Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007435**

ID профиля: **859091**

Вариант 12

$= \frac{32}{9};$

$\cos 2 - \sin^2\alpha = \frac{-13}{27}$

$\frac{13}{27}$

②

$b = 1$

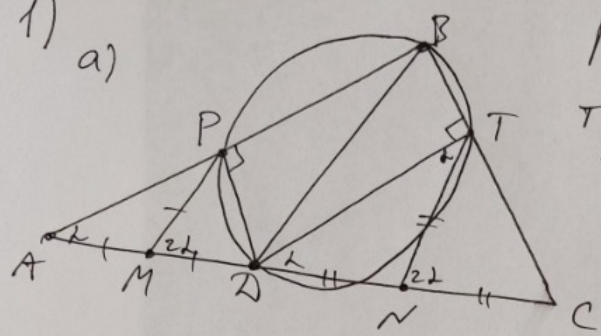
$b = -2$

$2b^2 - 4b - 1 = 0, \; D = 1$

④

Чистовик

1) а)



Поскольку BD – диаметр, то $\angle BPD = \angle BTD = 90°$. Тогда $\triangle APD$ и $\triangle DTC$ – прямоугольные, при этом PM и TN – медианы в соответствующих треугольниках. А значит, что $PM = AM = MD$ и $TN = DN = NC$ (медиана равна половине гипотенузы)

Обозначим $\angle TDN = \alpha$. Тогда $\angle DTN = \alpha$, как угол в равнобедреном треугольнике. Тогда внешний угол $\angle TNC$ равен сумме 2 внутрешних, то есть: $\angle TNC = 2\alpha$.

$TN \parallel PM$, значит: $\angle PMD = 2\alpha$.

Тогда: $\angle MPD = \angle MDP = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha;$

$\angle APM = 90° - \angle MPD = 90° - 90° + \alpha = \alpha$

$\angle PAM = \angle APM = \alpha$ (как углы в равнобедренном треугольнике.)

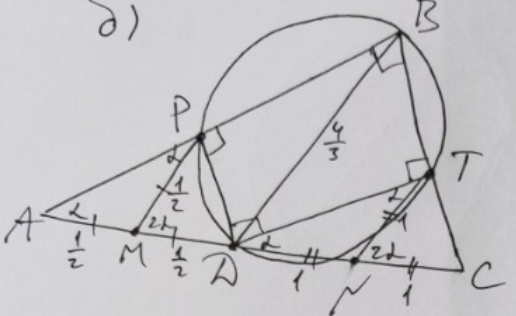
$\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle BCA.$

$\angle BCA = \frac{180° - \angle TNC}{2} = \frac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha.$

$\angle ABC = 180° - \cancel{\alpha} - 90° + \cancel{\alpha} = 90°.$

Чистовик

б)



$AM = MD = PM = \frac{1}{2}$;

$DN = NC = TN = 1$

То есть $BTDP$ – прямоугольник.

Тогда $BP = TD$ и $BT = PD$.

$TD = \sqrt{TN^2 + DN^2 - 2DN \cdot TN \cdot \cos(180-2\alpha)}$

$= \sqrt{1+1+2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos 2\alpha} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos 2\alpha}$

$PD = \sqrt{PM^2 + DM^2 - 2\cdot PM\cdot DM\cdot \cos 2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 2\alpha} =$

$= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\cos 2\alpha} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1-\cos 2\alpha}$;

$AP = \sqrt{PM^2 + AM^2 - 2PM\cdot AM\cdot\cos(180-2\alpha)} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 2\alpha} =$

$= \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{1+\cos 2\alpha}$;

$TC = \sqrt{TN^2 + NC^2 - 2TC\cdot NC\cdot\cos 2\alpha} = \sqrt{1+1-2\cos 2\alpha} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos 2\alpha}$

$TD^2 + BT^2 = \frac{16}{9}$;

$BT = PD$, значит:

$2(1+\cos 2\alpha) + \frac{1}{2}\cdot(1-\cos 2\alpha) = \frac{16}{9}$;

$2 + 2\cos 2\alpha + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha = \frac{16}{9} \quad |\cdot 2$

$4 + 4\cos 2\alpha + 1 - \cos 2\alpha = \frac{32}{9}$;

$5 + 3\cos 2\alpha = \frac{32}{9}$;

$3\cos 2\alpha = \frac{-13}{9}$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{-13}{27}$

$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{-13}{27}$

$\cos^2\alpha = \frac{7}{27}$

$\sin^2\alpha = \frac{20}{27}$

Чистовик

$$S_{ABC}=\frac{AB\cdot BC}{2}=\frac{(AP+PB)(BT+TC)}{2}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{1+\cos 2\alpha}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos 2\alpha}\right)\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{1-\cos 2\alpha}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos 2\alpha}\right)}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+\cos 2\alpha}\cdot\sqrt{1-\cos 2\alpha}\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{2}\right)^2}{2}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}\left(\sqrt{2}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^2}{2}=$$

$$=\frac{\sin 2\alpha\cdot\left(2+\tfrac{1}{2}+2\right)}{2}=\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{9}{2}=$$

$$=\frac{9}{2}\cdot\sqrt{\frac{20}{3^3}}\cdot\sqrt{\frac{7}{3^3}}=\frac{9\cdot 2\cdot\sqrt{35}}{2\cdot 3^3}=\frac{\sqrt{35}}{3}.$$

Ответ: а) 90°;

б) $\frac{\sqrt{35}}{3}$.

Чистовик

2) $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2} = 2\sqrt{(4-x)(x+1)}$

Сразу заметим, что из-за корней $4 \geq x \geq -1$

Сделаем замену:

$a = \sqrt{x+1}$;

$b = \sqrt{4-x}$.

Тогда:

$$\begin{cases} a^2+b^2 = x+1+4-x = 5 \\ a-b+3 = 2ab \end{cases}$$

$a(2b-1) = 3-b$;

$a = \frac{3-b}{2b-1}$

$\frac{(3-b)^2}{(2b-1)^2} + b^2 = 5$

$9-6b+b^2 + b^2(4b^2-4b+1) = 5(4b^2-4b+1)$

$9-6b+b^2+4b^4-4b^3+b^2 = 20b^2-20b+5$

$4b^4-4b^3-18b^2+14b+4 = 0$

Заметим, что данное уравнение можно переписать так:

$2(b-1)(b+2)(2b^2-4b-1) = 0$

То есть:

$$\left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = -2 \\ 2b^2-4b-1 = 0,\ D = 16+8 = 24 \end{array}\right.$$

Чистовик

$$\left[\begin{aligned} &b=1 \\ &b=-2 \\ &b=\frac{4+2\sqrt{6}}{4}=\frac{2+\sqrt{6}}{2} \\ &b=\frac{4-2\sqrt{6}}{4}=\frac{2-\sqrt{6}}{2} \end{aligned}\right.$$

Но $b=\sqrt{4-x}\geq 0$.

А значит $b\neq -2$ и $b\neq\frac{2-\sqrt{6}}{2}$ (что меньше 0, поскольку $4<6$, а значит $\sqrt{4}=2<\sqrt{6}$)

Тогда:

$$\left[\begin{aligned} &b=1 \\ &b=\frac{2+\sqrt{6}}{2} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &4-x=1 \\ &4-x=\frac{4+6+4\sqrt{6}}{4}=\frac{5+2\sqrt{6}}{2} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &x=3 \\ &x=4-\frac{5+2\sqrt{6}}{2}=\frac{3-2\sqrt{6}}{2} \end{aligned}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{aligned} &x=3 \\ &x=\frac{3-2\sqrt{6}}{2} \end{aligned}\right.$

Проверка: $\sqrt{3+1}-\sqrt{4-3}+3=2-1+3=4\overset{?}{=}2\sqrt{4+9-9}=4$ ✓

И: $\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}}+3\overset{?}{=}2\sqrt{\frac{(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})}{4}}$

$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}}+3\overset{?}{=}\sqrt{25-24}=1$

$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}}\overset{?}{=}-2\ \Big|\cdot\sqrt{2}$

Чистовик

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}} \overset{?}{=} -2\sqrt{2}$$

$$5 \cancel{-2\sqrt{6}} + 5 \cancel{+2\sqrt{6}} - 2\cdot\sqrt{25-24} \overset{?}{=} +8$$

$$10 - 2\cdot\sqrt{1} \overset{?}{=} 8 \quad \checkmark$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \dfrac{3-2\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$

211007435 (U859091 M1273379)

Чистовик

3) Перепишем 2-ое уравнение:

$ay = a x^2 + 4a^2 x + 4a^3 + 2$

Если бы $a = 0$, то:

$0y = 0x^2 + 4 \cdot 0 \cdot x + 4 \cdot 0 + 2 \Leftrightarrow 0 = 2 \Rightarrow \lightning$

То есть $a \neq 0$, а значит можно поделить на a:

$y = x^2 + 4ax + 4a^2 + \frac{2}{a}$

Общеизвестный факт, что координата x вершины параболы с уравнением $y = px^2 + qx + t$, равна $-\frac{q}{2p}$.

То есть координата x точки B равна:

$\frac{-4a}{2} = -2a.$

Подставляя это значение вместо x в уравнение, получим координату y точки B:

$y = 4a^2 - 8a^2 + 4a^2 + \frac{2}{a} = \frac{2}{a}.$

То есть:

$x_B = -2a;$

$y_B = \frac{2}{a};$

$B\left(-2a, \frac{2}{a}\right).$

Найдём координаты точки A. Рассмотрим данное 1-ое уравнение как квадратное от y:

$5y^2 + (2x - 6a)y + (x^2 - 2ax + 2a^2) = 0$

$D = (2x - 6a)^2 - 20(x^2 - 2ax + 2a^2)$

Чистовик

$\mathcal{D} = 4x^2 + 36a^2 - 24ax - 20x^2 + 40ax - 40a^2 =$
$= -16x^2 + 16ax - 4a^2 = -4(4x^2 - 4ax + a^2) =$
$= -4(2x-a)^2$

При этом $\forall a, x \in \mathbb{R}$: $-4(2x-a)^2 \le 0$.

Поскольку координаты точки A существуют, то корни этого уравнения существуют, а значит $\mathcal{D} = 0$. То есть $-4(2x_A - a)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x_A - a = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x_A = \frac{a}{2}$. Найдём y_A.

$$y_A = \frac{6a - 2x_A}{10} = \frac{6a - a}{10} = \frac{5a}{10} = \frac{a}{2}.$$

То есть $A\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$. Напомним, что $B\left(-2a, \frac{2}{a}\right)$.

Рассмотрим 2 случая:

1. $\begin{cases} y_A > 3 - x_A \\ y_B > 3 - x_B \end{cases}$, то есть A и B лежат выше прямой $x + y = 3$.

2. $\begin{cases} y_A < 3 - x_A \\ y_B < 3 - x_B \end{cases}$, то есть A и B лежат ниже прямой $x + y = 3$.

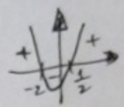
Нам достаточно рассмотреть только эти 2 варианта, поскольку A и B не лежат на прямой $x + y = 3$.

1. $\begin{cases} y_A > 3 - x_A \\ y_B > 3 - x_B \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{a}{2} > 3 - \frac{a}{2} \\ \frac{2}{a} > 3 + 2a \end{cases}$

Чистовик

$\begin{cases} a > 3 \\ 2 > 3a + 2a^2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $a > 0$, а значит можно домножить 2-ое уравнение на a без изменения знака.



$\begin{cases} a > 3 \\ 2a^2 + 3a - 2 < 0 \end{cases}$, $D = 9 + 16 = 25$

Парабола пересекает ось x в точках $\frac{-3-5}{4}$ и $\frac{-3+5}{4}$, то есть -2 и $\frac{1}{2}$. $2 > 0$, а значит отрицательные значения достигаются при $a \in \left(-2, \frac{1}{2}\right)$

Но пересечение $a > 3$ и $a \in \left(-2, \frac{1}{2}\right)$ — пустое множество $\Rightarrow$ значит нету таких a в ~~этом~~ варианте.

2. $\begin{cases} y_A < 3 - x_A \\ y_B < 3 - x_B \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{a}{2} < 3 - \frac{a}{2} \\ \frac{2}{a} < 3 + 2a \end{cases}$

$\begin{cases} a < 3 \\ \frac{2}{a} < 3 + 2a. \end{cases}$

Рассмотрим 2 случая:

2.1. $a > 0$;

2.2. $a < 0$.

2.1. $a > 0$

$\begin{cases} a < 3; \\ a > 0; \\ 2a^2 + 3a - 2 > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow a \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$

Значит $a \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$

Чистовик

2.2. $a<0$

$$\begin{cases} a<3 \\ a<0 \\ 2a^2+3a-2<0 \end{cases} \Rightarrow a \in \left(-2, \frac{1}{2}\right)$$

Значит $a \in (-2, 0)$.

Ответ: $a \in (-2, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007435**

ID профиля: **859091**

Вариант 12

$\angle BCT = 60^\circ + \angle OCT = 60^\circ + \angle CAD = 120^\circ$;
$\angle ADT = \angle ADB + \angle BDT = 60^\circ + \angle DBC = 120^\circ$

③

Чистовик

4) $\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4}; \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4}; \end{cases}$

Сделаем замену:

$a = x^2$;

$b = y^2$;

$\begin{cases} \frac{1}{a+b} + ab = \frac{5}{4}; \\ 2a^2 + 2b^2 + 5ab = \frac{9}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{1}{a+b} + ab = \frac{5}{4}; \\ 2(a+b)^2 + ab = \frac{9}{4} \end{cases}$

Сделаем замену:

$t = a+b$;

$k = ab$;

$\begin{cases} \frac{1}{t} + k = \frac{5}{4} \\ 2t^2 + k = \frac{9}{4} \end{cases}$

$k = \frac{5}{4} - \frac{1}{t} = \frac{9}{4} - 2t^2 \quad | \cdot 4t$

То есть:

$8t^3 - 4t - 4 = 0$

$2t^3 - t - 1 = 0$

211007435 (U859091 M1273380)

Чистовик

$2t^3 - t - 1 = 0$

Перепишем это так:

$(t-1)(2t^2+2t+1) = 0$

$\forall t \in R: 2t^2+2t+1>0$, поскольку $D = 4-8=-4<0$ и коэффициэнт при t^2 (т.е. 2) больше 0.

Значит $t = 1$.

$k = \frac{5}{4} - \frac{1}{t} = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} a+b=1; \\ ab = \frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=1-b \\ (1-b)b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$b^2 - b + \frac{1}{4} = 0$

$4b^2 - 4b + 1 = 0$

$(2b-1)^2 = 0$

$b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2};$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}; \\ y^2 = \frac{1}{2}; \end{cases}$$

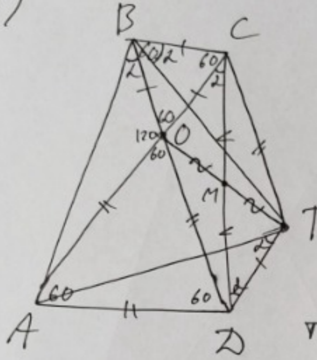
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Чистовик

~~№6~~

6)



а) Поскольку $\angle BCO = \angle OAD = 60°$, то $BC \parallel AD$, то есть $ABCD$ — трапеция. К тому же, $\triangle ABO = \triangle DCO$ за 2 сторонами и углом между ними, а значит $AB = CD$, то есть $ABCD$ — равнобокая трапеция.

Поскольку CD и OT делят друг друга пополам, то $OCTD$ — паралелограм. Назовём середину CD — M.

Значит $CO \parallel TD$ и $OD \parallel CT$. ~~Тогда~~

А также, $OC = TD$ и $OD = CT$. Тогда $ACTD$ — равнобокая трапеция ($TD \parallel AC$ и $CT = OD = AD$). И $BCTD$ — равнобокая трапеция (аналогично).

Обозначим $\angle ABD = \alpha$. $\angle ACD = \alpha$, поскольку $ABCD$ — равнобокая, а значит вписаная и $\angle ABD$ и $\angle ACD$ опираются на одну дугу.

$\angle ACD$ и $\angle ATD$ опираются на одну дугу в описаной окружности $ACTD$, а значит $\angle ATD = \alpha$.

$\angle TDC = \angle ACD = \alpha$, поскольку $AC \parallel TD$.

$\angle CDT$ и $\angle CBT$ опираются на одну дугу в описаной окружности $BCTD$, а значит $\angle CBT = \angle CDT = \alpha$.

$\angle AOB = 180° - \angle BOC = 120°$.

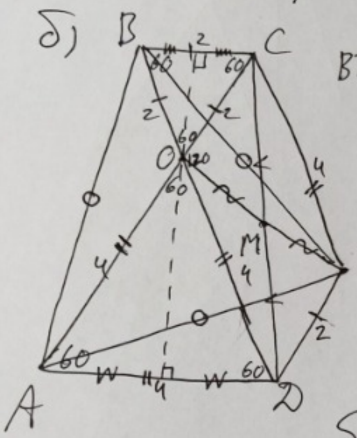
$\angle BCT = 60° + \angle OCT = 60° + \angle CAD = 120°$;

$\angle ADT = \angle ADB + \angle BDT = 60° + \angle DBC = 120°$

Чистовик

А значит $\triangle AOB = \triangle TCB = \triangle ADT$ за двумя сторонами и углом между ними. А значит $AB = BT = AT$, то есть $\triangle ABT$ — равносторонний.

б)



$BT = AT = AB = \sqrt{OB^2 + OA^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos AOB} =$

$= \sqrt{4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cos 120} =$

$= \sqrt{20 + 2 \cdot 8 \cdot \cos 60} = \sqrt{20 + 2 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{28} =$

$= 2\sqrt{7}$.

Высота $\triangle ABT$ равна:

$h_{ABT} = \sqrt{AT^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{4 \cdot 7 - 7} = \sqrt{21}$

$S_{ABT} = \frac{AB \cdot h_{ABT}}{2} = \frac{\cancel{2} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{\cancel{2}} = 7\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h_{ABCD}$ поскольку $BC \parallel AD$, то h_{BOC} и h_{AOD} лежат на одной прямой

$h_{ABCD} = h_{BOC} + h_{AOD} = \sqrt{OB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} + \sqrt{AO^2 - \left(\frac{AD}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{4 - 1} + \sqrt{16 - 4} = \sqrt{3} + \sqrt{12} = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = \frac{2 + 4}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 3 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$;

Ответ: б) $\frac{7}{9}$.

Чистовик

5) Найдём количество способов выбрать точку, которая лежала бы на $y=x$ или $y=63-x$ и такую, которая подходила бы по условию, то есть имела целочисленые координаты. На прямой $y=x$ нам подходят точки: $(1,1)$; $(2;2)$;...(k,k);..$(62,62)$, которых 62. Другие не подходят, ибо лежат на границе или вне квадрата (или имеют не целые координаты).

На прямой $y=63-x$ подходят точки $(1,62)$; $(2,61)$; ... $(k,63-k)$, ... $(62,1)$, которых тоже 62. Другие не подходят, ибо лежат на границе или вне квадрата (или имеют не целые координаты).

Прямые $y=x$ и $y=63-x$ пересекаются в точке $(31,5; 31,5)$, (что можно доказать, приравняв $x_1=63-x_1 \Rightarrow x_1=31,5$, при этом $y_1=x_1=31,5$); которая имеет нецелочисленые координаты, а значит нам не подходит. Значит множества точек, которые нам подходят не пересекаются. А это значит, что количество способов выбрать точку на прямых $y=x$ или $y=63-x$, которая подходит под условие — $62+62=124$.

Теперь выберем вторую точку. Нам подходят все узлы сетки, кроме тех, что ~~находятся~~ имеют общую координату x или y с первой точкой, и тех, что находятся не внутри квадрата.

Чистовик

Внутри квадрата находятся 62^2 узлов. Теперь откинем 1 „столбец" и 1 „строку" на которых находится 1-ая точка. В „столбце" и „строке" по 62 узла, но при этом есть 1 общий. Значит количество узлов внутри квадрата, которые нам не подходят равно: $62+62-1=123$.

Значит способов выбрать второй узел всего:

$62^2-123=3844-123=3721$.

То есть, выбирая сначала первый узел одним из 124 способов, а потом второй одним из 3721 способов, получаем подходящие 2 узла сетки. То есть всего способов выбрать 2, подходящих под условие узла:

$124\cdot 3721=461404$.

Ответ: 461404.