Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007195**

ID профиля: **375980**

Вариант 12

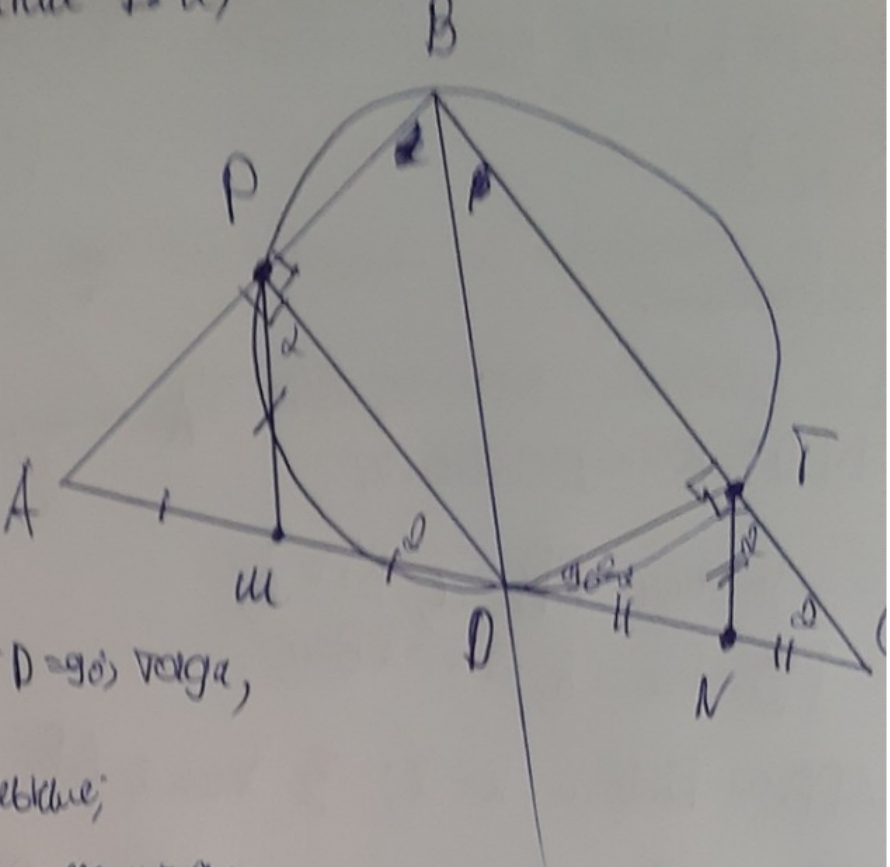
№ Задание 1. а)

Дано: BD - диаметр;

AM = MD; DN = NC;

а) ∠ABC - ?

б) S_{ABC} - ?



а) Т.к. BD - диаметр, то

∠DPB = ∠DГB = 90°.

Следовательно, ∠DPA = ∠CГD = 90°, тогда,

△APD и △CГD - прямоугольные;

Т.к. PM - медиана ~~в прямо~~ из прямого угла, то AM = MD = PM; аналогично, DN = NC = ГN.

~~Обозначим угол: DBD = 2, D~~

Т.к. DPBГ - вписан. четырех., то ∠ГDP = 180° - ∠PBГ = 180 - ∠ABC;

Т.К. AD и DC лежат на одной прямой, ∠APD = ∠DГC = 90°,

PM ∥ ГN, то △APD ∾ △DГC ⇒ ∠PDM = ∠ГCN = α; Следовательно,

∠ГDN = 90° - α; Тогда, из развернутого угла имеем:

∠PDM + ∠PDГ + ∠ГDC = 180°;

∠PDM + ∠PDГ + ∠ГDC = α + 180° - ∠ABC + 90° - α = 180°

270° - ∠ABC = 180°;

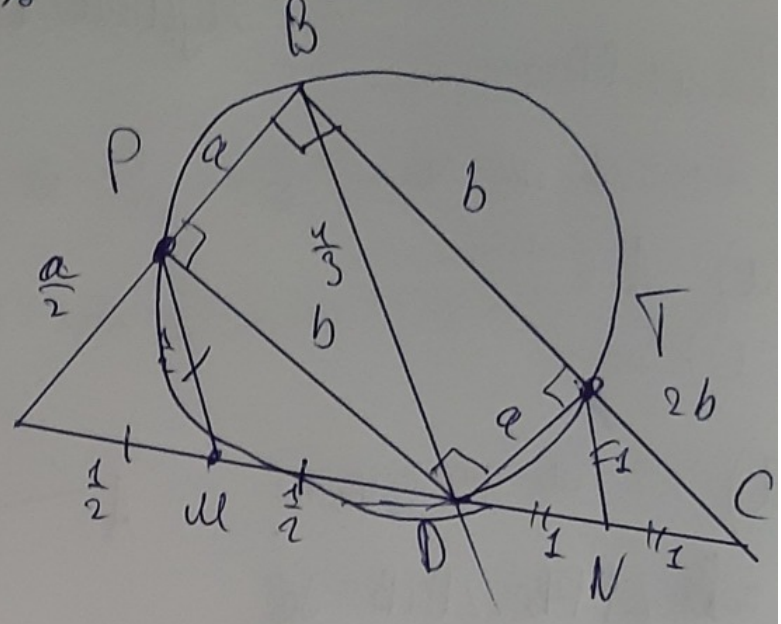
∠ABC = 90°. а) Ответ: 90°

211007195 (U375980 M1277548)

Задание 1.(б).

б) $MP=\frac{1}{2}$; $NT=1$, $BD=\frac{4}{3}$

$S_{ABC}-?$



Решение:

т.к. $\angle ABC=90^\circ$, $\angle DTP=90^\circ$, $\angle PDT=90^\circ$,

PBTD-прямоугольник;

Обозначим $PB=a$; $BT=b$;

$PD=BT=b$; $DT=PB=a$;

$\triangle APD \sim DTN$ с $k=2$; Значит, $AP=\frac{1}{2}TD=\frac{a}{2}$; $TC=2PD=2b$;

По т. Пифагора ~~для~~ для $\triangle BPD$ и ABC имеем:

$$\begin{cases} a^2+b^2=\frac{16}{9} \rightarrow a^2=\frac{16}{9}-b^2 \\ 9b^2+2{,}25a^2=9; \end{cases}$$

$$\cancel{9\left(\frac{16}{9}-b^2\right)+2{,}25a^2} \quad 9b^2+2{,}25\left(\frac{16}{9}-b^2\right)=$$

$$=9b^2-2{,}25b^2+4=9;$$

$$\frac{27}{4}b^2=5;$$

$$b^2=\frac{20}{27};$$

$$a^2=\frac{48-20}{27}=\frac{28}{27};$$

$$S_{ABC}=\frac{3b\cdot 1{,}5a}{2}=\frac{3b\cdot 3a}{4}=\frac{9}{4}\sqrt{a^2b^2}=\frac{9}{4}\cdot\sqrt{\frac{20\cdot 28}{27^2}}=$$

$$=\frac{9}{4}\cdot\sqrt{\frac{4^2\cdot 5\cdot 7}{27^2}}=\frac{9}{4}\cdot\frac{4}{27}\cdot\sqrt{35}=\frac{\sqrt{35}}{3}.$$

б) Ответ: $S_{ABC}=\frac{\sqrt{35}}{3}$.

Задание 2.

ОДЗ: $-1 \le x \le 4$;

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{(4-x)(x+1)} - 3$; Возведём в квадрат:

$$x+1+4-x-2\sqrt{(4-x)(x+1)} = 4(4-x)(x+1)+9-12\sqrt{(4-x)(x+1)};$$

$2\sqrt{(4-x)(x+1)} = t$; $t > 0$

$5 - t = t^2 + 9 - 6t$;

$t^2 - 5t + 4 = 0$;

$(t-4)(t-1) = 0$;

1) $t = 4$;

$2\sqrt{(4-x)(x+1)} = 4$;

$(4-x)(x+1) = 4$; $\cdot(-1)$;

$x^2 - 3x - 4 = -4$;

$x(x-3) = 0$;

$x_1 = 0$ V; $x_2 = 3$ V;

2) $t = 1$;

$2\sqrt{(4-x)(x+1)} = 1$;

$4(4-x)(x+1) = 1$; $\cdot(-1)$

$4x^2 - 12x - 16 = -1$;

$4x^2 - 12x - 15 = 0$;

$D = 144 + 240 = 384 = 6 \cdot 64$;

$$x_{3,4} = \frac{12 \pm 8\sqrt{6}}{8} = \frac{3 \pm 2\sqrt{6}}{2};$$

Проверим по ОДЗ;

$x_3 = \frac{3+2\sqrt{6}}{2}$;

$4 < 2\sqrt{6} < 5$

$7 < 3+2\sqrt{6} < 8$;

$3{,}5 < \frac{3+2\sqrt{6}}{2} < 4$; подходит;

$x_4 = \frac{3-2\sqrt{6}}{2}$;

$-5 < -2\sqrt{6} < -4$;

$-2 < 3-2\sqrt{6} < -1$

$-1 < \frac{3-2\sqrt{6}}{2} < -\frac{1}{2}$; подходит;

Ответ: $0; 3; \frac{3-2\sqrt{6}}{2}; \frac{3+2\sqrt{6}}{2}$.

Задание 3.

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$; $(x,y)=A$;

$x^2+x\cdot 2(y-a)+5y^2+2a^2-6ay=0$;

$D=4y^2-8ay+4a^2-20y^2-8a^2+24ay=$

$=-16y^2+16ay-4a^2\geq 0$; $\cdot(-\frac{1}{4})$

$4y^2-4ay+a^2\leq 0$;

$(2y-a)^2\leq 0$; квадрат всегда ≥ 0; значит, $2y-a=0$;

$2y=a$; $y=\frac{a}{2}$;

$x=$ ~~$\frac{}{}$~~ $-\frac{2(y-a)}{2}=a-y=a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$; $A=(\frac{a}{2};\frac{a}{2})$;

Теперь рассмотрим параболу:

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$;

$ay=ax^2+4a^2x+4a^3+2$ если $a=0$, то $0=2$ ~~α~~ неверно;

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$; $B(x_0;y_0)$;

$x_0=-\frac{4a}{2}=-2a$;

$y_0=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$; $B=(-2a,\frac{2}{a})$;

Значит, всевозможные точки A лежат на прямой $y=x$;

~~А~~ всевозможные точки B лежат на функции ~~$y=-\frac{4}{x}$~~;

$x=-2a$ $a=-\frac{x}{2}$;

$y=\frac{2}{a}$; $=\frac{2}{(-\frac{x}{2})}=-\frac{4}{x}$; $y=-\frac{4}{x}$;

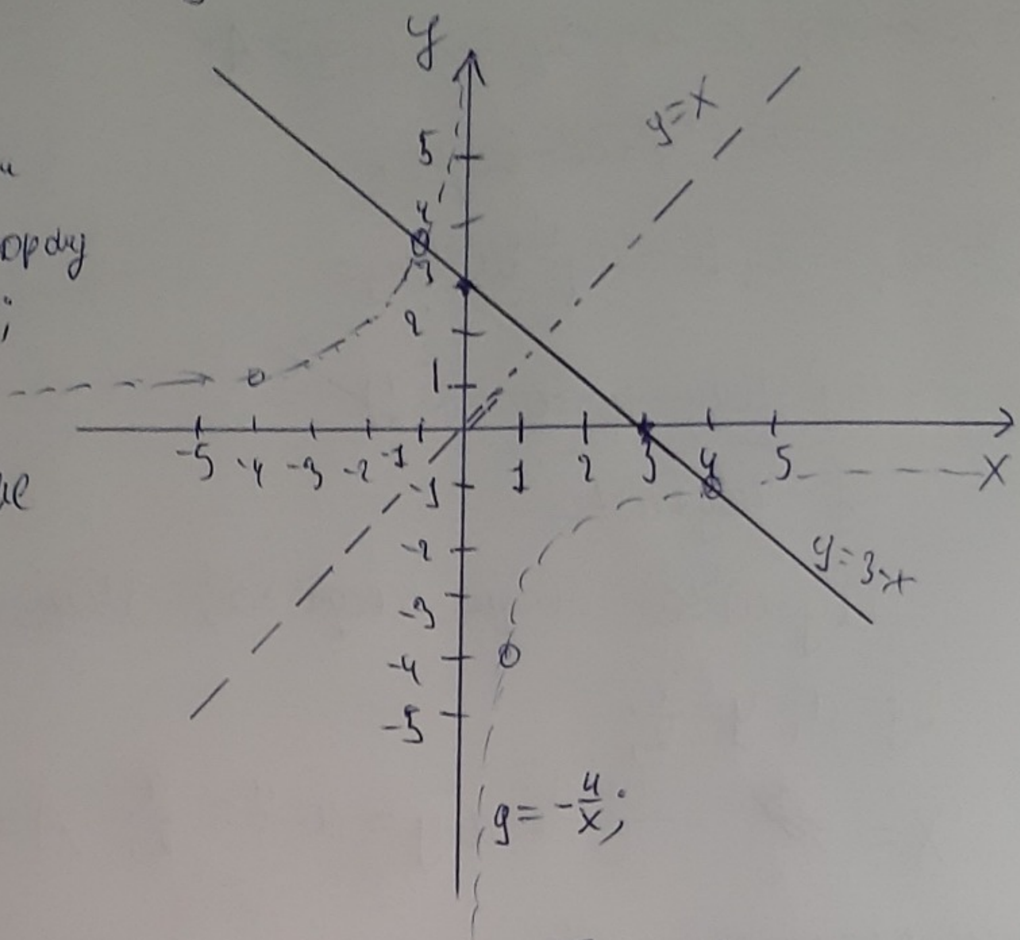
211007195 (U375980 M1277548)

Задание 3.

прямая $x+y=3 \Leftrightarrow$

$y = 3 - x$

Нужно, чтобы они были по одну сторону от прямой $y=3-x$;



Два случая: выше или ниже;

1) выше;

$f(x) = -\frac{4}{x}$;

$g(x) = x$;

$c(x) = 3-x$;

~~здесь вместо x → a~~

$\begin{cases} f(a) > c(a) \\ g(a) > c(a) \end{cases}$; $\begin{cases} -\frac{4}{x} > 3-x \\ x > 3-x \end{cases}$; $\begin{cases} x-3-\frac{4}{x} > 0; \\ 2x > 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-3x-4>0. \\ x > \frac{3}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} (x-4)(x+1) > 0 \rightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty); \Rightarrow -2a \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty) \\ x > \frac{3}{2}; \quad x > \frac{3}{2} \Rightarrow a > 3; \quad x = -\frac{a}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow a \in (-\infty; 2)$, $\Rightarrow \in (4; +\infty)$;

$a > 3$; $a \in (-\infty; 2) \cup (1/2; +\infty)$; $\rightarrow a \in (3; +\infty)$; $-\frac{1}{2}; 2$

2) $\begin{cases} f(x) < c(x) \\ g(x) < c(x) \end{cases}$; $\begin{cases} x^2-3x-4<0; \\ x < \frac{3}{2} \end{cases}$ $\rightarrow x = -2a$; $x = -\frac{a}{2}$; $\begin{cases} x \in (-1; 4) \\ x < \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in (2; -1/2) \\ a < 3; \end{cases}$

$a \in (-\frac{1}{2}; 2)$; ответ: $a \in (2; +\infty)$;

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007195**

ID профиля: **375980**

Вариант 12

Задание 4.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2(x^4+y^4)+5x^2y^2 = \dfrac{9}{4}; \end{cases}$$

$x^4+y^4 = x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2y^2 = (x^2+y^2)^2-2x^2y^2;$

$2(x^4+y^4)+5x^2y^2 = 2((x^2+y^2)-2x^2y^2)+5x^2y^2 = 2(x^2+y^2)+x^2y^2;$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2+x^2y^2 = \dfrac{9}{4}; \end{cases}$$ вычтем из второго первое:

$2(x^2+y^2)^2 - \dfrac{1}{x^2+y^2} = 1;$ $(x^2+y^2)=t;$ $t>0$

$2t^2 - \dfrac{1}{t} = 1;$ т.к. $t>0$, то умножим на t

$2t^3 - t - 1 = 0;$ $t=1$ подходит;

$2t^3-t-1 = (t-1)(2t^2+2t+1)=0,$
где $2t^2+2t+1$ всегда >0.
Значит, $t=1$ ед. корень.

$$\begin{array}{l|l} 2t^3+0\cdot t^2-t-1 & t-1 \\ \hline 2t^3-2t^2 & 2t^2+2t+1 \\ \quad 2t^2-t & \\ \quad 2t^2-2t & \\ \qquad t-1 & \end{array}$$

$x^2+y^2=1;$ подставим в первое ур-ие:

$1+x^2y^2=\dfrac{5}{4};$ $x^2y^2=\dfrac{1}{4};$ $(*)$

выразим $x^2=1-y^2;$ подставим в $(*)$: $y^2-y^4=\dfrac{1}{4};$

$4y^4-4y^2+1=0;$ $(2y^2-1)^2=0;$ $y^2=\dfrac{1}{2};$ $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}};$ $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

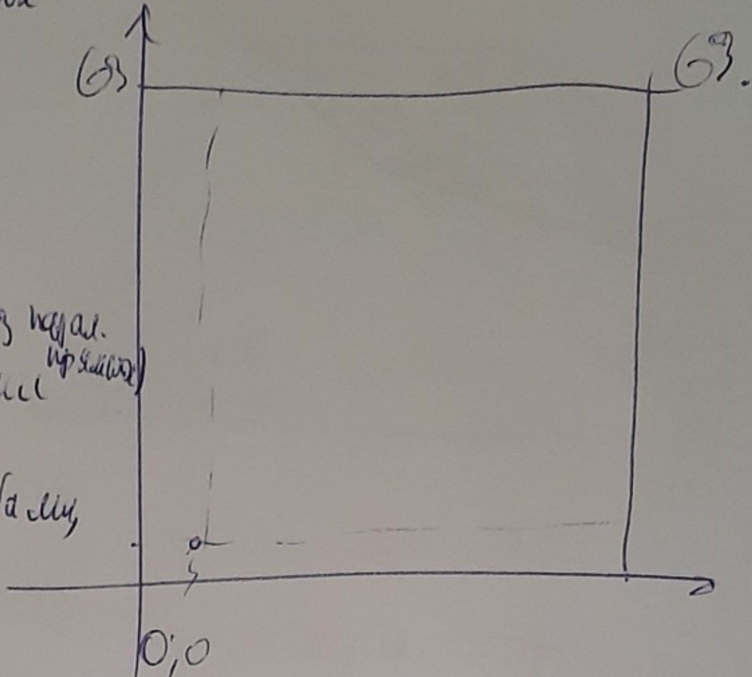
Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Задание 5.

Всего у нас выбираемых точек — 62^2;

Для точки (1;1) мы можем выбрать пару 61^2 способами (без парал. прямых)

Для (2;2) $61^2 - 1$ способами, т.к. (1;1) + (2;2) мы посчитали для точки (1;1)



Аналогично, (3;3) — $61^2 - 2$ способа

⋮

Для (62;62) — $61^2 - 61$ способ;

~~Мы два раза по~~

Для диагонали 63-x — также;

Всего $2\cdot62\cdot61^2 - 62\cdot60$ способов;

Мы два раза посчитали пары точек, где обе точки на диагоналях. их выбрать можно 61^2 способами,

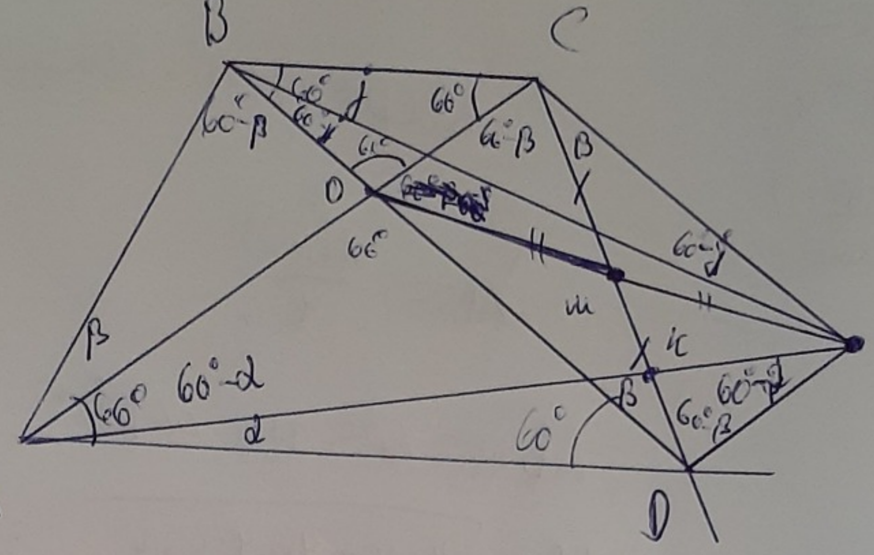
Значит, всего $2\cdot62\cdot61^2 - 62\cdot60 - 62^2$ способов.

Задание 6.(а)

△BOC и △AOD - прав.

T симметрична O отн. M, где CM = MD;

а) Д.ч. что △ABT - прав.



Док-во:

Т.к. T симметрична O относительно M, то OM = MT; CM = MD ⇒ OCTD - параллелограмм.

Откуда ∠COD = ∠CTD = 120°; ∠OCT = ∠TDO = 60°, Обозначим ∠TAD = α; ∠BAD = β; тогда ∠CAT = 60° - α; ∠ATD = ∠CAT = 60° - α (св. парал. AC ∥ TD); ∠CBT = j; ∠DBT = 60° - j; ∠CTB = ∠DBT = 60° - α;

Из △ADT - ∠ADT = 180° - 60° = 120°; тогда ∠CDT = 180° - 60° - β = 60° - β; откуда △DKT - равн., где K - AT ∩ CD;

Т.к. △ACK - подобен △DKT, то ∠CAT = ∠KTD = 60° - β

$\overset{\parallel}{60° - \alpha}$

откуда α = β; Из симметрии, для △ADT и △CBT, j = 60° - β;

~~∠DBT 60° - β~~

∠ATB = 180° - 60° - 60° + β + j = 60°;

∠ABT = 180° - ∠ATB - ∠BAT = 60°,

Значит, все ∠ △ABT = 60°;

211007195 (U375980 M1277549)

Задание 6(б)

$BC=2$
$AD=4;$
$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$?;

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot \sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3};$$

$$S_{ABT}=\frac{AB^2\cdot\sqrt{3}}{4};$$

AB по т. кос. для $\triangle ATB$ →

$$\rightarrow AB=\sqrt{4+16-2\cdot 2\cdot 4\cdot\cos 120^\circ}=\sqrt{20+16\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{28}=2\sqrt{7};$$

$$S_{ABT}=\frac{28\cdot\sqrt{3}}{4}=7\sqrt{3};$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}=\frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}}=\frac{7}{9};$$ Ответ: $\frac{7}{9}$.

211007195 (U375980 M1277549)