Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

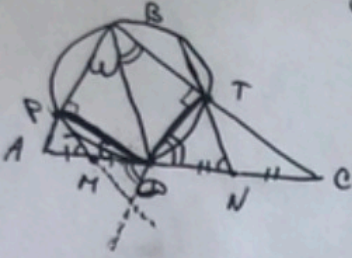
Шифр: **211007245**

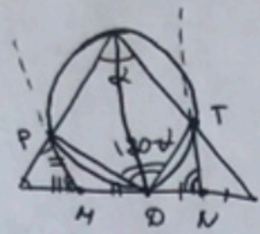
ID профиля: **293610**

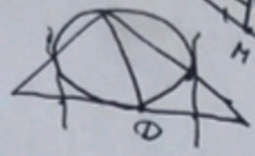
Вариант 12

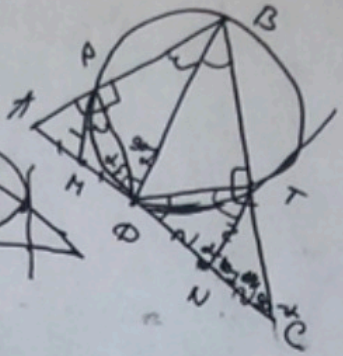
Черновик

1)









2) $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$

$(x+1)(4-x)=4-x^2+3x$

$\sqrt{x+1}=a$

$\sqrt{4-x}=b$

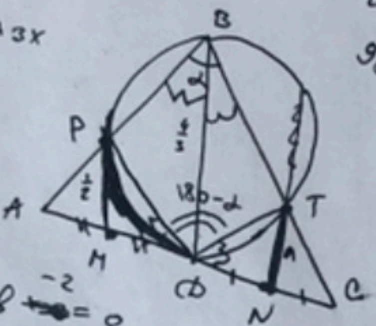
$\begin{cases} a-b+3=2ab \\ b^2+a^2=5 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2+b^2-2ab+a-b\cancel{+3}-2=0 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$

$\begin{cases} (a-b)^2+(a-b)-2=0^* \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$

$^*\ t^2+t-2=0$

$(t-1)(t+2)=0$



$\angle TBD=\angle TDN$

$\angle PDM+\angle TDN=\alpha$

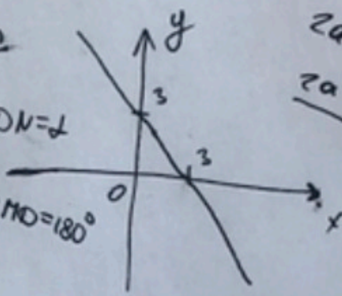
$\angle TND+\angle PMD=180^\circ$

$90-\alpha$

$\frac{2-2a^2-3a}{a}>0$

$\frac{2}{a}-2a-3>0$ $\quad y=3-x$

$\frac{2a^2+3a-2}{a}<0$



$2a^2+3a-2=0$

$D=9+4\cdot4=25=5^2$

$2a+3-\frac{2}{a}>0$

$\frac{2a^2+3a-2}{a}>0$

$a_1=\frac{-3+5}{4}=\frac{1}{2}$

$a_2=\frac{-3-5}{4}=-2$

$a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$

$\frac{a}{2}-\frac{a}{4}=$

$2b^2-4b+4-5=0$

$2b^2-4b-1=0$

$D_1=4+2=6$

$b=\frac{2\pm\sqrt6}{2}$

$D=16+4\cdot2=24=2\sqrt6$

$\frac{6-4\sqrt6+4}{4}=$

$=\frac{10-4\sqrt6}{4}$

$ax^2+4a^2x-\cancel{ay}+4a^3+2=ay$

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}=(x+2a)^2+\frac{2}{a}$

$x_0=-2a$

$y_0=\frac{2}{a}$

$\frac{2+\sqrt6-4}{2}=\frac{\sqrt6-2}{2}$

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

x^2+ $\quad x^2-2ax+a^2\ -x^2+2xy-4y^2=$

$9y^2-6ay+a^2$ $\quad =\cancel{2y(x-y)}$

$\left(\frac{\sqrt6-2}{2}\right)^2=\frac{(\sqrt6-2)^2}{4}=\frac{6+4-4\sqrt6}{4}=\frac{10-4\sqrt6}{4}-4=\frac{6-4\sqrt6}{4}$

$4-\left(\frac{10-4\sqrt6}{4}\right)=\frac{16-10+4\sqrt6}{4}=\frac{6+4\sqrt6}{4}$

$y\geq3-x$

$x^2+5y^2-2ax+2xy-6ay+2a^2=0$

$x^2-2x(a-y)+(5y^2-6ay+2a^2)=0$

$D_1=a^2+y^2-2ya-5y^2+6ay-2a^2=-a^2-4y^2+4ay=-(2y-a)^2\leq0$

~~$x^2+(x-a)^2+(3y-a)^2=(x$~~

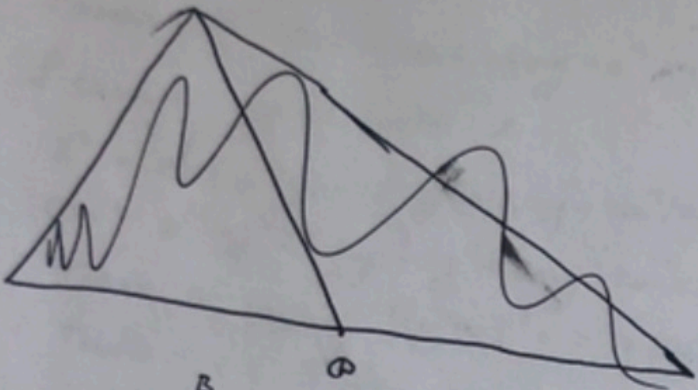
$x^2+2xy+y^2-2ax-6ay+4y^2+2a^2$

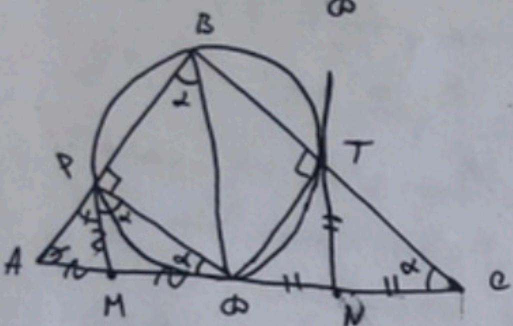
$\frac{1}{4}x^2+4y^2+2xy+\frac{3}{4}x^2-2ax-6ay+y^2+2a^2$

211007245 (U293610 M1274592)

1. Чистовик

①





а) 1) $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$, т.к. они опираются на диаметр BD $\Rightarrow$ $\angle APD = \angle CTD = 90^\circ$ как смежные углы $\Rightarrow$ PM и TN – медианы из прямых углов $\Rightarrow$ $PM = AM = MD$; $TN = CN = ND$

2) По т. об угле между кас. и секущей $\angle PBD = \angle PDM = \alpha$, но $PM = MD \Rightarrow \angle DPM = \alpha$

3) Заметим, что $\angle BDP = 90^\circ - \alpha$; $\angle PDM = \alpha \Rightarrow \angle BDM = 90^\circ \Rightarrow BD$ – высота к AC

4) $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMD = \angle TNC$ как соотв. углы $\Rightarrow \angle TNC = \angle PMD = 180 - 2\alpha$, $\triangle TNC$ – р/б $\Rightarrow \angle NCT = \alpha = \frac{180 - 180 + 2\alpha}{2}$

5) Рассм-м $\triangle ABD$ и ACB.
$\angle BAC$ – общий; $\angle ABD = \angle ACB = \alpha \Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACB \Rightarrow \angle ABC = \angle ADB = 90^\circ$

Ответ: $90^\circ = \angle ABC$

б) Из пункта а) известно, что $PM = MD = AM \Rightarrow AM + MD = AD = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$; $TN = NC = ND$ по св. медианы из прямого угла $\angle CTD$, т.к. $\angle BTD = \angle CTD = 90^\circ \Rightarrow CN + ND = CD = 1 + 1 = 2$

Тогда $AC = AD + CD = 1 + 2 = 3$

$S_{ABC} = BD \cdot AC \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 2$

Ответ: $S_{ABC} = 2$

211007245 (U293610 M1274592)

Чистовик

2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

(2)

$\sqrt{x+1} = a$

$\sqrt{4-x} = b$ – Замена; $a \geq 0$; $b \geq 0$

$\begin{cases} a - b + 3 = 2ab \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab + a - b - 2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0 \,* \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow$

* Пусть $a - b = t$, тогда $t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - b = 1 \\ a - b = -2 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} a - b = -2 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b + 1 \\ b^2 + 1 + 2b + b^2 = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} a = b - 2 \\ b^2 + 4 - 4b + b^2 = 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b + 1 \\ b^2 + b - 2 = 0 \quad (1) \end{cases} \\ \begin{cases} a = b - 2 \\ 2b^2 - 4b - 1 = 0 \quad (2) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

(1) $b^2 + b - 2 = 0 \Leftrightarrow (b-1)(b+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = -2 \end{array}\right.$, но $b \geq 0 \Rightarrow b = 1$

(2) $2b^2 - 4b - 1 = 0$

$D_1 = 4 + 2 = 6$

$b = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$, но $b \geq 0 \Rightarrow b = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = \frac{\sqrt{6}-2}{2} \\ b = \frac{2+\sqrt{6}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

Обратная замена:

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+1} = 2 \\ \sqrt{4-x} = 1 \end{cases} \quad (3) \\ \begin{cases} \sqrt{x+1} = \frac{\sqrt{6}-2}{2} \\ \sqrt{4-x} = \frac{\sqrt{6}-2}{2} \end{cases} \quad (4) \end{array}\right.$

(3) $\begin{cases} x + 1 = 4 \\ 4 - x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

(4) $\frac{\sqrt{6}-2}{2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 = \frac{10 - 4\sqrt{6}}{4} \\ 4 - x = \frac{10 - 4\sqrt{6}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6 - 4\sqrt{6}}{4} \\ x = \frac{6 + 4\sqrt{6}}{4} \end{cases}$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow$ не подходит

Ответ: $x = 3$

Чистовик

3. Точка A: $2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$ 3

Решим ур-ие отн. x

$x^2 - 2x(a-y) + (5y^2 - 6ay + 2a^2) = 0$

$D_1 = a^2 + y^2 - 2ay - 5y^2 + 6ay - 2a^2 = -a^2 - 4y^2 + 4ay = -(2y-a)^2 \le 0$

Точка A сущ. $\Rightarrow (2y-a)^2 = 0 \Rightarrow 2y = a$

Тогда $x = \frac{a-y}{2}$, но $2y = a \Rightarrow x = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 2x$

$y = \frac{a}{2}$; $x = \frac{a - \frac{a}{2}}{2} = \frac{a}{4}$

Точка B: $ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$, вершина пар-лы

$ay = ax^2 + 4a^2x + 4a^3 + 2$

$a \neq 0$, т.к. иначе $ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 2 \neq 0$ – не пар-ла

Поделим на a:

$y = x^2 + 4ax + 4a^2 + \frac{2}{a}$

$y = (x + 2a)^2 + \frac{2}{a}$

$x_0 = -2a$; $y_0 = \frac{2}{a}$

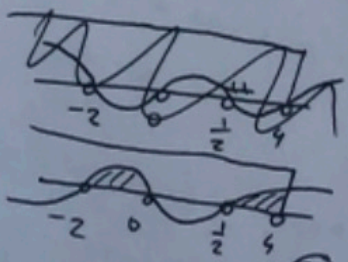
$A = \left(\frac{a}{4}; \frac{a}{2}\right)$; $B = \left(-2a; \frac{2}{a}\right)$

Есть 2 случая: когда A и B лежат ниже $x + y = 3$, т.е. ниже

$y = 3 - x \Rightarrow y < 3 - x$; и когда они лежат выше, т.е. $y > 3 - x$

1) $y < 3 - x$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} < 3 - \frac{a}{4} \quad |\cdot 4 \\ \frac{2}{a} < 3 + 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a < 12 - a \\ \frac{2a^2 + 3a - 2}{a} > 0 \end{cases}^{*} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 4 \\ \frac{(a - \frac{1}{2})(a+2)}{a} > 0 \end{cases}$$



~~(написано выше)~~

* $2a^2 + 3a - 2 = 0$

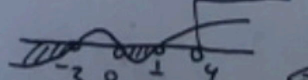
$D = 9 + 16 = 5^2$

$a_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$

$\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a \in (-2; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; 4\right)$

2) $$\begin{cases} \frac{a}{2} > 3 - \frac{a}{4} \\ \frac{2}{a} > 3 + 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a > 12 - a \\ \frac{2a^2 + 3a - 2}{a} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 4 \\ \frac{(a - \frac{1}{2})(a+2)}{a} < 0 \end{cases}$$



$\Leftrightarrow$ нет решений

Ответ: $a \in (-2; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; 4\right)$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007245**

ID профиля: **293610**

Вариант 12

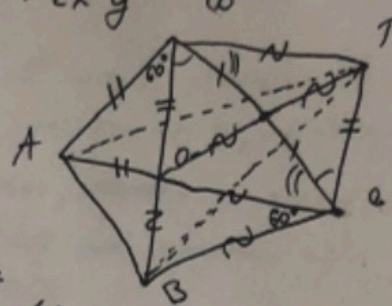
Черновик

1) $\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$

$x^2+y^2=t$; $t^2 = x^4+y^2+2x^2y^2$

$\begin{cases} t+\frac{1}{t} = \frac{5}{4} \\ 2t^2+x^2y^2=\frac{9}{4} \end{cases}$

$4t^2-5t+4=0$



$\begin{cases} 4x^4y^2+4x^2y^4-5x^2-5y^2+4=0 \\ 8x^4+8y^4+20x^2y^2-9=0 \end{cases}$

$D = 25-4\cdot4\cdot4$

$t^{16t}+\frac{1}{t}^{16}-\frac{5}{4}^{4t} = \frac{4t^2-5t+4}{4t}=0$

$8x^4+8y^4+4x^4y^2+4x^2y^4-5x^2-5y^2+20x^2y^2+5=0$

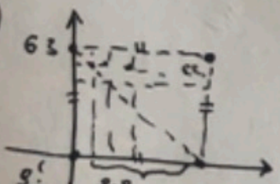
$(x+y)^4 =$

$D = 25-4\cdot4\cdot4<0$

$4(x^4+y^4+2x^4y^2+2x^2y^4) = 4(x^2(2x^2+$

	2	0	−1	−1
1	2	2	1	0

2)



$\frac{2}{9}$ $\frac{9!}{7!\cdot2} = \frac{8\cdot9}{2} = 4\cdot9=36$

$\begin{array}{r} 62 \\ \times 62 \\ \hline 124 \\ 372 \\ \hline 3844 \end{array}$

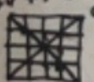
15 21 26 30

$8+7+6+5+4+3+2+1=36$

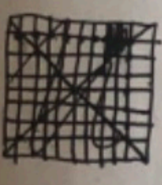
$\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

$2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{5}{4} = \frac{9}{4}$

$D_1 = 1-2$



$62-1+1-62\cdot62 =$ кол-во узлов



Всего способов выбрать 2 узла $62\cdot61$, где ~~2 или 2 на соседних~~

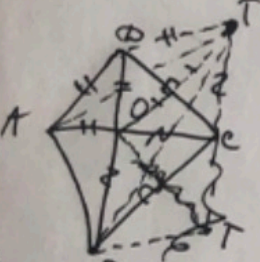
~~Diag: $62\cdot62-x$~~

Если они лежат на прямой $\parallel Ox$: ~~сторон~~

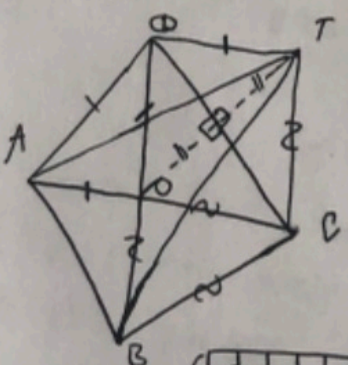
$\begin{array}{r} 23 \\ \times 12 \\ \hline 46 \\ 23 \\ \hline 276 \end{array}$

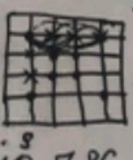
$\begin{array}{r} 35 \\ \times 18 \\ \hline 280 \\ 35 \\ \hline 630 \end{array}$

3)



$62-1+1$





$(4^3-1)^6\cdot2-1=5$

16 узлов $=(k-1)^2$

$C^2_{16} = \frac{16!}{2\cdot14!} = 15\cdot8 = 120$

$\begin{array}{r} 7.540.786 \\ -7.066.920 \\ \hline 473866 \\ -15004 \\ \hline 458862 \end{array}$

$(5-1)\cdot2=8$ - на гл. д.

всего $16-8=8$

$C^2_8 = \frac{8!}{2\cdot6!} = 7\cdot4=28$

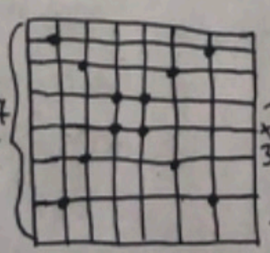
$4^{12}\cdot3^{12}-1=23$

$\begin{array}{r} 3884 \\ \hline 18 \\ 18 \\ \hline 8 \\ 8 \\ \hline 4 \\ 4 \\ \hline 0 \end{array} \Big| \begin{array}{l} 2 \\ \hline 1942 \end{array}$

$\begin{array}{r} 3760 \\ 2 \\ \hline 17 \\ 16 \\ \hline 16 \end{array} \Big| \begin{array}{l} 2 \\ \hline 1880 \end{array}$

$120° - \frac{1}{2}$

$\begin{array}{r} 3883 \\ \times 1842 \\ \hline 7766 \\ 15532 \\ 31064 \\ 3883 \\ \hline 7540786 \end{array}$



$\begin{array}{r} 3759 \\ \times 188 \\ \hline 30072 \\ 30072 \\ 3759 \\ \hline 7066920 \end{array}$

$630-108-276$

$\begin{array}{r} 62 \\ \times 61 \\ \hline 62 \\ 372 \\ \hline 3782 \end{array}$

$\begin{array}{r} 3782 \\ \times 2 \\ \hline 7564 \end{array}$

~~3348~~

$\begin{array}{r} 7563 \\ \times 124 \\ \hline 30252 \\ 15126 \\ 7563 \\ \hline 937812 \end{array}$

$\begin{array}{r} 121 \\ \times 124 \\ \hline 484 \\ 242 \\ 121 \\ \hline 15004 \end{array}$

211007245 (U293610 M1274593)

1) 6^2 узлов $=36$
2) $6\cdot2=12$
3) $C^2_{36} = 35\cdot18$
4) $36-12=24$
5) $C^2_{24} = 23\cdot12$
6) $5\cdot2-1=9$
7) $9\cdot6\cdot2=108$

Чистовик

4. $$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

1

$\begin{cases} x^2+y^2=a \\ x^2y^2=b \end{cases}$ – Замена

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a}+b=\dfrac{5}{4} \\ 2a^2+b=\dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2-\dfrac{1}{a}=1 \\ 2a^2+b=\dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2a^3-a-1}{a}=0\ * \\ 2a^2+b=\dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(a-1)(2a^2+2a+1)}{a}=0 \\ 2a^2+b=\dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

* $a=1$ – корень по т. Виета $\Rightarrow$ по схеме Горнера:

	2	0	−1	−1
1	2	2	1	0

$\Rightarrow 2a^3-a-1=(a-1)(2a^2+2a+1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=1 \\ 2a^2+2a+1=0\ \varnothing,\ \text{т.к. } D<0 \end{array}\right. \\ 2a^2+b=\dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 2+b=\dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1-y^2 \\ y^2-y^4=\dfrac{1}{4}\ (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1-\dfrac{1}{2} \\ y^2=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{1}{2} \\ y^2=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(1) $y^2=t$, тогда $t^2-t+\frac{1}{4}=0 \Leftrightarrow 4t^2-4t+1=0 \Leftrightarrow (2t-1)^2=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2t=1 \Rightarrow t=\frac{1}{2} \Rightarrow y^2=\frac{1}{2}$

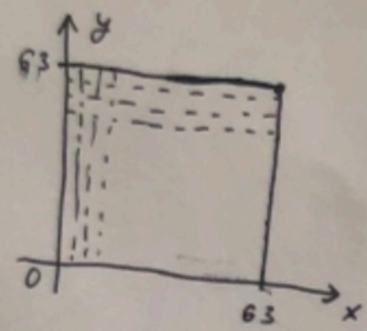
Ответ:
$x=\frac{\sqrt{2}}{2};\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$x=-\frac{\sqrt{2}}{2};\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$x=\frac{\sqrt{2}}{2};\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$x=-\frac{\sqrt{2}}{2};\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

211007245 (U293610 M1274593)

Чистовик

№5

2



~~Всего способов выбрать расположение 2 узлов:~~ $\cancel{C^2_{3762} = \frac{62!}{2!\cdot 60!} = \frac{61\cdot 62}{2} = 61\cdot 31}$ ~~Исключим способы, когда ни один из узлов не лежит на диагоналях квадрата. Таких узлов~~

- Сразу заметим, что прямые $y = x$ и $y = 63 - x$ — главные диагонали квадрата
- Всего есть $(62 - 1 + 1)^2 = 62^2$ узлов $= 3884$ узла
Кол-во узлов на главных диагоналях: $(62 - 1 + 1)\cdot 2 = 124$ узла
Тогда всего способов выбрать расположение 2 узлов: $C^2_{3884} = \frac{3884!}{2\cdot 3882!} = \frac{3883\cdot 3884}{2} = 3883\cdot 1942$
- Кол-во узлов не на главных диагоналях $= 3884 - 124 = 3760$
Тогда всего способов выбрать расположение 2 узлов не на главных диагоналях: $C^2_{3760} = \frac{3760!}{2\cdot 3758!} = \frac{3760\cdot 3759}{2} = 1880\cdot 3759$
- Если мы будем выбирать узлы так, чтобы 1 или 2 из них были на главных диагоналях, но при этом они лежали на прямой, пар. Ox или Oy, то:

1) т.к. в строке 62 узла, то у нас будет $(62 - 1)\cdot 2 - 1 = 121$ способов выбрать пару узлов из лежащих в этой строке так, чтобы 1 или 2 были на главных диагоналях ⇒ 121 способов
2) Таких строк 62 ⇒ надо 121 умножить на 62
121 · 62 способов
3) Аналогично можно получить кол-во способов выбрать пары узлов, лежащие на прямых, парал. Oy, их тоже 121 · 62

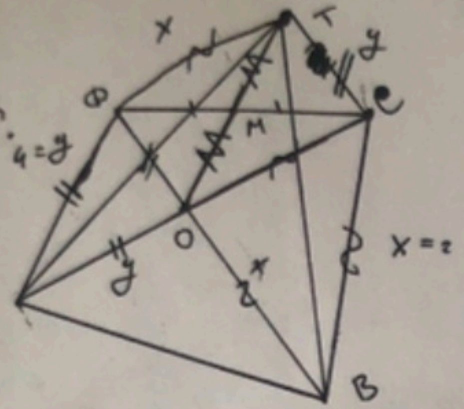
- Итого получаем:
$3883\cdot 1942 - 1880\cdot 3759 - 121\cdot 62\cdot 2 = 7.540.786 - 7.066.920 - 15004 = 473866 - 15004 = 458862$

Ответ: 458.862 способов

Чистовик

3

№ 6.



а) 1) Т.к. Т симм. О относ. точки М - середины СD, то ОМ = МТ, но DМ = МС => СТDО - пар-мм, т.к. точка пересеч. диагоналей деля их пополам => $OD = TC$; $DT = OC$

2) Рассм-м $\triangle BCT$, $\triangle ADT$ и $\triangle ADB$.

• $\triangle BCT$: $BC = x$; $TC = y$, $\angle BCT = \angle BCO + \angle OCT$, но $\angle OCT = 180° - \angle COD =$ св. пар-мма $= 180° - \angle AOB = \angle COB = 60° = \angle OCT$ смежные углы

Тогда $\angle BCT = 60° + 60° = 120°$; $BT = \sqrt{BC^2 + TC^2 - 2BC \cdot TC \cdot \cos BCT}$ по т. косинусов

• $\triangle ADT$: $AD = y$; $DT = x$; $\angle ADT = \angle ADO + \angle TDO = \angle ADO + \angle OCT = 60° + 60° = 120°$; $AT = \sqrt{AD^2 + DT^2 - 2AD \cdot TD \cdot \cos ADT}$ по т. косинусов

• $\triangle AOB$: $AO = y$; $OB = x$; $\angle AOB = 180° - \angle COB = 120°$; смежные; $AB = \sqrt{AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos AOB}$ по т. косинусов

3) Тогда по теореме косинусов:

1) в $\triangle BCT$ $BT = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos 120°}$

2) в $\triangle ADT$ $AT = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos 120°}$

3) в $\triangle AOB$ $AB = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos 120°}$ =>

=> $BT = AT = AB$ => $\triangle ABT$ - равносторонний, чтд

Ответ: ЧТД

б) 1) $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{DOC} + S_{AOD}$

$S_{AOB} = AO \cdot OB \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin AOB = 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$S_{BOC} = OC \cdot BC \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin BCO = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$S_{DOC} = OD \cdot OC \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin DOC = 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$S_{AOD} = AD \cdot OD \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin ADO = 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

2) $S_{ABT} = AB \cdot BT \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin ABT$

$\triangle ABT$ - равностор. => $\sin ABT = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$AB = BT = \sqrt{BC^2 + TC^2 - 2\,BC \cdot TC \cdot \cos BCT} = \sqrt{4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{-1}{2}} = \sqrt{4+16+8} = 2\sqrt{7}$

$S_{ABT} = 2\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

3) $S_{ABT} : S_{ABCD} = 7\sqrt{3} : 9\sqrt{3} = 7 : 9$

Ответ: 7 : 9