Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007203**

ID профиля: **173015**

Вариант 12

Чистовик (3)

№3

А: $2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

Парабола: $ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

Рассм. параболу:

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

$ay=ax^2+4a^2x+4a^3+2$

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

$\cancel{y}$ В - вершина $\Rightarrow$

$x_в=-\frac{4a}{2}=-2a$

$y_в=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}\Rightarrow y_в=\frac{2}{a}$

Рассм. т. А:

$5y^2+2xy-6ay+x^2-2ax+2a^2=0$

$5y^2+y(2x-6a)+(x-a)^2+a^2=0$

$D=(2x-6a)^2-20((x-a)^2+a^2)=4x^2-24ax+36a^2-20x^2+40ax-40a^2$

$=-16x^2+16ax-4a^2=-4(4x^2-4ax+a^2)=-4(2x-a)^2;\ D\leq 0$, т.к.

$(2x-a)^2\geq 0$

$D=0$ при $2x=a$ $x=\frac{a}{2}$; тогда $\cancel{y}$

$5y^2+y(a-6a)+(\frac{a}{2}-a)^2+a^2=0$

$5y^2-5ay+\frac{5}{4}a^2=0$

$y^2-ay+\frac{a^2}{4}=0$ $|\cdot 4$

$4y^2-4ay+a^2=0$

$(2y-a)^2=0$

$2y=a$

$y=\frac{a}{2}$

211007203 (U173015 M1273611)

Чистовик (4)

Две точки находятся по одну сторону от данной прямой, если

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y_A + x_A > 3 \\ y_B + x_B > 3 \end{cases} \\ \begin{cases} y_A + x_A < 3 \\ y_B + x_B < 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + \frac{a}{2} > 3 \\ \frac{2}{a} - 2a > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a > 3 \\ \frac{-2a^2 - 3a + 2}{a} > 0 \end{cases}$$

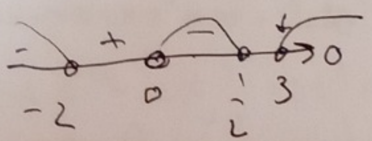
$$\begin{cases} a > 3 \\ \frac{2a^2 + 3a - 2}{a} < 0 \end{cases}$$

$2a^2 + 3a - 2 = 0$

$D = 9 + 16 = 25$

$a_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

$a_2 = -2$

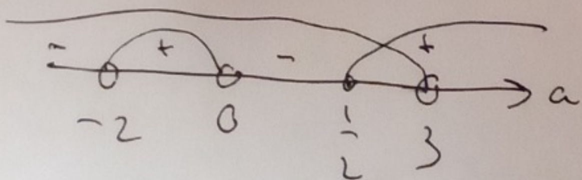


$\Downarrow$

$a \in \varnothing$

$$\begin{cases} a < 3 \\ \frac{-2a^2 - 3a + 2}{a} < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < 3 \\ \frac{2a^2 + 3a - 2}{a} > 0 \end{cases}$$



$\Rightarrow a \in (-2;0) \cup \left(\frac{1}{2}; 3\right)$

Ответ: $a \in (-2;0) \cup \left(\frac{1}{2}; 3\right)$

Черновик

$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 3 = 2\sqrt{ab}$

~~$\sqrt{x+1} =$~~ $x+1=a$ $a \in [0;5]$

$-x-1=-a$

$-x+4-5=-a$

$4-x-5=-a$

$4-x=5-a$

$\sqrt{a} - \sqrt{5-a} + 3 = 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{5-a}$

$\sqrt{a} - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{5-a} - \sqrt{5-a} + 3 = 0$

~~$\sqrt{a} - 3\sqrt{a}\cdot\sqrt{5-a} + \sqrt{a}\sqrt{5-a} - \sqrt{5-a} + 3 = 0$~~

$\sqrt{a}+3 = \sqrt{5-a}\,(2\sqrt{a}+1) \quad \uparrow^2$

$a + 6\sqrt{a} + 9 = (5-a)(4a+4\sqrt{a}+1)$

$a+6\sqrt{a}+9 = 20a + 20\sqrt{a} + 5 - 4a^2 - 4a\sqrt{a} - a$

$4a\sqrt{a} - 14\sqrt{a} = -4a^2 + 18a - 4$

$2a\sqrt{a} - 7\sqrt{a} = -2a^2 + 9a - 2$

~~$-2a^2+9a-2=0$~~

~~$D=81+16=97$~~

$D=97$

$a_1 = \frac{-9+\sqrt{97}}{-4}$ ~~$a_2 = \frac{-9-\sqrt{97}}{-4}$~~

$D = 81-16 = 65$

$\sqrt{a}=t$; $t>0$

$2t^3 - 7t = -2t^4 + 9t^2 - 2$

$-2t^4 - 2t^3 + 9t^2 + 7t - 2 = 0$

$2t^4 + 2t^3 - 9t^2 - 7t + 2 = 0$ $t=-1$

$2 - 2 - 9 + 7 + 2 = 0$

$0=0 \Rightarrow t_1 = -1$

	2	2	-9	-7	2
-1	2	0	-9	2	0

$(t+1)(2t^3 - 9t + 2) = 0$ $\boxed{t=2}$

$2t^3 - 9t + 2 = 0$

$16 - 18 + 2 = 0$

$0=0 \Rightarrow t=2$

	2	0	-9	2
2	2	4	-1	0

$2t^2 + 4t - 1 = 0$ $D = 16 + 8 = 24 = 4\cdot 6$

211007203 (U173015 M1273611)

черновик

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

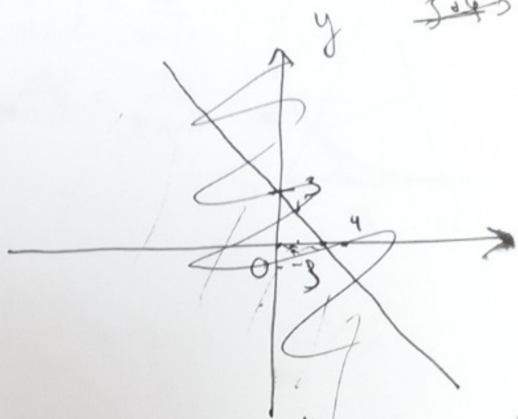
$2a^2-2ax-6ay+(x+y)^2+4y^2=0$

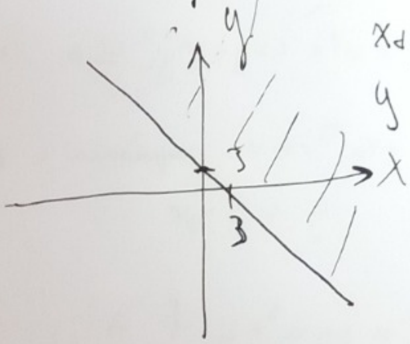
$2a^2-2a(x+y)-4ya+(x+y)^2+4y^2=0$

$\cancel{2a(a-x-y)+4y(y-a)+(x+y)^2=0}$

$x+y<3$

$2a(a-x-3y)+(x+y)^2+4y^2=0$





$x+y=3$

$y=3-x$

$x+y>3$

Черновик

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

ОДЗ:

1) $x+1 \geq 0$

$x \geq -1$

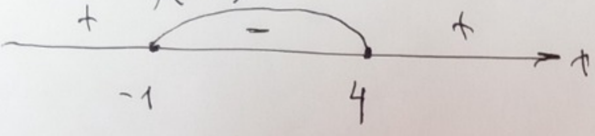
2) $4-x \geq 0$

$x \leq 4$

3) $4+3x-x^2 \geq 0$

$x^2-3x-4 \leq 0$ $D = 9+16 = 25$ $x_1 = \frac{3+5}{2} = 4$ $x_2 = -1$

$(x-4)(x+1) \leq 0$



$x \in [-1; 4]$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{(4-x)(x+1)}$

$\sqrt{4-x} = t$ $\sqrt{x+1} = y$

$y - \cancel{t} + 3 = 2\cancel{t}y$ $y - t - 2ty + 3 = 0$

$t(2y+1) = y+3$

$t = \frac{y+3}{2y+1}$

$\sqrt{4-x} = \frac{\sqrt{x+1}+3}{2\sqrt{x+1}+1}$ $\uparrow^2$

$4-x = \frac{(\sqrt{x+1}+3)^2}{(2\sqrt{x+1}+1)^2}$

$4-x = \frac{x+1+9+6\sqrt{x+1}}{4x+4+1+4\sqrt{x+1}} = \frac{x+10+6\sqrt{x+1}}{4x+4+1+4\sqrt{x+1}}$

211007203 (U173015 M1273611)

Черновик

$t_1 = \frac{-4+2\sqrt{6}}{4} = -1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$

$t_2 < 0$ — не подходит

$\sqrt{a} = t \Rightarrow \sqrt{a} = 2$

$a = x+1 \quad x = a-1 = t^2 - 1$

$x_1 = 4 - 1 = 3$

$x_2 = \left(-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{6}{4} + 1 - 1 - \sqrt{6} = \frac{3}{2} - \sqrt{6}$ — не соот. ОДЗ

$\frac{3}{2} \, ? \, \sqrt{6}$

$\frac{9}{4} \, ? \, 6$

$\frac{9}{4} - 6 \, ? \, 0$

$\frac{9-36}{4} \, ? \, 0$

$-\frac{23}{4} < 0$

$2{,}5^2 = 6{,}25$

$1{,}5 - \sqrt{6}$

$2{,}5^2 = 6{,}25 \Rightarrow \sqrt{6} < 2{,}5$

$\frac{3}{2} - \sqrt{6} < -1$

$\frac{2}{2} - 2{,}5 < -1$

$-1 < -1$ — противоречие.

$\begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ 50 \\ \hline 625 \end{array}$

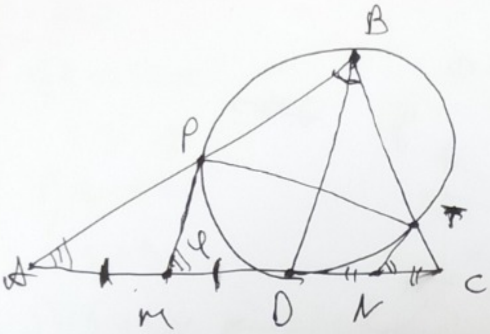
211007203 (U173015 M1273611)

Черновик

№1

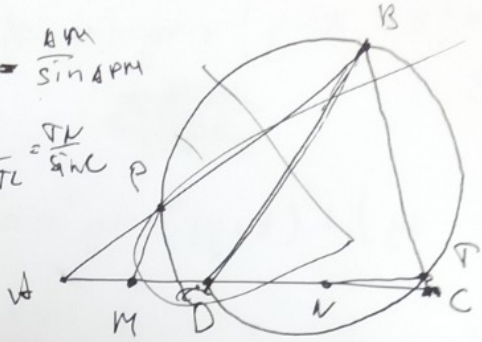
$PM \parallel TN$

$R = \frac{AB}{2\sin C}$



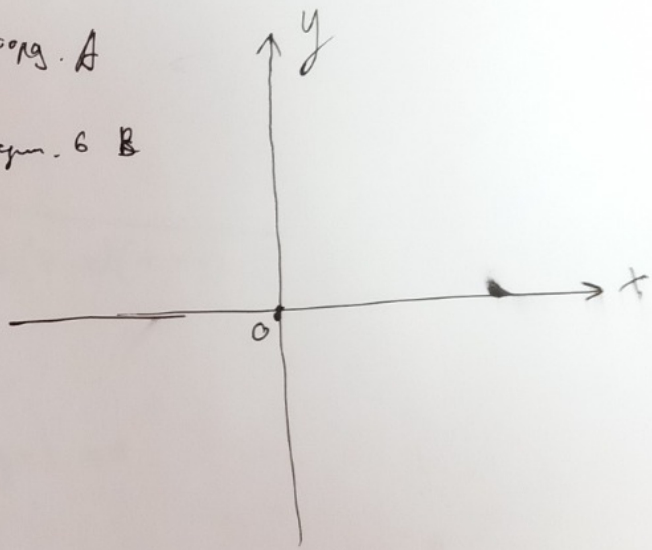
$\frac{AP}{\sin\varphi} = \frac{MP}{\sin A} = \frac{AM}{\sin APM}$

$\frac{CT}{\sin\varphi} = \frac{CN}{\sin NTC} = \frac{TN}{\sin C}$



№3

$\begin{cases} 2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0 \text{ : коорд. } A \\ ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0 \text{ — парабола с верш. в } B \\ x + y < 3 \qquad y < 3 - x \end{cases}$



$ay = ax^2 + 4a^2x + 4a^3 + 2 \quad |:a$

$y = x^2 + 4ax + 4a^2 + \frac{2}{a} = f(x)$

~~$y = (x + 2a)^2 + \frac{2}{a}$~~

~~$y \; (x+2a)^2 + \frac{2}{a}$~~ $< 3 - x$

$\underbrace{x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4a}{2} = -2a}$ $\quad y_0 = f(x_0) = 4a^2 - 8a^2 + 4a^2 + \frac{2}{a} = \frac{2}{a}$

$x_0 + y_0 < 3$

$-2a + \frac{2}{a} < 3 \quad |\cdot a$ при $a > 0$ ($a \neq 0$; т.к. при подстановке получится бред!)

$-2a^2 - 3a + 2 < 0$

$2a^2 + 3a - 2 > 0$

$D = 9 + 8 = 17$

$a_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4} \qquad a_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} \Rightarrow a \in \left(-\infty; -\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)\right) \cup \left(-\frac{3-\sqrt{17}}{4}; +\infty\right)$

$\begin{cases} 2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0 \\ x + y < 3 \end{cases}$

211007203 (U173015 M1273611)

Чистовик 1

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$$

ОДЗ:

1) $x+1 \ge 0$

$x \ge -1$

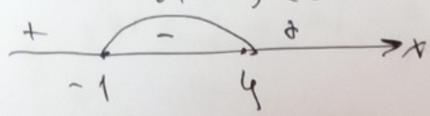
2) $4-x \ge 0$

$x \le 4$

3) $4+3x-x^2 \ge 0$

$x^2-3x-4 \le 0$

$(x-4)(x+1) \le 0$



$x \in [-1; 4]$

пусть $x+1=a$, тогда $-x-1=-a$

$-x+4-5=-a$

$4-x=5-a$

$\sqrt{a} - \sqrt{5-a} + 3 = 2\sqrt{a}\sqrt{5-a}$

$\cancel{\sqrt{a}+3=\sqrt{a}(}$

$\sqrt{a}+3 = \sqrt{5-a}\,(2\sqrt{a}+1) \uparrow^2$

$a+6\sqrt{a}+9 = 20a+20\sqrt{a}+5-4a^2-4a\sqrt{a}-a$ — (из $(5-a)(2\sqrt{a}+1)^2$)

$2a\sqrt{a} - 7\sqrt{a} = -2a^2+9a-2$

$\sqrt{a}=t;\ t \ge 0$

$2t^3-7t = -2t^4+9t^2-2$

$2t^4+2t^3-9t^2-7t+2=0$ $\boxed{t_1=-1}$ — не соотв. ОДЗ

$2-2-9+7+2=0$

$0=0$

$(t+1)(2t^3-9t+2)=0$

$\boxed{t=2}$

$16-18+2=0$

$0=0$

$(t-2)(2t^2+4t-1)=0$

$2t^2+4t-1=0$

Черновик ②

$2t^2+4t-1=0$

$D=16+8=24=4\cdot 6$

$t_1=\frac{-4+2\sqrt{6}}{4}=-1+\frac{\sqrt{6}}{2}$ $\sqrt{6}>2 \Rightarrow -1+\frac{\sqrt{6}}{2}>0$

$t_2=-1-\frac{\sqrt{6}}{2}<0$ — не соотв. ОДЗ

$x+1=a$ $\sqrt{a}=t \Rightarrow a=t^2$

$x=a-1$

$x=t^2-1$

$x_1=4-1=3$

$x_2=\left(-1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-1=\frac{6}{4}-\sqrt{6}+1-1=\frac{6}{4}-\sqrt{6}=\frac{3}{2}-\sqrt{6}$

$x\geq -1$

$\frac{3}{2}-\sqrt{6}\geq -1$

$-\sqrt{6}\geq -2{,}5$

$\sqrt{6}\leq 2{,}5$

$6\leq 6{,}25$ — верно $\Rightarrow$

Ответ: $x_1=3$; $x_2=\frac{3}{2}-\sqrt{6}$.

211007203 (U173015 M1273611)

Черновик

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$\sqrt{x+1} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2} + \sqrt{4-x}$$

$$\sqrt{x+1} + 3 = 2\sqrt{(4-x)(x+1)} + \sqrt{4-x}$$

$$\sqrt{x+1} + 3 = \sqrt{4-x}\,(2\sqrt{x+1} + 1) \uparrow^2$$

$$\sqrt{x+1} + 3 = t \qquad 2\sqrt{x+1} + 6 = 2t$$

$$\cancel{t = \sqrt{4-x}\,(2t-5)} \uparrow^2$$

$$t^2 = \cancel{(4-x)(2t-5)^2 = (4-x)(4t^2-10t+25)}$$

$$(\sqrt{x+1} + 3)^2 = (4-x)(2\sqrt{x+1} + 1)^2$$

$$x+1+6\sqrt{x+1} + 9 = (4-x)(4(x+1) + 4\sqrt{x+1} + 1)$$

$$x+8+6\sqrt{x+1} = (4-x)(4x+4\sqrt{x+1}+5)$$

$$x+8+6\sqrt{x+1} = 4(4-x)\sqrt{x+1} + (4-x)(4x+5)$$

$$6\sqrt{x+1} - 4(4-x)(\sqrt{x+1}) = -4x^2 + 11x + 20 - x - 8$$

$$\sqrt{x+1}\,(6-4(4-x)) = -4x^2 + 11x + 20 - x - 8 = -4x^2 + 10x + 12$$

$$\sqrt{x+1}\,(3-2(4-x)) = -2x^2 + 5x + 6 \uparrow^2 \qquad D = 25 + \underbrace{4\cdot 2\cdot 6}_{} = 25 + 48 =$$

$$88 + 48 = 60 + 13 = 73$$

$$(x+1)(3-2(4-x))^2 = (-2x^2 + 5x + 6)^2$$

$$(x+1)(3+2x-8)^2 = (-2x^2+5x+6)^2$$

$$(x+1)(2x-5)^2 = (-2x^2+5x+6)^2$$

211007203 (U173015 M1273611)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007203**

ID профиля: **173015**

Вариант 12

Чистовик (5)

№5. Приведём задачу к немного другому виду. Введём матрицу A, квадратную, с числом членов в строке, равным 62. В матрицу запишем координаты узлов сетки нашего квадрата:

$$A = \begin{Vmatrix} (62;1) & (62;2) & \dots & (62;62) \\ (61;1) & (61;2) & \dots & (61;62) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (2;1) & (2;2) & \dots & (2;62) \\ (1;1) & (1;2) & \dots & (1;62) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{62;1} & a_{62;2} & a_{62;3} & \dots & a_{62;62} \\ a_{61;1} & a_{61;2} & a_{61;3} & \dots & a_{61;62} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{3;1} & a_{3;2} & a_{3;3} & \dots & a_{3;62} \\ a_{2;1} & a_{2;2} & a_{2;3} & \dots & a_{2;62} \\ a_{1;1} & a_{1;2} & a_{1;3} & \dots & a_{1;62} \end{Vmatrix}.$$

Тогда становится понятно, что для решения задачи нам необходимо сделать следующее:

1) выбрать элементы, лежащие на диагоналях, т.е. (1;1); (2;2); (62;1); (1;62); (61;2) и т.д.

2) для каждого такого элемента найти число остальных членов, для любого элемента оно одинаково

3) вычесть из этого числа кол-во элементов, находящихся в одной с ним строке и столбце;

4) ~~Для каждой диагонали~~

Для каждого ~~такого~~ элемента каждой диагонали вычесть число элементов этой диагонали, стоящих ниже. Это делается для того, чтобы исключить повторение сочетаний, например 2 раза повторится сочетание $a_{1;1}$; $a_{2;2}$ или $a_{62;1}$; $a_{2;2}$

~~Формула: k=~~ Пункты 2 и 3 объединим, будем просто брать 61·61 элементов.

В каждой диагонали по 62 элемента, ~~один из них общий =>~~ ~~всего 123 элемента~~, общих элементов нет =>

=> всего $n = 124$ элемента. $m = 64$

$$k = \sum_{0}^{m}\left(61\cdot 61 - \cancel{4}(n-1)\right) = 3721 - \cancel{4}\sum_{40}^{\cancel{124}\,64}(n-1)$$

черновик

$$BT = \sqrt{\left(\frac{2b-a}{2} - \frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt3}{2}a - \frac{\sqrt3}{2}(a+b)\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2b-a-b+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt3 a + \sqrt3 a - \sqrt3 b}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac14\left(b^2 + (2\sqrt3 a - \sqrt3 b)^2\right)} = \sqrt{\frac14\left(b^2 + 12a^2 - 12ab + 3b^2\right)} = \frac12\sqrt{4b^2+12a^2-12ab}$$

$$X_L = \frac{b-a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{b-a}{4} = \frac{2b-2a+2b+b-a}{4} = \boxed{\frac{5b-3a}{4}}$$

$$y_L = \frac{\sqrt3}{4}(a+b)$$

$$x_T = 2X_L - X_0 = \frac{5b-3a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{4b-3a}{2}$$

$$y_T = y_0 - 2\Delta y = y_0 - 2(y_0 - y_L) = 2y_L - y_0 = \frac{\sqrt3}{2}(a+b) - \frac{\sqrt3}{2}b = \frac{\sqrt3}{2}a$$

~~AT~~:

$$X_L = \frac{b-a}{2} + a + \frac{b-a}{4} = \frac{3b+a}{4}$$

$$y_L = \frac{\sqrt3}{4}(a+b)$$

$$x_T = 2X_L - X_0 = \frac{3b+a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{2b+a}{2}$$

$$y_T = \frac{\sqrt3}{2}a$$

$$AT: \sqrt{\frac14(2b+a)^2 + \frac14(\sqrt3 a)^2} = \frac12\sqrt{4b^2+4ab+a^2+3a^2} = \sqrt{a^2+b^2+ab}$$

$$BT: \sqrt{\frac14(b-a-2b-a)^2 + \frac34(a+b-a)^2} = \frac12\sqrt{(2a+b)^2+3b^2} =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2+ab}$$

б) $a=2$; $b=4$

$$BT = \sqrt{4+16+8} = \sqrt{28} = 2\sqrt7 \qquad h = \frac{\sqrt3}{2}BT = \sqrt{21}$$

$$S = \sqrt{21}\cdot\sqrt{28}\cdot\frac12 = 7\cdot\frac12\cdot\sqrt3\cdot\sqrt4 = 7\sqrt3$$

$$S_{OBC} = \frac12 a\cdot a\cdot\sin60^\circ = \frac12\cdot4\cdot\frac{\sqrt3}{2} = \sqrt3$$

$$S_{AOD} = \frac12\cdot16\cdot\frac{\sqrt3}{2} = 4\sqrt3$$

$$S_{AOB} = S_{COD} = \frac12 a\cdot b\cdot\sin120^\circ = \frac12\cdot2\cdot4\cdot\frac{\sqrt3}{2} = 2\sqrt3$$

$$S_{ABCD} = \sqrt3 + 4\sqrt3 + 4\sqrt3 = 9\sqrt3$$

$$\frac{S}{S_{ABCD}} = \frac79$$

211007203 (U173015 M1273612)

Чистовик ④

$$|\vec{AB}| = \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2-2ab+a^2}{4} + \frac{3b^2+6ab+3a^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4b^2+4ab+4a^2}{4}} = \sqrt{a^2+b^2+ab}.$$

$$|\vec{AT}| = \sqrt{\left(\frac{2b+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{4b^2+4ab+a^2+3a^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{b^2+a^2+ab}$$

$$|\vec{BT}| = \sqrt{\left(\frac{2b+a-b+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b-a)\right)^2} = \sqrt{\frac{(2a+b)^2+3b^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2+4ab+4b^2}{4}} = \sqrt{a^2+ab+b^2}. \Rightarrow$$

$\Rightarrow AB = AT = BT \Rightarrow \triangle ABT$ — равносторонний.

2) $S_{ABT} = \frac{1}{2} h_T \cdot AB = \frac{1}{2} BT \cdot \sin 60^\circ \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2$

$AB = \sqrt{a^2+ab+b^2} = \sqrt{4+8+16} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$S_{ABT} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \cdot 7 = 7\sqrt{3}$

$S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OD \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

$S_{BOC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$S_{ABO} = S_{COD} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot OD \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOD} + S_{BOC} + S_{AOD} = \sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}.$$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$.

Черновик

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2(x^4+y^4+2x^2y^2) + x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$$2(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{x^2+y^2} = 1 \qquad x^2+y^2 = t$$

$$2t^2 - \frac{1}{t} = 1 \quad | \cdot t$$

$$2t^3 - t - 1 = 0 \qquad t_1 = 1$$

$$2 - 1 - 1 = 0$$

$$0 = 0$$

	2	0	-1	-1
1	2	2	1	0

$$(t-1)(2t^2+2t+1) = 0$$

$$2t^2+2t+1 = 0$$

$$D = 4 - 8 < 0 \Rightarrow t \in \varnothing \Rightarrow \qquad x^2+y^2 = 1 \qquad x^2y^2 = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2y^2 = \frac{1}{4} \\ \cancel{xy = \pm\frac{1}{2}} \\ x\cdot y = \frac{1}{2} \cdot 2 \quad (1) \end{cases} \qquad x\cdot y = -\frac{1}{2} \quad (2) \;\; |\cdot 2 \;\; +$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 0 \qquad (x+y)^2 = 0$$

$$(x-y)^2 = 0 \qquad x = -y$$

$$x = y$$

$$2x^4 + 2x^4 + 5\cdot x^2\cdot x^2 = \frac{9}{4}$$

$$9x^4 = \frac{9}{4}$$

$$x^4 = \frac{1}{4} \qquad x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{Ответ} - 4 \text{ пары чисел}$$

211007203 (U173015 M1273612)

Черновик.

$$A = \begin{Vmatrix} (62;1) & (62;2) & \cdots & (62;62) \\ (61;1) & (61;2) & \cdots & \cdots \\ (60;1) & \cdots & & \\ \vdots & & & \\ (1;1) & (1;2) & \cdots & (1;62) \end{Vmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times 61 \\ \hline 61 \\ 366 \\ \hline 3721 \end{array}$$

Черновик

№6

$y_0 - y_L = \frac{\sqrt3}{2} b - \frac{\sqrt3}{4}(a+b) =$

$= \frac{\sqrt3}{4} b - \frac{\sqrt3}{4} a - \Delta$

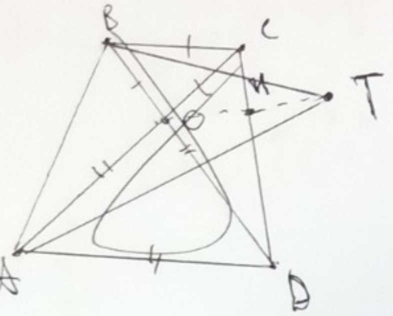
$\Delta y_0 = \frac{\sqrt3}{2} b - \frac{\sqrt3}{4}(a+b) =$

$= \frac{\sqrt3}{2} b - \frac{\sqrt3}{4} a - \frac{\sqrt3}{4} b =$

$\frac{\sqrt3}{4} a + \frac{\sqrt3}{4} b - \frac{\sqrt3}{4} b + \frac{\sqrt3}{2} \cdot = \frac{\sqrt3}{4} b - \frac{\sqrt3}{4} a$

$= \frac{\sqrt3}{2} a$

$\frac{3b-a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{2b-a}{2}$



$y_0 - 2\Delta y_0 =$

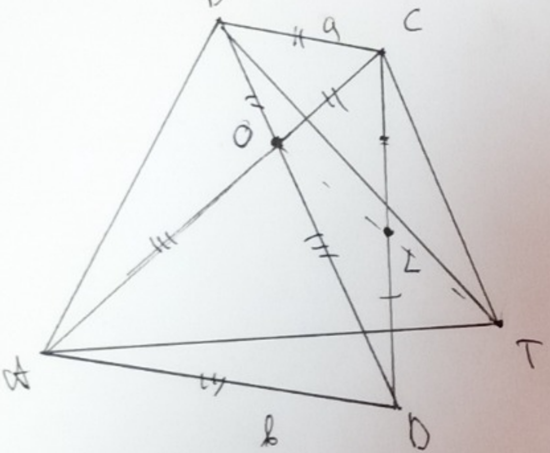
$= \frac{\sqrt3}{2} b - 2\left(\frac{\sqrt3}{2} b - \frac{\sqrt3}{2} a = \right.$

$= -$

сим., значит $\Delta x_{OL} = \Delta x_{LT} = x_L - x_O = x_T - x_L$

$= 2x_L - x_O$

ABCD – равнобокая трапеция



$\angle COD = \angle BOA = 120°$

$BC = a$

$AD = b$

$AB^2 = CD^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab = a^2 + b^2 + ab$

$BC = a \quad AD = b \quad h_a = \frac{\sqrt3}{2} a \quad h_b = \frac{\sqrt3}{2} b$

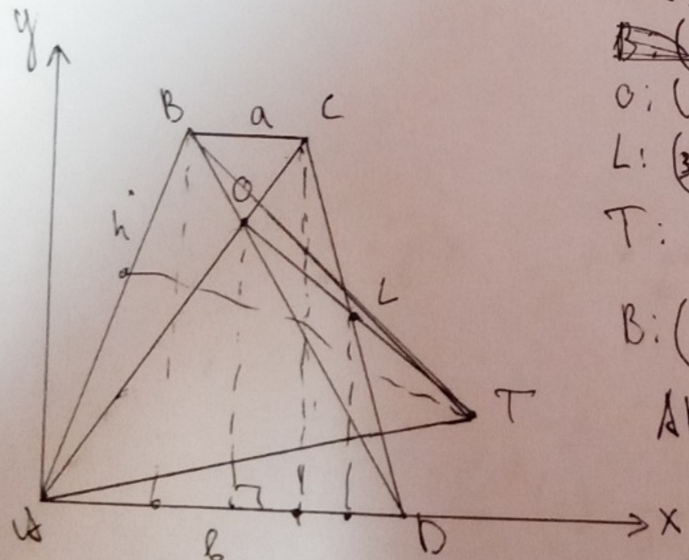
$A: (0; 0)$

$O: \left(\frac{b}{2}; \frac{\sqrt3}{2} b\right)$ ✓

$L: \left(\frac{3b-a}{4}; \frac{\sqrt3}{4}(a+b)\right)$

$T: \left(\frac{2b-a}{2}; \frac{\sqrt3}{2} a\right)$

$B: \left(\frac{b-a}{2}; \frac{\sqrt3}{2}(a+b)\right)$



$AB = \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt3}{2} a + \frac{\sqrt3}{2} b\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(b^2 - 2ab + a^2 + 3a^2 + 6ab + 3b^2\right)} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(4b^2 + 4a^2 + 4ab\right)}$

$AT: = \sqrt{\left(\frac{(2b-a)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt3}{2} a\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{1}{4}\left(4b^2 - 4ab + a^2 + \frac{3}{4} a^2\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - 4ab + 4a^2}$

211007203 (U173015 M1273612)

Чистовик ②

4) $+\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy=-\frac{1}{2} \quad | \cdot 2 \end{cases}$

$(x+y)^2=0$

$x=-y$

$2x^4+2x^4+5\cdot x^2\cdot x^2=\frac{9}{4}$

$x^4=\frac{1}{4}$

$x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $y_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x_4=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $y_4=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ответ: $\{\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\}$, $\{\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\}$, $\{-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\}$, $\{-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\}$

211007203 (U173015 M1273612)

Чистовик 3

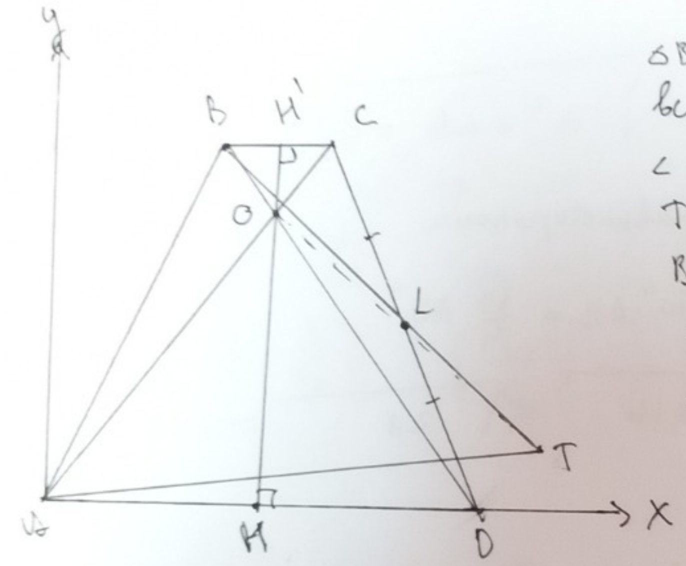
№6 Дано: ABCD — выпуклый четырёхуг., BOC и AOD — равностор. △

T симм. O отн-но середины CD

1) Д-ть, что $\triangle ABT$ — равностор.

2) Найти $\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$, при $BC=2$; $AD=4$

Решение:



Обозначим середину CD за L.

$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ — правильные, значит, все их углы $= 60°$, значит, $\angle CBD = \angle ADB \Rightarrow BC \parallel AD \Rightarrow ABCD$ — трапеция. Более того, $BO=OC$; $AO=OD$; $\angle BOA = \angle COD \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle BOA = \triangle COD \Rightarrow CD = AB \Rightarrow$
$\Rightarrow ABCD$ — равнобокая трапеция.

Введём оси координат AX и AY. $AX \perp AY$. Найдём координаты каждой точки, нужной нам.

$x_A = 0$; $y_A = 0$

$x_B = \dfrac{b-a}{2}$; $y_B = OH + OH' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$

$\cancel{x_O = \dfrac{\sqrt{3}}{2}b \quad y_O =}$

$x_O = \dfrac{b}{2}$; $y_O = \dfrac{\sqrt{3}}{2}b$

$\cancel{x_L = \dfrac{b-a}{2} + a + \dfrac{b+a}{4}}$ ~~(т.к. L - середина CD) =~~

$x_L = \dfrac{b-a}{2} + a + \dfrac{b-a}{4} = \dfrac{3b+a}{4}$ (т.к. середина CD)

$y_L = \dfrac{1}{2} y_B = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(a+b)$

т.к. T симм. O отн-но L выполняется: $x_T = x_L - \Delta x_{LO} = x_L - x_O + x_L = 2x_L - x_O$

$x_T = 2x_L - x_O = \dfrac{3b+a}{2} - \dfrac{b}{2} = \dfrac{2b+a}{2}$

$y_T = 2y_L - y_O = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}b - \dfrac{\sqrt{3}}{2}b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

Зная координаты точек, мы можем узнать длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AT}$ и $\overrightarrow{BT}$

Чистовик (1)

№ 4. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} & (1) \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} & (2) \end{cases}$

2) $2(x^4+y^4+2x^2y^2) + x^2y^2 = \dfrac{9}{4}$

$2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \dfrac{9}{4}$

$- \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

$2(x^2+y^2)^2 - \dfrac{1}{x^2+y^2} = 1$

$x^2+y^2 = t$ $\quad | \cdot t$

$2t^2 - \dfrac{1}{t} = 1$

$2t^3 - t - 1 = 0 \qquad \boxed{t_1 = 1}$

$2 - 1 - 1 = 0$

$0 = 0$

$(t-1)(2t^2+2t+1) = 0 \qquad 2t^2+2t+1=0$

$D = 4 - 8 = -4 < 0 \Rightarrow t \in \varnothing$

$x^2+y^2 = 1 \Rightarrow \quad 1 + x^2y^2 = \dfrac{5}{4}$

$x^2y^2 = \dfrac{1}{4}$

$\left[\begin{array}{ll} xy = \dfrac{1}{2} & (3) \\ xy = -\dfrac{1}{2} & (4) \end{array} \right.$

3) $- \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ xy = \dfrac{1}{2} \quad | \cdot 2 \end{cases}$

~~$x+y$~~ $(x-y)^2 = 0$

$x = y$

$2x^4 + 2x^4 + 5 \cdot x^2 \cdot x^2 = \dfrac{9}{4}$

$9x^4 = \dfrac{9}{4} \qquad x^4 = \dfrac{1}{4} \qquad x_1 = y_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad x_2 = y_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$