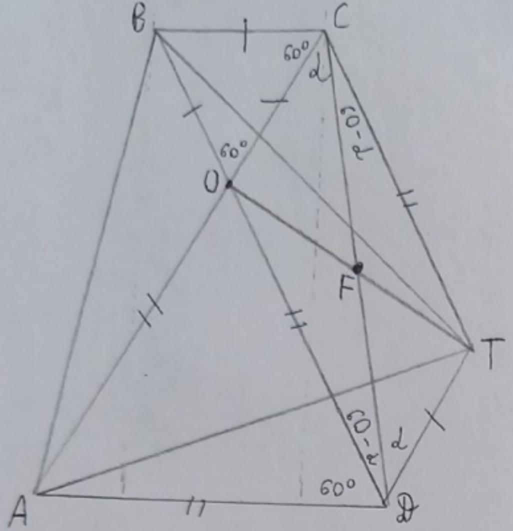


$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

211007477 (U373168 M1277233)

Чистовик, страница 3, задача 6

а) 

$BO = BC = OC$

$AO = OD = AD$

$\triangle BOA = \triangle OCD$, т.к $BO = OC$, $CO = OD$, а $\angle BOA = \angle COD$, т.к. они вертикальные.

$CF = FD$, $OF = FT$, $\Rightarrow$ $CODT$ – параллелограм. $\Rightarrow$

$CO = DT$, $OD = CT$

Пусть $\angle ACD = \alpha$, тогда $\angle CDO = 60^\circ - \alpha$, т.к $\angle COD = 180^\circ - \angle BOC = 120^\circ$. $CO \parallel DT$, $\Rightarrow \angle OCD = \angle CDT = \alpha$

$\triangle BTD = \triangle BCA$, т.к $BC = DT$, $AC = BD = BC + AD$,

$\angle BDT = \angle BCA$ $(60^\circ - \alpha + \alpha = 60^\circ)$, $\Rightarrow$ $\boxed{AB = BT}$

$\angle DCT = \angle ODC = 60 - \alpha$, т.к. $OD \parallel CT$.

$\triangle ADT = \triangle BCT$, т.к $DT = BC$, $AD = CT$ ($CT = OD$, т.к $OCTD$ – парал.),

$\angle ADT = \angle BCT = 60^\circ + \alpha + 60^\circ - \alpha = 60^\circ + 60^\circ - \alpha + \alpha = 120^\circ$, $\Rightarrow$

$\boxed{AT = BT}$

Итак, $AB = BT$ и $BT = AT$, т.е $AB = BT = AT$ $\Rightarrow \triangle ABT$ – правильный.

б) $BC = 2$, $AD = 4$, $\angle ADT = 60^\circ + 60^\circ - \alpha + \alpha = 120^\circ$. По т. косинусов в $\triangle ADT$, $AT^2 = AD^2 + DT^2 - \underset{2\cdot AD\cdot DT}{\cancel{2ab}} \cos\angle ADT = 16 + 4 - 2\cdot 4\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 16 + 4 + 8 = 28$

$AT = 2\sqrt{7}$

$S_{ABT} = \frac{1}{2}\cdot \sin 60^\circ \cdot AT^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot AT^2 = 7\sqrt{3}$

$S_{AOD} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 16 = 4\sqrt{3}$

$S_{BOC} = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4 = \sqrt{3}$

$S_{OCD} = \frac{1}{2}\cdot \sin 120^\circ \cdot 4\cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4 = 2\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{BOC} + 2S_{OCD} = 9\sqrt{3}$, $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$. Ответ: $\frac{7}{9}$

Чистовик, страница 2, задача 5

Посчитаем общее кол-во узлов — 62^2.

Найдем кол-во вариантов, когда один узел лежит на прямой $y=x$ или $y=63-x$, а второй не лежит.

Всего узлов, лежащих на таких прямых, будет $62\cdot 2$, тогда узлов, не лежащих на этих прямых будет $(62^2-2\cdot 62)$. Тогда кол-во вариантов будет $62\cdot 2\cdot(62^2-62\cdot 2)$.

Теперь посчитаем кол-во вариантов, когда оба узла лежат на таких прямых. Это будет $62\cdot 2\cdot(62\cdot 2-1)\cdot\frac{1}{2}$.

Теперь вычтем из этого кол-ва варианты, когда оба узла лежат на одной прямой, ~~пусть~~ параллельной осям координат. а) Пусть один узел лежит на прямых $y=x$ или $y=63-x$, а второй нет. Тогда кол-во вариантов будет $62\cdot 2\cdot((62-2)\cdot 2)$. Это так, потому что в одном ряду 62 узла, один из них занят уже выбранным узлом, а второй лежит на прямой $y=x$ или $y=63-x$, т.е число вариантов в одном ряду равно 60.

б) Пусть оба узла лежат на прямых $y=x$ или $y=63-x$.

Кол-во вариантов $= 124\cdot 2\cdot\frac{1}{2}$ (для каждого узла есть 2, лежащих на прямых $y=x$ или $y=63-x$)

Тогда итоговый ответ будет $62\cdot 2\cdot(62^2-62\cdot 2)+$

$$+62\cdot 2\cdot(62\cdot 2-1)\cdot\frac{1}{2}-62\cdot 2\cdot(62-2)\cdot 2-124\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=124(62^2-124)+62\cdot 123-120\cdot 124-124=$$

$$=124\cdot 62\cdot 60+62\cdot 123-62\cdot 60\cdot 4-62\cdot 2=$$

$$=62(124\cdot 60+123-60\cdot 4-2)=62(744+123-242)=$$

$=62\cdot 625=38750$ вариантов

Ответ: 38750

Чистовик, страница 1, задача 4

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}, \quad a = x^2+y^2, \quad b = x^2y^2$$

$$2(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{x^2+y^2} = 1$$

$$2a^2 - \frac{1}{a} = 1$$

$$2a^3 - a - 1 = 0$$

$$(a-1)(2a^2+2a+1) = 0$$

$a = 1$ - единств. решение

$$\frac{1}{a} + b = \frac{5}{4}, \Rightarrow b = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}, \quad c = x^2, \ d = y^2$$

$$\begin{cases} c+d = 1 \\ cd = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$c + \frac{1}{4c} = 1$$

$$4c^2 - 4c + 1 = 0$$

$$(2c-1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} c = 0,5 \\ d = 0,5 \end{cases}, \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}; \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$