Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007476**

ID профиля: **281646**

Вариант 12

№2

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}.$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4+3x-x^2 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ (x+1)(4-x) \geq 0 \\ x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1; 4].$$

Введём замену $t = \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}$.

Заметим, что $t^2 = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}\right)^2 = x+1+4-x - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} = 5 - 2\sqrt{(x+1)(4-x)}$, т.е

$$2\sqrt{(x+1)(4-x)} = 5 - t^2.$$

Т.к. $4+3x-x^2 = (x+1)(4-x)$ (разложение по формуле, корни уравнения $4+3x-x^2=0$, или $x^2-3x-4=0$ находятся из теоремы Виета: $\begin{cases} x_1 x_2 = -4 \\ x_1 + x_2 = 3 \\ D = 9+4\cdot 4 > 0 \end{cases}$,

т.е $x_1 = -1$; $x_2 = 4$, тогда $-(x^2-3x-4) = -(x+1)(x-4) = (x+1)(4-x)$), то $2\sqrt{4+3x-x^2} = 2\sqrt{(x+1)(4-x)}$,

т.е равно $5-t^2$.

Имеем:

$t+3=5-t^2$

$t^2+t-2=0$

Дискриминант:

$D=1+4\cdot 2=9 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=-2$ и 1.

Имеем 2 случая:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=1 \quad (1)\\ \sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=-2 \quad (2).\end{array}\right.$$

(1) $\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}\right)^2=1$

$5-2\sqrt{(x+1)(4-x)}=1$

$2=\sqrt{(x+1)(4-x)} \quad |^2$

$4=(x+1)(4-x)$

$4=4+3x-x^2$

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$, т.е $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x-3=0\end{array}\right.$ т.е $\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=3\end{array}\right.$

(произведение равно нулю, когда ~~ког~~ хотя бы 1 из множителей 0).

② $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=-2$

$$\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}\right)^2=4$$

$$5-2\sqrt{(x+1)(4-x)}=4$$

$$\frac{1}{2}=\cancel{2}\sqrt{(x+1)(4-x)}$$

$$\frac{1}{4}=(x+1)(4-x)$$

$$\frac{1}{4}=-x^2+3x+4$$

$$x^2-3x-\frac{15}{4}=0$$

Дискрим.:

$D=9+15=24.$

$x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{24}}{2}=\dfrac{3\pm 2\sqrt{6}}{2}$, т.е. $\dfrac{3-2\sqrt{6}}{2}$ и $\dfrac{3+2\sqrt{6}}{2}$.

~~В ходе~~ Могли получиться лишние корни, при возведении в квадрат поэтому проверим их подстановкой в уравнение

$0:\ \sqrt{1}-\sqrt{4}+3=2\sqrt{4+3\cdot 0-0}$

$2\neq 4$. — не подходит

$3:\ \sqrt{4}-\sqrt{1}+3=2\sqrt{4+9-9}$

$4=4$ — подходит

$$\frac{3-2\sqrt6}{2}:\ \sqrt{\frac{3-2\sqrt6}{2}+1}-\sqrt{4-\frac{3-2\sqrt6}{2}}+3\ \overset{?}{=}$$

$$=2\sqrt{4+3\cdot\frac{3-2\sqrt6}{2}-\frac{(3-2\sqrt6)^2}{4}}$$

~~Итак~~ $\sqrt{\frac{5-2\sqrt6}{2}}-\sqrt{\frac{5+2\sqrt6}{2}}+3=2\sqrt{4+\frac{3(3-2\sqrt6)}{2}-\frac{(3-2\sqrt6)^2}{4}}$

Поскольку $5-2\sqrt6=2-2\cdot\sqrt3\cdot\sqrt2+3=(\sqrt2-\sqrt3)^2$,

аналогично $5+2\sqrt6=(\sqrt2+\sqrt3)^2$, то:

$$\frac{|\sqrt2-\sqrt3|}{\sqrt2}-\frac{|\sqrt3+\sqrt2|}{\sqrt2}+3\overset{?}{=}2\sqrt{4+3\cdot\frac{3-2\sqrt6}{2}-\frac{(3-2\sqrt6)^2}{4}}$$

$\sqrt3>\sqrt2$, поэтому $\dfrac{\sqrt3-\sqrt2-\sqrt3-\sqrt2}{\sqrt2}+3\overset{?}{=}$

$$\overset{?}{=}2\sqrt{\left(\frac{3-2\sqrt6}{2}+1\right)\left(4-\frac{3-2\sqrt6}{2}\right)}$$

$$3-\sqrt2\overset{?}{=}2\sqrt{\frac{(\sqrt3-\sqrt2)^2}{2}\cdot\frac{(\sqrt3+\sqrt2)^2}{2}}$$

$3-\sqrt2\overset{?}{=}|\sqrt3-\sqrt2|\,|\sqrt3+\sqrt2|$ (т.к. $\sqrt3-\sqrt2>0$, и $\sqrt3+\sqrt2>0$)

$3-\sqrt{2} \overset{?}{=} 3-2.$

$2 \neq \sqrt{2}$, т.к. $4 \neq 2$ – не подходит.

$\frac{3+2\sqrt{6}}{2}$: $\sqrt{\frac{3+2\sqrt{6}+2}{2}} - \sqrt{4-\frac{3+2\sqrt{6}}{2}} + 3 \overset{?}{=} 2\sqrt{4+3\cdot\frac{3+2\sqrt{6}}{2}-\left(\frac{3+2\sqrt{6}}{2}\right)^2}$

$$\sqrt{\frac{7+2\sqrt{6}}{2}} - \sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}} + 3 \overset{?}{=}$$

$$2\sqrt{\frac{7+2\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}$$

т.к. $7+2\sqrt{6} = (\sqrt{6})^2+2\cdot\sqrt{6}\cdot 1+1^2 = (\sqrt{6}+1)^2$, то:

$$\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 3 \overset{?}{=} (\sqrt{6}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$\sqrt{6}+1-\sqrt{3}+\sqrt{2}+3\sqrt{2} \overset{?}{=} \sqrt{18}-\sqrt{12}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

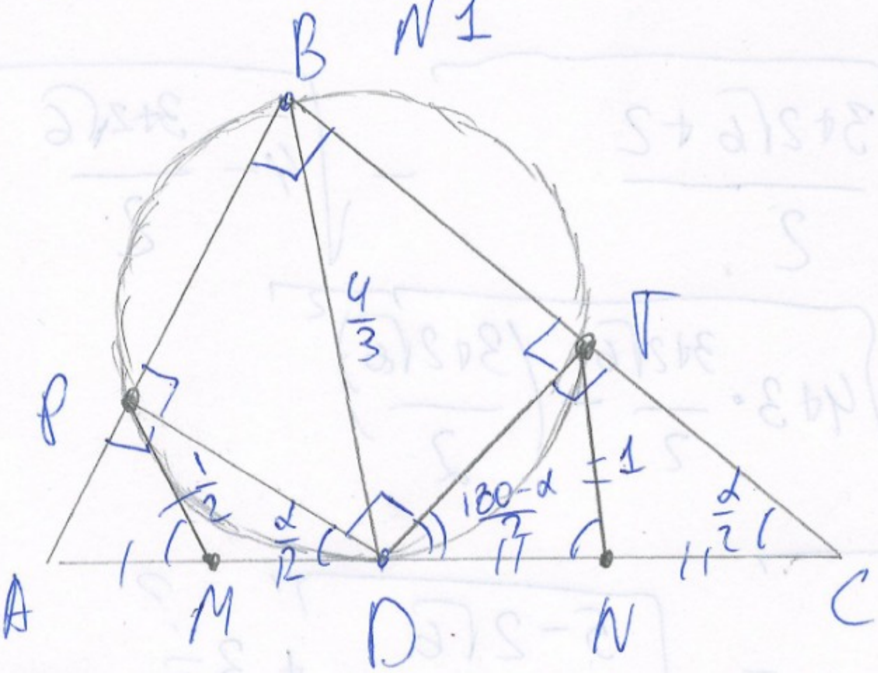
$$\sqrt{6}+1-\cancel{\sqrt{3}}+\sqrt{2}+3\sqrt{2} \overset{?}{=} \cancel{3\sqrt{2}}-\cancel{2\sqrt{3}+\sqrt{3}}-\sqrt{2}$$

$2\sqrt{2} \overset{?}{=} -1-\sqrt{6}$, неравно, т.к. $2\sqrt{2}>0>-1-\sqrt{6}$, тогда подходит только 3.

Ответ: 3.

№1

а)



Т.к. BD — диаметр окружности, то $\angle B\Gamma D = \angle BPD = 90^\circ$, как углы, опирающиеся на диаметр, тогда

$D\Gamma \perp BC$ и $AB \perp PD$, значит, $\triangle APD$ и $\triangle D\Gamma C$ — прямоугольн.

Т.к. M — середина AD => PM — медиана в $\triangle APD$, проведенная из прямого угла => по св-ву $PM = AM = MD$, аналогично $\Gamma N = DN = NC$ (N — середина DC).

Т.к. $PM \parallel \Gamma N$, то $\angle PMA = \angle \Gamma ND$ как соответств. углы при AC — секущей и $PM \parallel \Gamma N$.

$\triangle PMD$ и $\triangle \Gamma ND$ — р/б, т.к. $\Gamma N = DN$ и $PM = MD$, тогда $\angle MPD = \angle PDM$ и $\angle ND\Gamma = \angle D\Gamma N$ как углы при основании. Пусть $\angle \Gamma ND = \angle PMA = \alpha$.

Тогда в $\triangle PMD$, $\angle PMA$ — внешний угол =>

$\angle PMA = \angle MPD + \angle PDM = 2\angle MPD \Rightarrow \angle M\cancel{PD}DP = \frac{\alpha}{2}$.

В ΔDNT:

$\angle DTN + \angle TND + \angle TDN = 180°$ (по теореме о сумме углов)

Тогда $\angle TDN = \dfrac{180 - \angle TND}{2} = \dfrac{180 - \alpha}{2}$.

Тогда, т.к. $\angle \cancel{PD} MDP + \angle PDT + \angle TDN = 180°$ (составл. развернутый угол) $\Rightarrow \angle PDT = 180 - \dfrac{180-\alpha}{2} + \dfrac{\alpha}{2} =$

$= 90°$.

Т.к. $PBTD$ — вписанный $\Rightarrow \angle PBT + \angle PDT = 180° \Rightarrow$

$\angle PBT = 90° = \angle ABC$.

б) Из пред. пункта $\Rightarrow$ что $PBTD$ — прямоугольник

(все углы на чертеже были описаны в п. а))

$S_{\Delta ABC} = S_{PBTD} + S_{\Delta APD} + S_{\Delta DTC} =$

$= PD \cdot DT + \frac{1}{2} AP \cdot PD + \frac{1}{2} \cdot DT \cdot TC$ (по формуле)

Т.к. $TN = DN = NC = 1 \Rightarrow DC = 2TN = 2$, аналогично

$AD = 2PM = 1$.

Т.к. $\angle TCD = 90 - \angle TDN = \dfrac{\alpha}{2}$ (т.к ΔDTC — прям.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta DTC \sim \Delta APD$ по двум углам (прямой и $\frac{\alpha}{2}$)

211007476 (U281646 M1277254)

тогда $\dfrac{DC}{AD} = \dfrac{TC}{PD} = 2 \Rightarrow TC = 2PD$.

Из теоремы Пифагора:

$DT^2 = DC^2 - TC^2 = 4 - 4PD^2$.

Т.к. PBTD - прямоугол. => $BT = PD$ (по св-ву), тогда по теореме Пифагора:

$BT^2 + DT^2 = BD^2$

$PD^2 + DT^2 = \frac{16}{9}$

$PD^2 + 4 - 4PD^2 = \frac{16}{9}$.

$\frac{20}{9} = 3PD^2$

$\sqrt{\frac{20}{27}} = PD$ ($PD > 0$, отр. корень не имеет смысла)

$TC = 2\sqrt{\frac{20}{27}} = 2PD$

$DT = \sqrt{4 - 4PD^2} = \sqrt{4 - 4 \cdot \frac{20}{27}} = \sqrt{\frac{28}{27}}$

$AP = \sqrt{AD^2 - PD^2} = \sqrt{1 - \frac{20}{27}} = \sqrt{\frac{7}{27}}$ (из теоремы Пифагора.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{7}{27}} \cdot \sqrt{\frac{20}{27}} + \sqrt{\frac{20}{27}} \cdot \sqrt{\frac{28}{27}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{28}{27}} \cdot 2\sqrt{\frac{20}{27}} =$

211007476 (U281646 M1277254)

$= \frac{\sqrt{35}}{3}$. Ответ: а) $90°$ б) $\frac{\sqrt{35}}{3}$

№3

Д/з $2a^2 - 12ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0.$

Пусть есть разложение вида

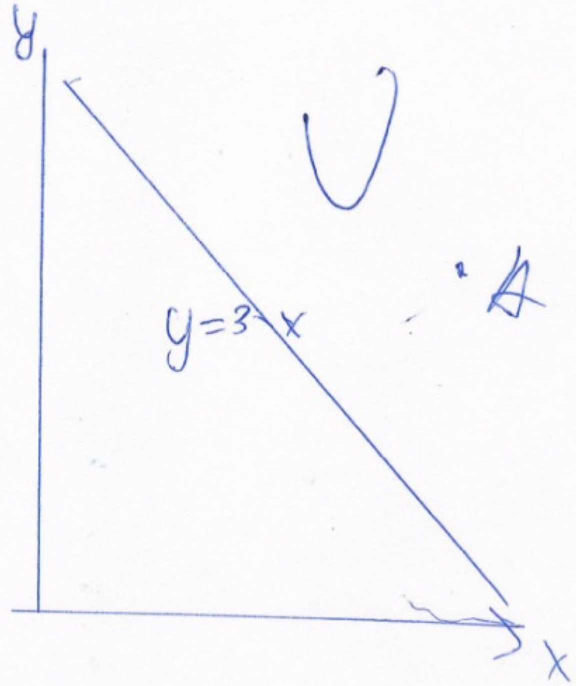
$$(\alpha a + \beta y)^2 + (\gamma x + \xi y)^2 + (\varphi a + \psi y)^2 = 0$$

$$\alpha^2 a^2 + 2\alpha a \beta y + \beta^2 y^2 + \gamma^2 x^2 + 2\gamma x \xi y + \xi^2 y^2 +$$

$$+ \varphi^2 a^2 + 2\varphi a \psi y + \psi^2 y^2 = 0.$$

$$a^2(\alpha^2 + \varphi^2) + 2\alpha\beta(ay) + (\xi^2 + \psi^2)y^2 +$$

$+$



Часть 2

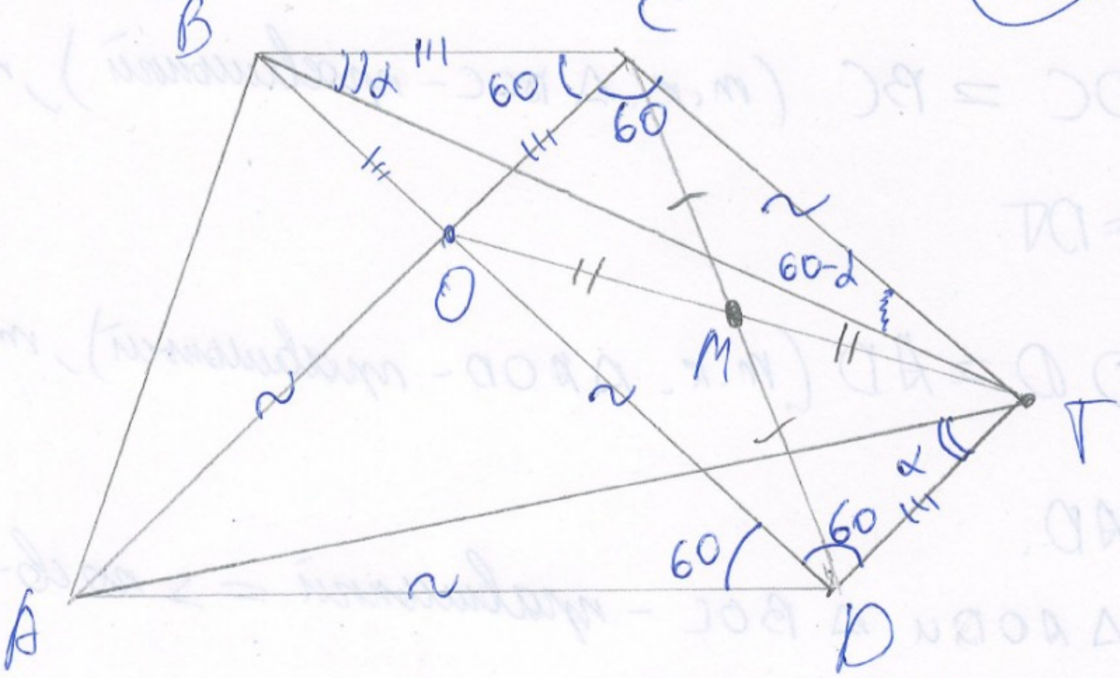
Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007476**

ID профиля: **281646**

Вариант 12

Чистовик №6. 1



а) По определению симметрии, $OM = MT$, где M – середина CD (из условия). Т.к. $CM = MD$ и $OM = MT$ (M – середина CD), то по признаку $CTDO$ – параллелограмм, тогда по св-ву $OC = DT$, и $OD = CT$. $\angle COD$ – внешний $\angle$ ΔAOD, а значит $\angle COD = \angle OAD + \angle ODA$. Т.к. по условию ΔAOD – правильный, то по св-ву $\angle OAD = \angle ODA = 60^\circ$, значит $\angle COD = 120^\circ$. Т.к. $CTDO$ – пар-мм, то $CT \parallel OD$ и $OC \parallel DT$ (по определению), значит $\angle COD + \angle OCT = 180^\circ$ (AC – секущая при $CT \parallel OD$), значит $\angle OCT = 180 - 120 = 60^\circ$. По св-ву парал-мма, $\angle OCT = \angle ODT = 60^\circ$ (противолежащие углы)

3/м $\triangle BCT$ и $\triangle ATD$. Чистовик (2)

$DT = OC = BC$ (т.к. $\triangle BOC$ - правильный), т.е

$BC = DT$

$CT = OD = AD$ (т.к. $\triangle AOD$ - правильный), т.е

$CT = AD$.

Т.к. $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ - правильный => по св-ву

$\angle$ ~~BC~~ $BCO = \angle ODA = 60°$.

Тогда, из ранее найденного ($\angle OCT = \angle ODT = 60°$),

$\angle ADT = \angle ODA + \angle ODT = 60° + 60° = 120 = 60° + 60° =$

$= \angle BCO + \angle OCT = \angle BCT$, т.е $\angle ADT = \angle BCT = 120°$.

Тогда по ~~первым~~ $\triangle BCT = \triangle ATD$ по двум сторонам и

углу между ними => $BT = AT$, $\angle CBT = \angle ATD$

Пусть $\angle CBT = \alpha$, тогда $\angle ATD = \alpha$.

Из суммы (180°) углов $\triangle BCT$:

$\angle CBT + \angle BCT + \angle CTB = 180°$ ($\angle BCT = 120°$; $\angle CBT = \alpha$),

получим: $\angle CTB = 60 - \alpha$.

Т.к. $CTDO$ - пар-мм, то противолежащие углы

равны т.е $\angle CTD = \angle COD = 120°$ (из ранее найденного)

211007476 (U281646 M1277255)

~~$\angle COD$~~ = $\angle CTD = \angle CTB + \angle BTA + \angle ATD = 120°$ (составная)

Чистовик ③

$\angle BTA = 120 - \angle CTB - \angle ATD = 120 - 60 + \alpha - \alpha = 60^\circ$.

Теперь р/м $\triangle ABT$.

В нём: $BT = AT$ и $\angle BTA = 60^\circ$. По ~~св-ву~~ признаку, если какие-то две стороны $\triangle$ равны и угол между ними 60° => этот $\triangle$ правильный, т.е. $\triangle ABT$ — правильный

ч.т.д.

б) Будем пользоваться результатами п. а)

Найдём BT.

Т.к. $\underbrace{AD = OD}_{\triangle AOD\text{ — правильный}} = CT = 4$ (CTDO — пар-мм), то р/м $\triangle BCT$.

По теореме Косинусов:

$$BT^2 = BC^2 + CT^2 - 2BC \cdot CT \cos\angle BCT.$$

$BC = 2$; $CT = 4$; $\angle BCT = 120^\circ$ (из п. а)) => $\cos\angle BCT = -\frac{1}{2}$.

Тогда

$$BT^2 = 4 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 20 + 8 = 28 =>$$

$BT = \sqrt{28}$ (отр. длина не имеет смысла)

Площадь $\triangle ABT$ по формуле:

$$S_{\triangle ABT} = \frac{1}{2} AT \cdot BT \cdot \sin\angle BTA = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{28} \cdot \sqrt{28} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

Чистовик ④

$7\sqrt{3}$. ($\triangle$ правильный, т.к. $\angle BTA = 60°$, $BT = AT$ (из п. а)))

По формуле, площадь ABCD равна половине произведения ~~длин~~ длин диагоналей на синус угла между ними, т.е.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC \cdot \sin\angle AOD.$$

Т.к. $BC = OC = BO = 2$ ($\triangle BOC$ - правильный), и

$AO = OD = AD = 4$ ($\triangle AOD$ - правильный) $\Rightarrow$

$BD = BO + OD = 6 = AC = AO + OC$.

$\sin\angle AOD = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (т.к. $\triangle AOD$ - прав.)

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}.$$

Искомое соотношение:

$$\frac{S_{\triangle ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}.$$

Ответ: а) Доказано б) $\frac{7}{9}$.

211007476 (U281646 M1277255)

Титович (5)

№4.

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

ОДЗ: $x^2+y^2 \neq 0$.

Заметим, что $x^2+y^2=0$, когда $x=y=0$, т.к. $x^2 \geq 0$ и $y^2 \geq 0$ (очевидное нер-во), а равенство достигается при $x=y=0$.

Но в этом случае во втором уравнении системы:

$2 \cdot 0^4 + 2 \cdot 0^4 + 5 \cdot 0^2 \cdot 0^2 = 0 \neq \frac{9}{4}$. Потому одновременно не могут быть равны 0 x и y.

Введём замену: $a = x^2+y^2$; $b = x^2y^2$.

Преобразуем нижнее уравнение:

$$2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4}$$

$$2(x^4+y^4+2 \cdot x^2 \cdot y^2) + x^2y^2 = \frac{9}{4}$$

$$2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4}.$$

С учётом замены имеем:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + b = \frac{5}{4} \quad (1) \\ 2a^2+b = \frac{9}{4} \quad (2). \end{cases}$$

Вычтем (1) из (2), тогда: 6 Титовик

$$2a^2+b-\frac{1}{a}-b=\frac{9}{4}-\frac{5}{4}.$$

$$2a^2-\frac{1}{a}=1.$$

(учитывая того, что $a\neq 0$ ни при каких x и y (доказано ранее) (в этой системе)), имеем право домножить на a:

$$2a^3-1=a.$$

$$2a^3-a-1=0.$$

$$a^3-a+a^3-1=0$$

$$a(a^2-1)+(a-1)(a^2+a+1)=0.$$

$$(a-1)\left(a(a+1)+a^2+a+1\right)=0$$

$$(a-1)(2a^2+2a+1)=0.$$

тогда:

$$\left[\begin{array}{l} a-1=0 \quad (1) \\ 2a^2+2a+1=0. \quad (2) \end{array}\right.$$

(1): $a-1=0 \Rightarrow a=1.$

(2): $2a^2+2a+1=0.$

211007476 (U281646 M1277255)

Дискриминант: $D=4-4\cdot1\cdot2=-4<0$ т.е действ. корней нет. Значит, возможен только $a=1$.

Тогда по (1): (1) Чистовик

$\frac{1}{1} + b = \frac{5}{4}$.

$b = \frac{1}{4}$.

Н-с возвращаясь к x и y:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2=\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Заметим, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$, иначе $x^2y^2=0 \neq \frac{1}{4}$.

На всякий случай, проверим, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$ в исходном уравнении. Предположим, что $x=0$. (с $y=0$ аналогичная ситуация). (уравнение симметричное)

Тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{y^2}+0=\frac{5}{4} \ (1) \\ 2y^4=\frac{9}{4} \ (2) \end{cases}$$, тогда поэтому $y \neq 0$ (иначе верхнее урав. не сущ.),

то можем возвести в квадрат (1) и домножить на (2):

$2y^4 \cdot \frac{1}{y^4} = \frac{25}{16} \cdot \frac{9}{4}$.

211007476 (U281646 M1277255)

$2 = \frac{25 \cdot 9}{64} = \frac{180+45}{64} = \frac{225}{64} \neq 2$, т.к. $64 \cdot 2 \neq 225$.
$(128 \neq 225)$

⑧ Чистовик

Значит, предположение неверное, и $y \neq 0$ и $x \neq 0$.

Тогда имеем право на деление на x^2:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \quad (1) \\ y^2=\dfrac{1}{4x^2} \end{cases}$$

$$(1)\ x^2+y^2=x^2+\frac{1}{4x^2}=1.$$

$$\frac{4x^4-4x^2+1}{4x^2}=0.$$

$\dfrac{(2x^2-1)^2}{4x^2}=0$. Т.к. $x \neq 0$, значит, $(2x^2-1)^2=0$,

т.е. $2x^2=1$, или $x^2=\dfrac{1}{2}$, или $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Подставим $x^2=\dfrac{1}{2}$ в (1):

$$y^2+\frac{1}{2}=1$$

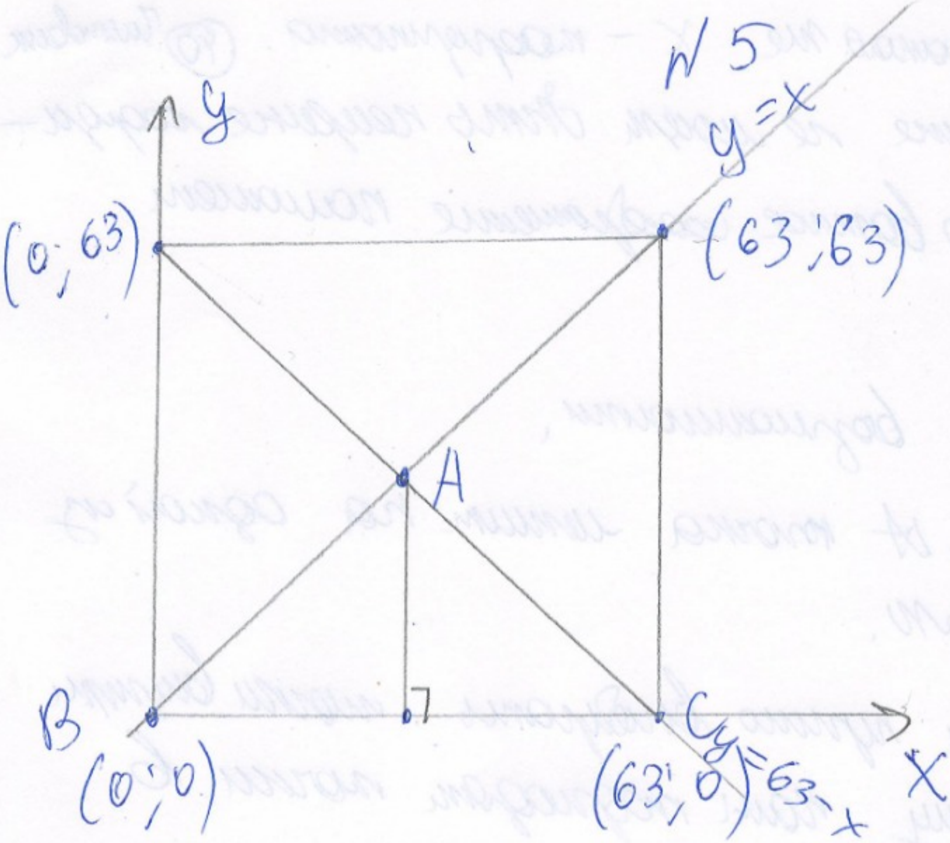
$y^2=\dfrac{1}{2}$, т.е $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Поскольку все слагаемые в квадрате, то подходят все возможные комбинации $(x;y)$. Тогда:

211007476 (U281646 M1277255)

Ответ: $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

№ 5 (9) Чистовик



Заметим, что оба уравнения задают диагонали квадрата, т.к. первая прямая проходит через точки $(0;0)$ и $(63;63)$ $(0=0$ и $63=63)$, а вторая прямая $y=63-x$ проходит через точки $(0;63)$ и $(63;0)$, т.к. $63=63-0$ и $0=63-63=0$.

Докажем, что точка пересечения диагоналей A не лежит в сетке. Действительно по св-ву квадрата, проекция точки пересечения диагоналей на сторону BC квадрата совпадает с серединой стороны BC, координата которой (по формуле) $\left(\frac{63+0}{2};0\right)$, т.е $(31{,}5;0)$. Но т.к. это проекция, то и у точки A такая же x — координата. 10 Чистовик

Но у точек в сетке не может быть нецелые координаты — (1). Это важное соображение поможет позже.

У нас есть две возможности.

1) Только O D и A точка лежит на одной из указанных прямых.

Заметим, что нам нужно выбирать точки внутри квадрата, поэтому нам подходят точки в таком диапазоне ($1 \le x \le 62$ и $1 \le y \le 62$) точки $(x; y)$. ~~Первую тому выберем~~ Первую координату выберем $62 \cdot \cancel{62}$ способами (1, 2, 3 ..., 62, как при счете), аналогично с y-координатой. Т.е всего допустимых точек $62 \cdot 62 = 3844$. Заметим, что на прямой ($x = y$) допустимых точек ровно 62 (т.к. выбираем x-коор. 62 способами ($1 \le x \le 62$), а y-координата выражается однозначно, $y = x$, следовательно y не выйдет из диапазона. Аналогично с $y = 63 - x$, т.к. она симметрична прямой $y = x$ от точки A, а значит у неё столько же допустимых точек, т.е 62.

(11) Черновик

ЛО (1), у этих прямых в сетке нет общих точек, а значит это две самостоятельные прямые. Тогда у нас есть $62+62=124$ способа выбрать первую точку. А вторую точку мы не можем выбрать, если у нее такая же x-коорд. или y-коорд. (следует из условия, в этом случае прямая будет парал. оси координат). Т.е мы можем взять x-коорд. из диапазона $1 \leq x \leq 62$ значений, и y-коорд. из диапазона $1 \leq y \leq 62$ значений. Значит, остается 61 способ выбрать x-координату и 61 способ выбрать y-коорд., т.е всего $61 \cdot 61 = 3721$. Но, в эти ~~спос~~ способы и входят точки, которые лежат на прямых $y=x$ и ~~63~~ $y=63-x$, их, как уже было ранее сказано, 124, но мы уже 1 „заблокировали" ~~т.е~~ (исходная точка), осталось заблокировать ещё $124-1=123$ точки, т.е допустимых способов выбрать вторую точку: $3721-123=3598$. ~~Т.е.~~ Т.е всего способов по правилу произведения $3598 \cdot 124 = 446152$, т.к. все способы различны (потому, что первая точка в итоге 3593 способов различных. (12) Чистовик

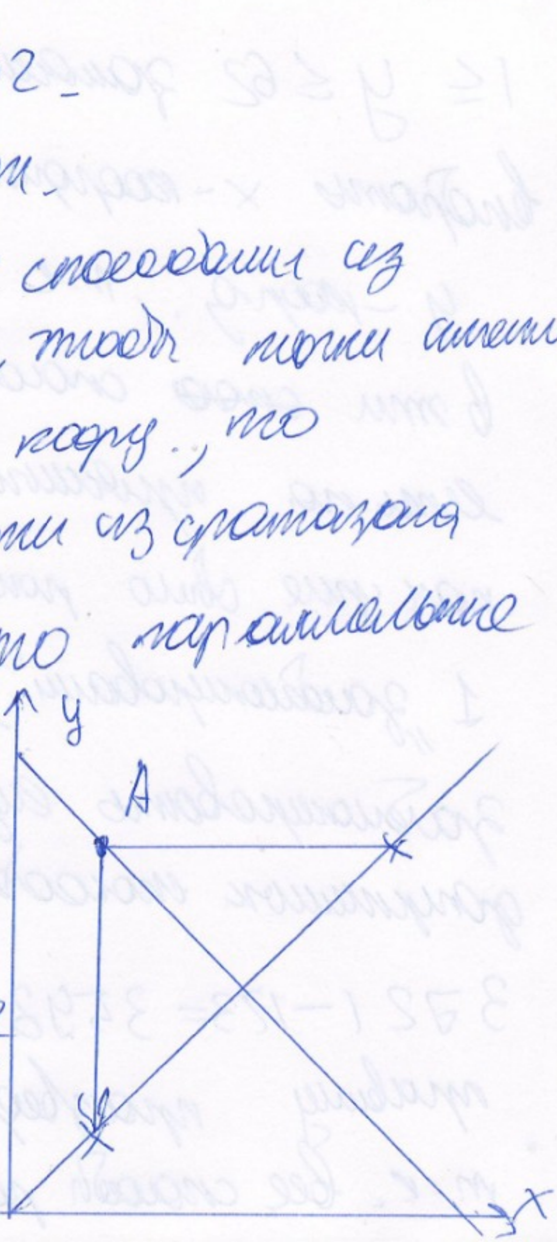
г) Две точки на указанных прямых

г.1) Они на одной прямой.

Поскольку x-координата у них не может совпадать (иначе совпадёт y-коорд.), то мы можем р/м все пары из диапазона ($1 \le x \le 62$). Первую точку выбираем 62 способ, вторую — 61. Т.к. точки одинаковые, то разделим на 2, но у нас 2 прямые, поэтому всего способов: $62 \cdot 61 = 3782$.

г.2) Они на разных прямых.

Первую точку выбираем 62 способами из диапазона. Т.к. нельзя, чтобы точки имели одну и ту же x- или y-коорд., то первая точку вычеркивает 2 точки из диапазона (они попадают, т.к. это параллельные прямые) (на рисунке).



Т.к. первую точку — 62 способа, вторую точку — из $62-2=60$ способов. Т.к. прямые различные, то всего способов

$62 \cdot 60 = 3720$.

Значит, всего способов из п. 1), 2.1) и 2.2):

446152+3720+3782=453654

Ответ: 453654

13 Чистовик

211007476 (U281646 M1277255)

$\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 9\sqrt{3}.$

$\frac{1}{2}\, 6 \cdot 6 \cdot \sin \frac{\sqrt{3}}{2} = \cancel{18\sqrt{3}}$

$(a-1).$

$\cancel{9\sqrt{3}}$ Периметр

$\frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}.$

$2a^3 - a - 1 = 0.$

$a^3 - a + a^3 - 1 = 0.$

$a(a^2-1) + (a-1)(a^2+a+1)$

$\cancel{a^3 + a^2 + a - a^2 - a - 1}$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5y^2x^2 = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

$x^2+y^2 \neq 0.$

$2(x^4 + y^4 + 2y^2x^2) + y^2x^2 = \frac{9}{4}.$

$$\begin{cases} 2(x^2+y^2)^2 + y^2x^2 = \frac{9}{4} \\ \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

$a = x^2+y^2$

$b = x^2y^2.$

$2a^2 - \frac{1}{a} + b - b = 1.$

$$\begin{cases} 2a^2 + b = \frac{9}{4} \\ \frac{1}{a} + b = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

$2a^2 - \frac{1}{a} = 1.$

$2a^3 - 1 = a.$

$a(a-1)(a+1)+(a-1)(a^2+a+1)=0.$

$(a-1)(a^2+a+a^2+a+1)=0$

$(a-1)(2a^2+2a+1)=0.$ черновик

$\left[\begin{array}{l} 2a^2+2a+1=0 \\ a=1 \end{array}\right.$ $D=4-4\cdot 1\cdot 2<0.$

$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$

$\cancel{a^2+2a+1+a^2=0.}$

$\cancel{(a+1)^2+(a^2)=0}$

$x\neq 0;\ y\neq 0.$

$\frac{1}{1}+b=\frac{5}{4}$

$b=\frac{1}{4}.$

$\left\{\begin{array}{l} (x^2)^{\frac{1}{2}}+(y^2)^{\frac{1}{2}}=1 \quad \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x^2y^2=\frac{1}{4}. \quad \pm\ \cancel{\frac{1}{2}}. \end{array}\right.$

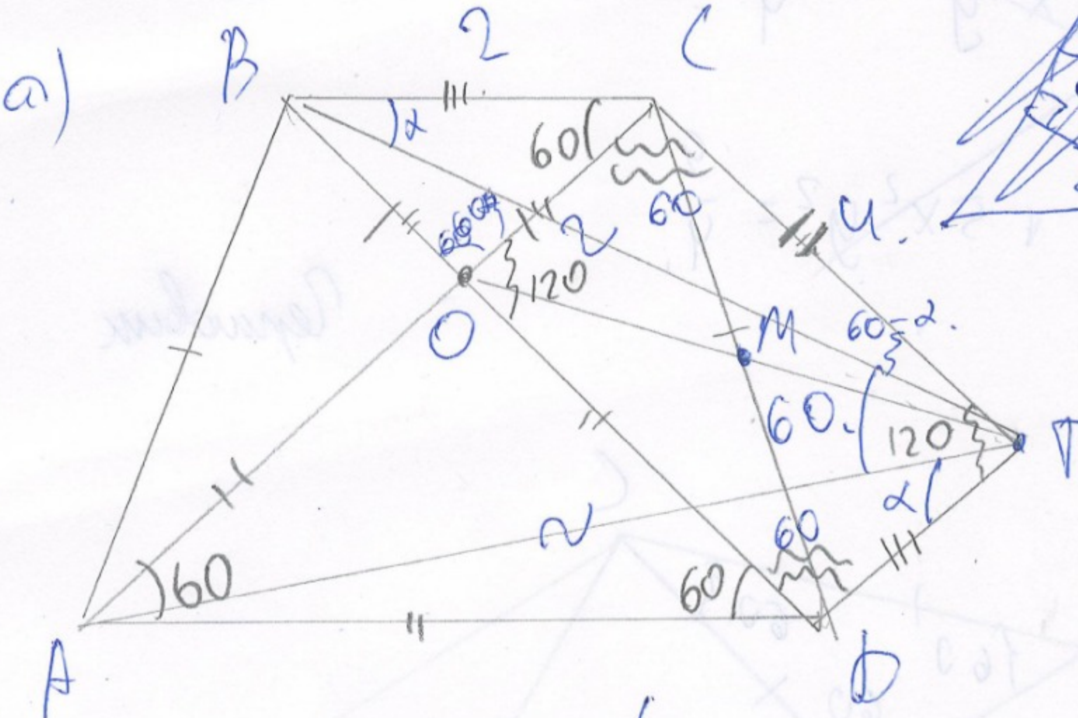
$y^2=\frac{1}{4x^2}.$ $2x^2-1=0.$

$x^2+\frac{1}{4x^2}=1.$ $2x^2=1$

$(2x^2-1)^2$ $x^2=\frac{1}{2}.$

$\frac{4x^4-4x^2+1}{4x^2}=0.$ $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}.$

а)



Черновик

$\frac{1}{2}28 \cdot \sin 60° = 28\frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$.

$OD = CT$

$BC = DT$

$\angle BCT = 60 + \angle OCT = 60 + \angle ADT = \angle ADT$

$\angle COD = 120°$ (внешний $\angle \triangle AOD$) $= \angle OCT = \angle ODT = 60°$

$\angle CBT = \alpha \Rightarrow \angle CTB = 60 - \alpha$

$\parallel$

$\angle ATD$ ($\triangle ADT = \triangle BCT$)

$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$.

$BT = \sqrt{28}$

$BT^2 = 2^2 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 120° =$

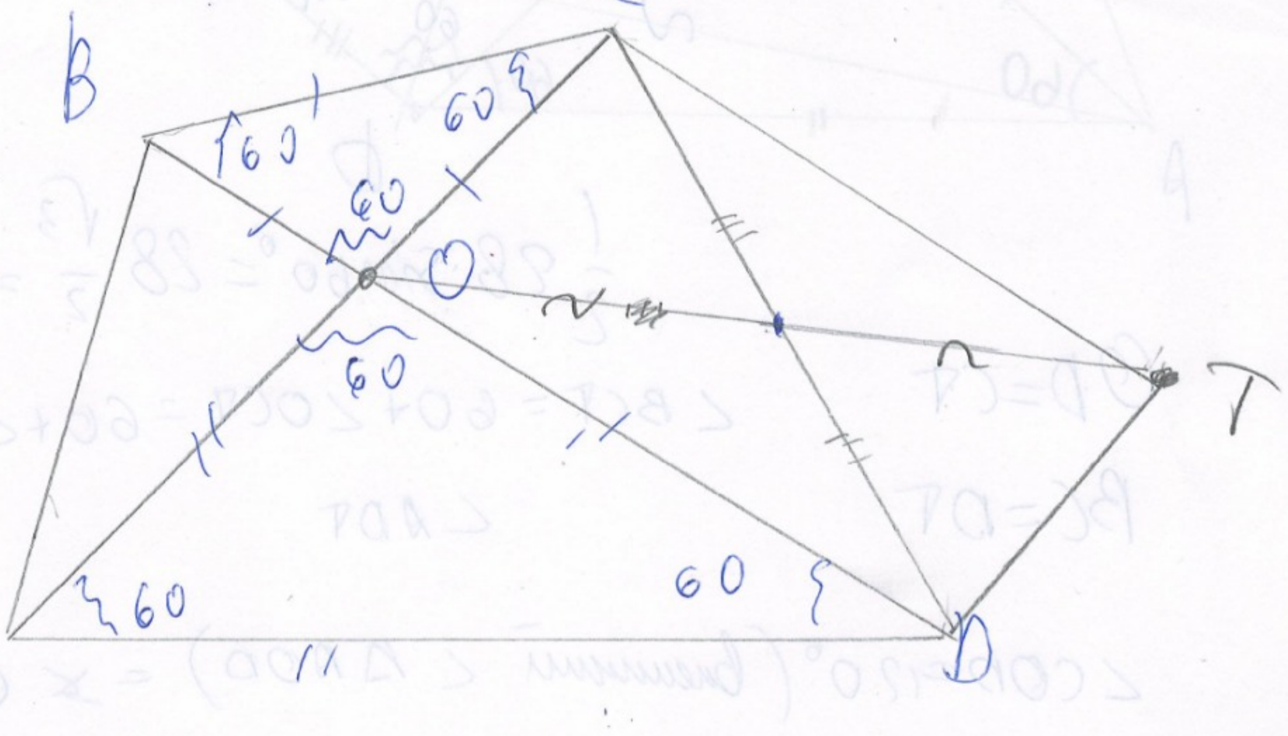
$= \cancel{B}\ 4 + 16 + 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 28$

211007476 (U281646 M1277255)

$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2$

$$\begin{cases} \cancel{\dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4}} \\ \cancel{2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \dfrac{9}{4}.} \end{cases}$$

Черновик



$\frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 16 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 +$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 =$

$= \frac{1\sqrt{3}}{2\,2}(16+20) =$

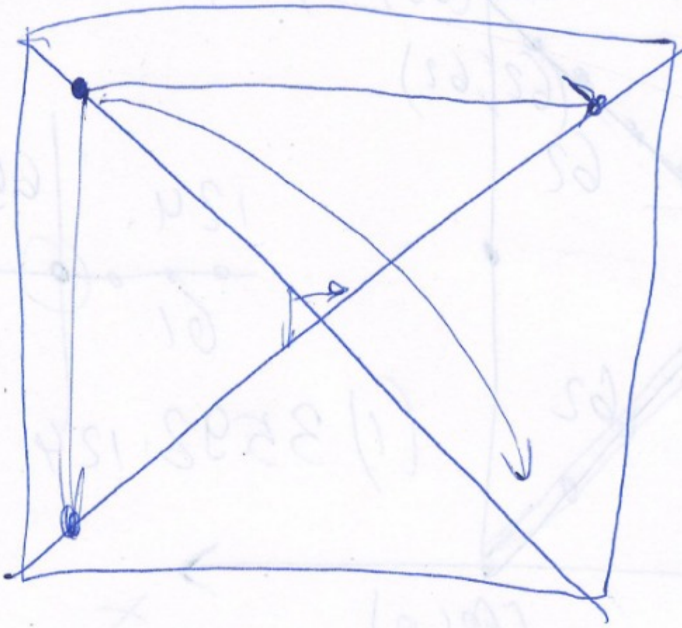
$= 9\sqrt{3}$

211007476 (U281646 M1277255)

г) две точки.

Черновик
на другой
границе

$62 \cdot 60 = 3720.$



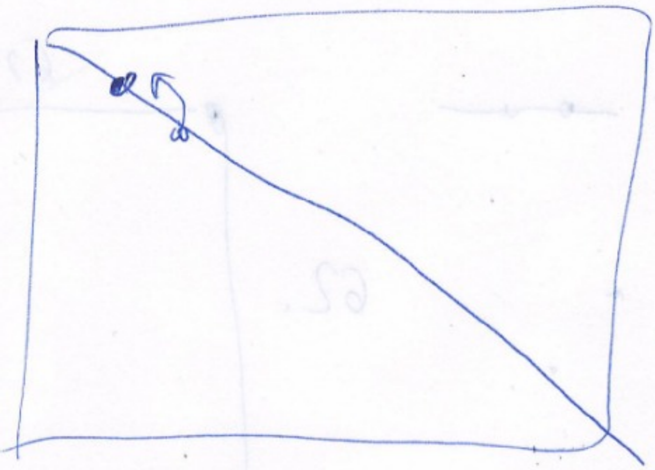
$$\begin{array}{r} 62 \\ \cdot\ 60 \\ \hline 3720 \end{array}$$

453654.

$$\begin{array}{r} 62 \\ \cdot\ 62 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 446152 \\ +\ 3782 \\ \hline 449934 \\ +\ 3720 \\ \hline 453654 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3598 \\ \cdot\ 124 \\ \hline 14392 \\ +\ 7196 \\ 3598 \\ \hline 446152 \\ +\ 7502 \\ \hline 453654 \end{array}$$



$\frac{62 \cdot 61}{2} \cdot 2 = 62 \cdot 61$

$$\begin{array}{r} 121 \\ \cdot\ 62 \\ \hline 242 \\ 726 \end{array}$$

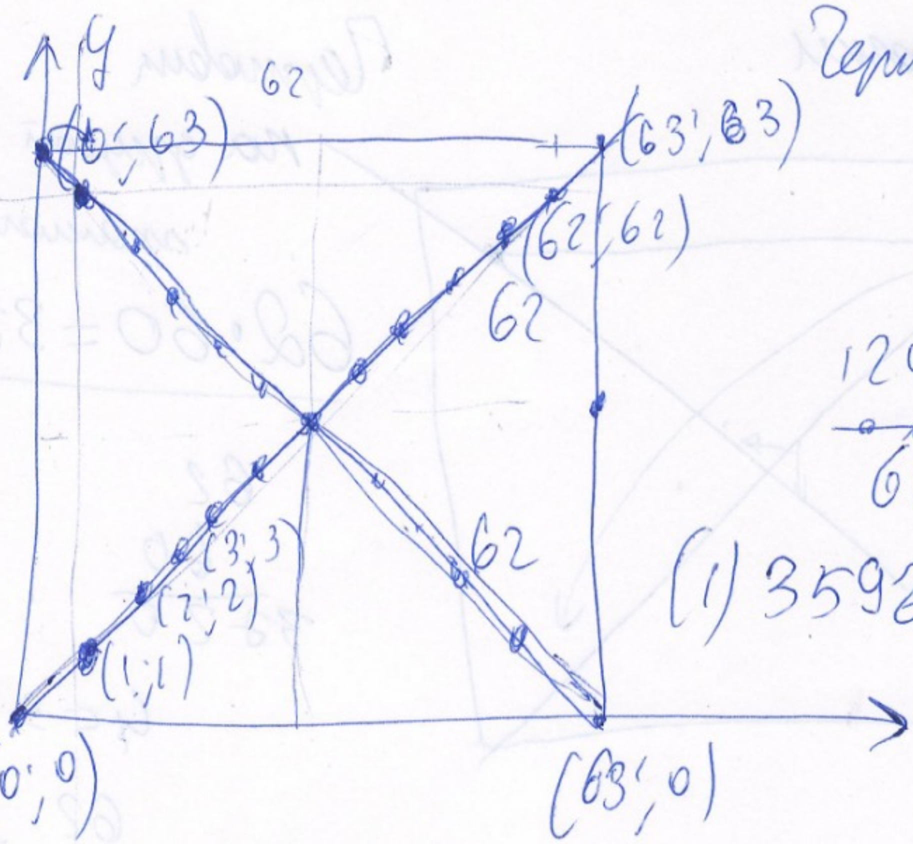
$$\begin{array}{r} 242 \\ 726 \\ \hline 7502 \end{array}$$

$62 \cdot 60 + 62 \cdot 61 + 3598 \cdot 124$

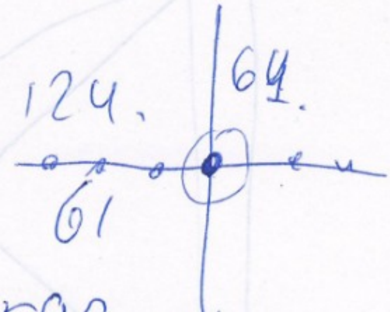
$62 \cdot 121 + 3598 \cdot 124.$

$$\begin{array}{r} 62 \\ \cdot\ 61 \\ \hline 62 \\ 372 \\ \hline 3782 \end{array}$$

Черновик

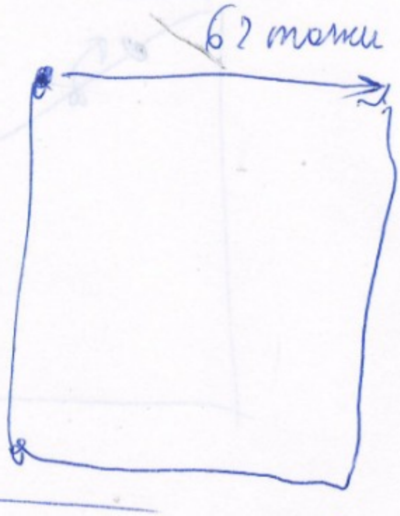


122.



(1) 3598·124.

$$\begin{array}{r} 3598 \\ \cdot\ 124 \\ \hline 14392 \\ +7196 \\ +3598 \\ \hline 446152 \end{array}$$



~~3600~~

62·62 =

·3
·2
·1
·0

3720.

63 − 2 = 2.

1) одна из точек

62·62 = 3844 − 62·2.

$$\begin{array}{r} 62 \\ \cdot\ 62 \\ \hline 124 \\ +372 \\ \hline 3844 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3720 \\ -\ 122 \\ \hline 3598 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3721 \\ -\ 123 \\ \hline 3598 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3844 \\ -\ 124 \\ \hline 3720 \end{array} - 122$$