Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

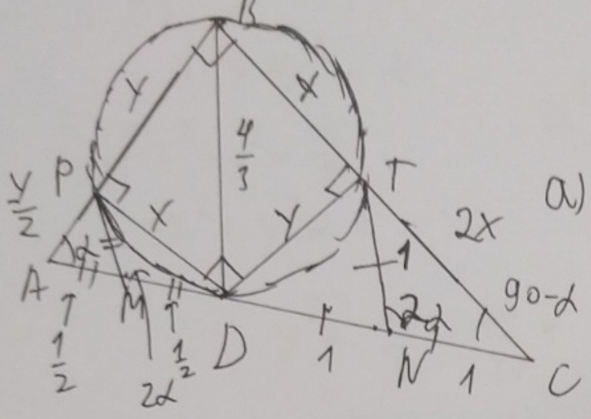
Шифр: **211007362**

ID профиля: **215934**

Вариант 12

Чистовик.

1



M_1 – сер AD

N – сер CD

а) 1) BD – диаметр =>

∠DPB, ∠BTD опир на диаметр =>

∠DPB = ∠DTB = 90

2) ∠APD = ∠DTC = 90° при этом PM, TN – медианы =>

$PM = AM_1 = MD$ и $DN = NC = TN$

3) ∠PAM = α = ∠AMP , ∠PMD = 2α

по ~~услов~~ условию PM ∥ TN => ∠PMD = ∠TNC = 2α =>

∠NNC = ∠NCT = 90 − α

∠ABC по сумме углов Δ будет равняться 180 − α − (90 − α) = 90

∠ABC = 90°

б) TN = 1 PM = $\frac{1}{2}$ BD = $\frac{4}{3}$

1) мы знаем что PM = AM = MD ($=\frac{1}{2}$) и DN = TN = NC = 1

2) ∠ABC = 90° = ∠DPB = ∠DTB = ∠PDT = 90° => PBTD – прямоугольник (

(PB = y, BT = x)

3) ∠PMD = ∠TNC (паррал. прямые PM и TN) и PM = MD, TN = NC =>

=> ΔPMD ∼ ΔTNC $\frac{TN}{PM} = \frac{CT}{PD}$ => CT = 2x также и с ΔAPM и ΔDNT =>

=> AP = $\frac{y}{2}$

из Δ BTD $x^2+y^2=\frac{16}{9}$ (теорема Пифагора)

(1) страница

Чистовик

1. (продолжение)

$\triangle DTC$

$y^2+4x^2=4$

$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{16}{9} \\ 4x^2+y^2=4 \end{cases}$

$3x^2=\frac{36-16}{9}=\frac{20}{9}$

$x^2=\frac{20}{27}$

$$y^2=\frac{16}{9}-\frac{20}{27}=\frac{16\cdot3-20}{27}=\frac{48-20}{27}=\frac{28}{27}$$

$$S_{\triangle BAC}=\frac{\frac{3}{2}y\cdot3x}{2}=\frac{9xy}{4}=\frac{9\sqrt{\frac{20}{27}}\cdot\sqrt{\frac{28}{27}}}{4}=$$

$$=\frac{\sqrt{28\cdot20}\cdot\frac{9}{27}}{4}=\frac{4\cdot\sqrt{35}}{12}=\frac{\sqrt{35}}{3}$$

Ответ: а) $\angle ABC=90^\circ$ б) $S_{ABC}=\frac{\sqrt{35}}{3}$

Чистовик

2 $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$4+3x-x^2 = (4-x)(x+1)$

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{(4-x)(x+1)} \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \\ \sqrt{x+1} + 3 = \sqrt{4-x} + 2\sqrt{(4-x)(x+1)} \end{cases}$

$4-x = t \Rightarrow x+1 = 5-t$ по смыслу задачи $t \geq 0$ и $t \leq 5$

$\cancel{t \neq 4}$

$\sqrt{5-t} + 3 = \sqrt{t} + 2\sqrt{(5-t)t}$

$\cancel{\sqrt{5-t}(1-2\sqrt{t}) = \sqrt{t} - 3}$

~~возведем в квадрат~~

$\cancel{5-t+9+6\sqrt{5-t} = t + 2(5-t)\cdot t}$

$\sqrt{5-t}\,(1-2\sqrt{t}) = \sqrt{t} - 3$ возведем в квадрат

получим

$\cancel{(5-t)(1+4t-4\sqrt{t})}$ т.к $\sqrt{t} - 3$ будет меньше 0

т.к $t \leq 5$ то и $1 - 2\sqrt{t}$ тоже меньше 0

т.е $\cancel{t < \frac{1}{\sqrt{2}}}$ $t > \frac{1}{4}$

Возведем в квадрат

$(5-t)\,(1-2\sqrt{t})^2 = (\sqrt{t}-3)^2$

$5+20t-20\sqrt{t} - t - 4t^2 + 4t\sqrt{t} = t + 9 - 6\sqrt{t}$

$4t^2 - 4t\sqrt{t} - 18t + 14\sqrt{t} + 4 = 0$

Чистовик.

2 (продолжение)

$$2t^2 - 2t\sqrt{t} - 9t + 7\sqrt{t} + 2 = 0$$

$\sqrt{t} = 1$ $\qquad x < \ 1 > \frac{1}{4}$

$\Downarrow$

$$(\sqrt{t} - 1)(2t\sqrt{t} - 9\sqrt{t} - 1) = 0$$

$2t\sqrt{t} - 9\sqrt{t} - 1 = 0$ $\qquad 5 \geq t > \frac{1}{4}$

1) $\sqrt{t} = 1$

$\sqrt{4-x} = 1 \Rightarrow x = 3$

2) $2t\sqrt{t} - 9\sqrt{t} - 1$ при $t > \frac{1}{4}$

функция будет возрастать при $t > 1$ хотя при $t = 1$

$2 - 9 - 1 = -8$ и при $t = 5$

$2t\sqrt{t} - 9\sqrt{t} - 1 < 0$

Ответ. $x = 3$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

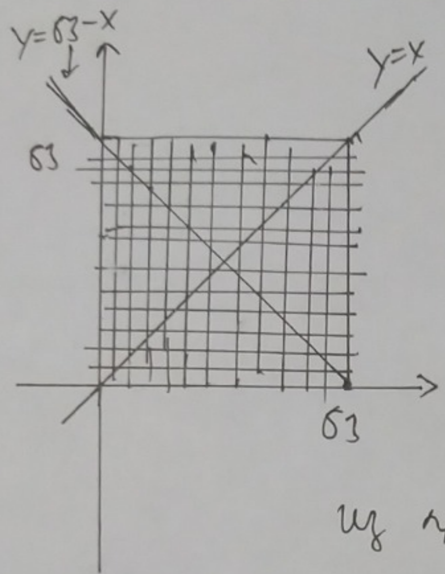
Шифр: **211007362**

ID профиля: **215934**

Вариант 12

Чистовик.

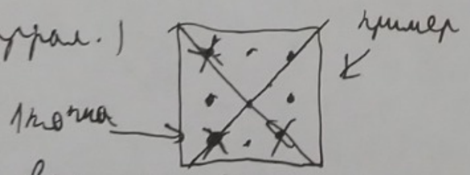
5



У нас может быть 2 случая располож точек
1) Обе точки лежат на этих прямых
2) Одна точка лежит на одной из прямых а 2-ая нет

Рассмотрим 1 случай
Всего кол-во узлов лежащих на этих прямых $k_1 = (63-1)\cdot 2 = 124$

~~т.е~~ т.е 1 точка может лежать на этих 124 узлах.
А вторая точка может лежать только на ~~на~~ 121 узлах
(не считая 1-ую точку и 2 узлов при котором прямые будут паралл.)



т.е всего способов будет $\frac{124\cdot 121}{2} = 62\cdot 121$ ~~(т.к 2 варианта могут совпадать)~~

2 случай одна точка лежит а вторая нет
Такие одна точка может находиться на 124 узлах
Найдем кол-во способов располож 2-ой точки.
Это будет → $62^2 - 124 - (62-2)\cdot 2$ ~~всего точек~~
62^2 - всего точек внутри квадрата
124 - узлых на 2-х прямых
$(62-2)\cdot 2$ - точки при котором будет паралл прямая координатам

1 страница.

211007362 (U215934 M1273700)

Чистовик

5 (продолжение)

2 случай т.е всего кол-во вар. будет

$124 \cdot (62^2 - 124 - 120) = 15960$

Всего кол вариантов будет

$K_1 + K_2 = 62 \cdot 121 + 15960 = 7502 + \cancel{23462}$ 15960 $=$

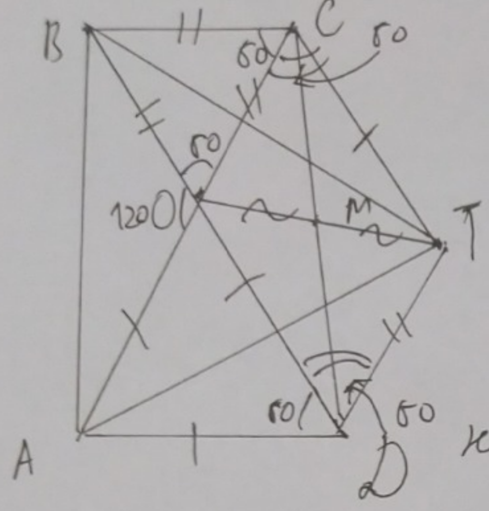
$= 23462$

Ответ: 23462

211007362 (U215934 M1273700)

6 задача

чистовик.



а) ABCD – будет равнобокой трапецией

$\Delta BOA = \Delta OCD \Rightarrow BA = CD$

1) $OM = MT$

(O сим относит. т. M) $\Rightarrow$

можно сказать что OM будет медианой ΔCOD и OT – удвоенная медиана $\Rightarrow \Delta COD = \Delta CTD \Rightarrow$

$\Rightarrow$ CODT будет парраллелограмом $\Rightarrow OD = CT$, $CO = TD$

2) $\angle COD = 180 - \underbrace{60}_{\angle BOC} = 120^\circ$

т.к мы узнали что CODT – паррал. то $\angle OCT = \angle ODT = 180 - 120 = 60^\circ$

3) $\angle BCT = \angle ADT = \angle BOA = 120^\circ$

$BO = BC = TD$

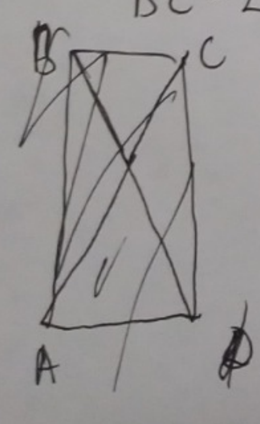
$CT = AO = AD$

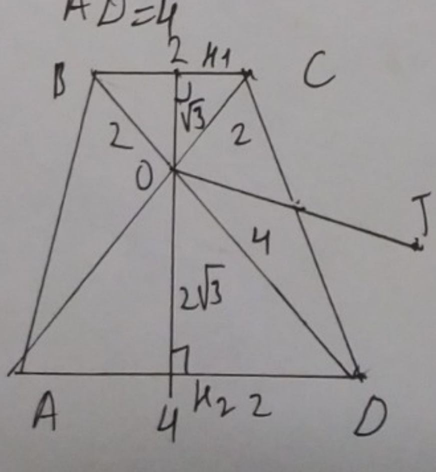
$\Rightarrow \Delta BOA = \Delta BCT = \Delta ADT$ (по 2 стор и углу между ними) $\Rightarrow$

$AB = BT = AT$

т.е ΔABT – равносторонний.

б) $BC = 2$ $AD = 4$





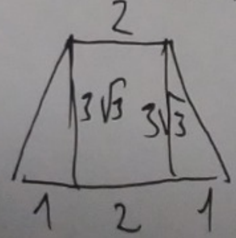
OH_1 – высота от O к BC

$OH_1 = \sqrt{3}$

$OH_2 = 2\sqrt{3}$ (высот к AD из O)

$H_0 = 3\sqrt{3}$

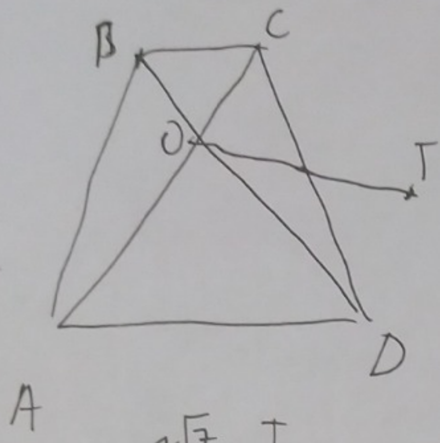
$S_{ABCD} = 3\sqrt{3} \cdot 1 + 2 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$



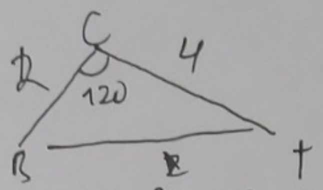
3 страница

черновик

6. (продолжение)



ΔABT



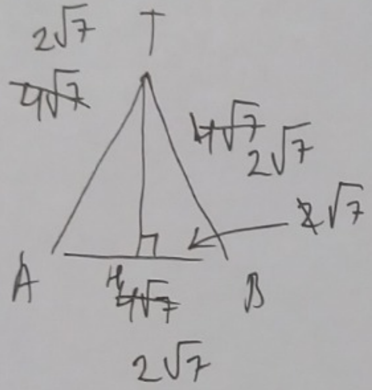
$BT = AB = AT$

(теорема кос)

$BT^2 = 2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot \cos 120 =$

$20 - 16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 28$

$BT = 2\sqrt{7}$



$\cancel{HT = 2\sqrt{21}}$

$\cancel{S_{ABT} = \frac{2\sqrt{21}\cdot 2\sqrt{7}}{2} = 2}$

$HT = \sqrt{21}$

$$S_{ABT} = \frac{\sqrt{21}\cdot 2\sqrt{7}}{2} = 7\sqrt{3}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$$

Ответ: б) $\frac{7}{9}$

4

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$x^2+y^2 = m$ $\quad m \geq 0$

$x^2 \cdot y^2 = n$ $\quad n \geq 0$

$x^4+y^4 = m^2 - 2n$

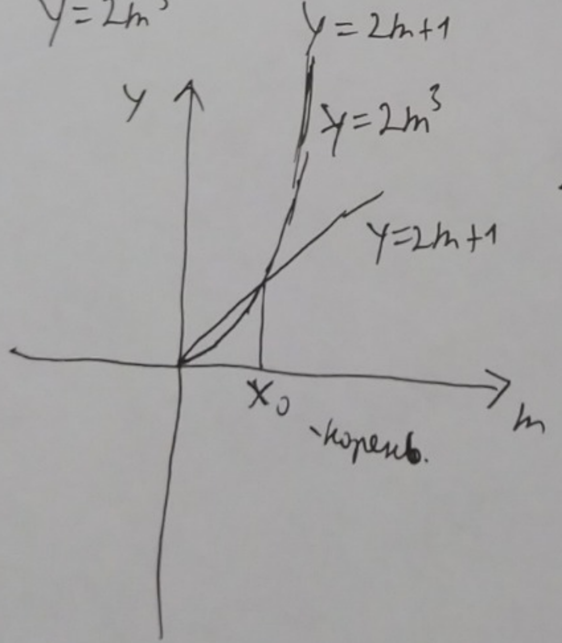
$$\begin{cases} \frac{1}{m} + n = \frac{5}{4} \\ 2(m^2-2n) + 5n = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{m} + n = \frac{5}{4} \\ 2m^2 + n = \frac{9}{4} \end{cases} \quad - \qquad 2m^2 - \frac{1}{m} = 2$$

$$2m^3 - 1 = 2m$$

$$2m^3 - 2m - 1 = 0$$

$y = 2m^3$



~~$< x_0 < 2$~~

$1 < x_0 < 1{,}5$