Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

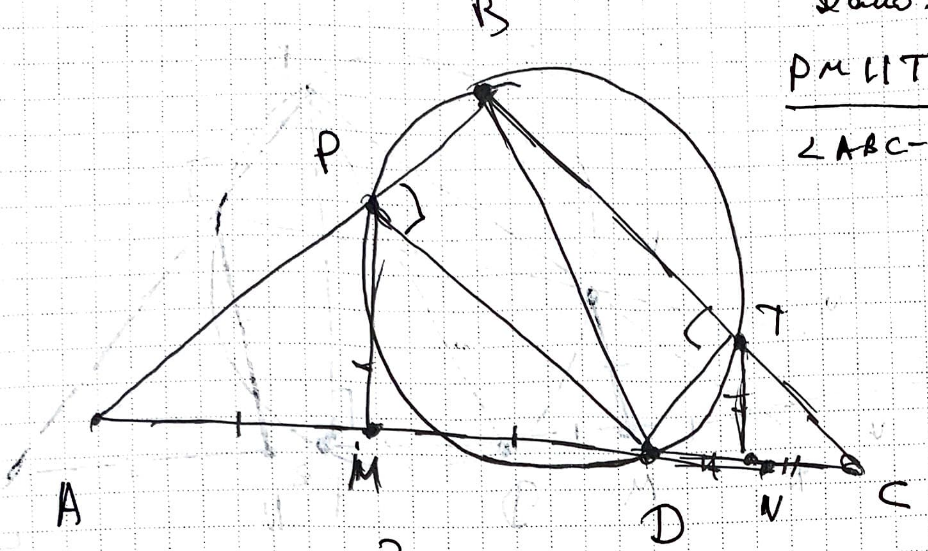
Шифр: **211007145**

ID профиля: **301420**

Вариант 12

Задача 1

а)



Дано:

$PM \parallel TN$

$\angle ABC - ?$

Решение:

1) Проведем отрезки PD и TD

2) Т.к. BD - диаметр, то $\angle DPB = \angle DTB = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APD = \angle DTC = 90^\circ$

3) Х. $\triangle APD$:

$\angle APD = 90^\circ$, PM - медиана $\Rightarrow PM = AM = MD$ (по св-ву прямоугольного $\triangle$)

4) Аналогично $TN = DN = CN$

5) Х. $\triangle APM$ и $\triangle DTN$:

$\frac{AM}{DN} = \frac{PM}{TN}$ (очевидно)

$\angle AMP = \angle DNT$ (т.к. $PM \parallel TN$)

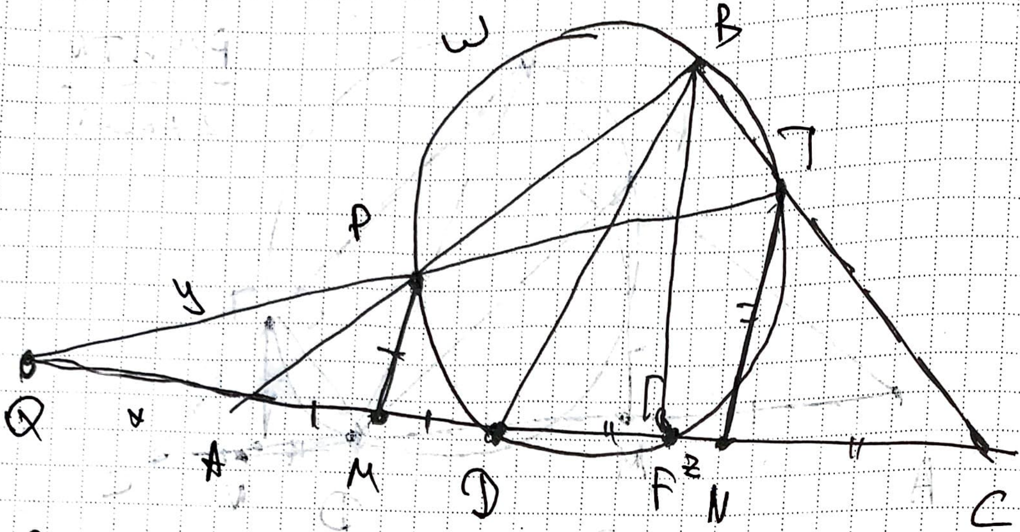
$\Rightarrow \triangle APM \sim \triangle DTN \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle PAM = \angle TDN \Rightarrow$

$\Rightarrow AB \parallel DT \Rightarrow \angle ABC = \angle DTC = 90^\circ$

Ответ: 90°

б) Нарисуем рисунок ещё раз!



1) Отметим точку F такую что: $AC \cap \omega = F$

$\angle BFD = 90°$ (опирается на BD - диаметр)

2) Отметим точку Q такую, что: $PT \cap AC = Q$

3) $\exists$ $QA = x$; $QP = y$; $FN = z$

4) $\measuredangle$ $\triangle QMP$ и $\triangle QNT$:

$MP \parallel TN \Rightarrow \triangle QMP \sim \triangle QTN$ (по двум углам)

Тогда:

$\frac{PM}{QM} = \frac{TN}{QN}$; $\frac{0,5}{x+0,5} = \frac{1}{x+2}$ (пользуюсь $PM = AM = MD$; $TN = ND = NC$)

$x + 0,5 = 0,5x + 1$

$0,5x = 0,5$

$\boxed{x = 1}$

Заметим, что PT - диаметр т.к. $\angle ABC = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow PT = \frac{y}{3}$

Также:

$\frac{MP}{QP} = \frac{NT}{QT}$; $\frac{0,5}{y} = \frac{1}{y + \frac{y}{3}}$; $y = 0,5y + \frac{2}{3}$

$0{,}5y = \frac{2}{3}$; $\boxed{y = \frac{4}{3}}$

5) По св-ву секущей к окружности:

$QP \cdot QT = QD \cdot QF$

$\frac{4}{3} \cdot \frac{8}{3} = 2 \cdot (3 - z)$; ~~$\frac{8}{3} = 3 - z$; $z = 3 - \frac{8}{3}$;~~

$\frac{16}{9} = 3 - z$; $z = 3 - \frac{16}{9} = \frac{11}{9}$ ~~$z = \frac{1}{3}$~~ ~~$\boxed{z = \frac{1}{3}}$~~

Значит $DF = \frac{11}{9} - \cancel{\frac{1}{3}} = \frac{2}{9}$

6) Δ $\triangle BDF$:

$BD^2 = DF^2 + BF^2$; $BF = \sqrt{BD^2 - DF^2}$; $BF = \sqrt{\frac{140}{81}}$

$BF = \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{4}{81}}$; ~~$BF = \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$~~

~~7) $S_{ABC} = AC \cdot \frac{BF}{2}$; $S_{ABC} = 3 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \sqrt{3}$~~

~~Ответ: $\sqrt{3}$~~

$BF = \frac{\sqrt{140}}{9}$

7) $S_{ABC} = AC \cdot \frac{BF}{2} = 3 \cdot \frac{\sqrt{140}}{18} = \frac{\sqrt{140}}{6} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{35}}{3}$

Как оказалось картинка немного не соответствует действительности. Очень жаль.

Задача 2

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{(x+1)(4-x)}$

Замена: $\exists\ \sqrt{x+1} = A,\ A \geq 0$

$\sqrt{4-x} = B,\ B \geq 0$

(1) $A - B + 3 = 2AB$

Заметим, что $A^2 + B^2 = x+1+4-x = 5$ (2)

Получим систему:

$+\begin{cases} A - B - 2AB + 3 = 0 \\ A^2 + B^2 = 5 \end{cases}$

$A^2 - 2AB + B^2 + A - B + 3 = 5$

Замена: $A - B = C$

$C^2 + C - 2 = 0$

Легко видеть, что $\left[\begin{array}{l} C = 1 \\ C = -2 \end{array}\right.$

Сначала рассмотрим случай $C = 1$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1$ | возведем обе части в квадрат

$\cancel{x}+1 - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} + 4 - \cancel{x} = 1$

$4 = 2\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$2 = \sqrt{(x+1)(4-x)}$ | опять в квадрат

$4 = (x+1)(4-x)$; $\cancel{4} = 4x + \cancel{4} - x^2 - x$

$x^2 - 3x = 0$

$x^2-3x=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 15 \\ \hline 80 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times\ 16 \\ \hline 144 \end{array}$

384 = 3 · 128 = 6 · 64

Теперь $C=-2$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=-2$ | в квадрат

$\cancel{x}+1-2\sqrt{(x+1)(4-x)}+4-\cancel{x}=4$

$1=2\sqrt{(x+1)(4-x)}$ | в квадрат

$1=4(x+1)(4-x)$

$1=4(4x+4-x^2-x)$

$1=4(4+3x-x^2)$

$1=16+12x-4x^2$

$4x^2-12x-15=0$

$D=144+16\cdot15=384$

$x=\frac{12\pm\sqrt{384}}{8}=\frac{12\pm8\sqrt{6}}{8}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{6}$

~~Ход~~ Определим где $4+3x-x^2 \geq 0$, ~~что~~ чтобы отсеять некоторые корни

~~$x^2-3x-4<0$~~

$(x+1)(4-x) \geq 0$

$f(x)=(x+1)(4-x)$ метод интервалов:

$x \in [-1; 4]$

$\frac{3}{2} \pm \sqrt{6}$ подходит

$\boxed{\sqrt{6} < 2,5}$

$2,5^2 = 6,25$

Заметим, что $x=0$ не подходит.

(При подстановке получается неверное равенство)

~~Докажем [illegible] корень~~

Ответ: $\frac{3}{2}-\sqrt{6}$; 3; $\frac{3}{2}+\sqrt{6}$

Задача 3

(1) $2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$ — точка A

(2) $ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$ — точка B

Найдем координаты B, используя формулу вершины параболы:

$$x_B = \frac{-4a^2}{2a} = -2a$$

$$y_B = a x_B^2 + 4a^2 x_B - a y_B + 4a^3 + 2$$

$$y_B = -2a^2 - 8a^4 - a y_B + 4a^3 + 2$$

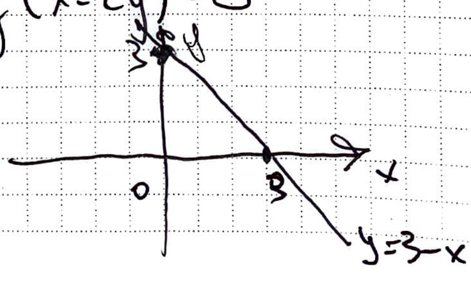
$-4a^2 + 2$

$$2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 =$$

$$= (x-a)^2 + (3y-a)^2 + 2y(x-2y) = 0$$

$x + y \leq 3$

$y = 3 - x$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007145**

ID профиля: **301420**

Вариант 12

Задача 4

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \quad (1) \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \quad (2) \end{cases} \qquad x, y \neq 0$$

Рассмотрим (2) ур-е:

$$2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4}$$

$$(\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}y^2)^2 = 2x^4+4x^2y^2+2y^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2): (\sqrt{2}x^2+\sqrt{2}y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4}$$

$$2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4}$$

Замена: $x^2+y^2 = A$

$x^2y^2 = B$

$$-\begin{cases} 2A^2 + B = \frac{9}{4} \\ \frac{1}{A} + B = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Очевидно $A \geq 0$

$$2A^2 - \frac{1}{A} = 1 \quad | \cdot A$$

$$2A^3 - 1 = A$$

$$2A^3 - A - 1 = 0$$

$A = 1$

~~Подбором~~

$$\begin{array}{r|l} 2A^3 - A - 1 & A-1 \\ \hline -\;2A^3 - 2A^2 & 2A^2+2A \\ 2A^2 - A & \\ -\;2A^2 - 2A & \\ \hline A - 1 & \end{array}$$

$2A^3 - A - 1 = (A-1)(2A^2+2A+1) = 0$

$2A^2+2A+1=0$

$D = 4 - 4\cdot 2 < 0 \Rightarrow$ единств. решение

$\boxed{A=1}$, тогда

$B = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$

Итого:

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2 = 1/4 \end{cases}$; $y^2 = \frac{1}{4x^2}$

$x^2 + \frac{1}{4x^2} = 1 \quad | \cdot 4x^2 \quad (4x^2>0)$

$4x^4+1 = 4x^2$; $4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$

$(2x^2-1)^2 = 0$

$2x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{2}$; $y^2 = \frac{1}{4\cdot\frac{1}{2}}$; $y^2 = \frac{1}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\qquad y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

Ответ: $\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$,

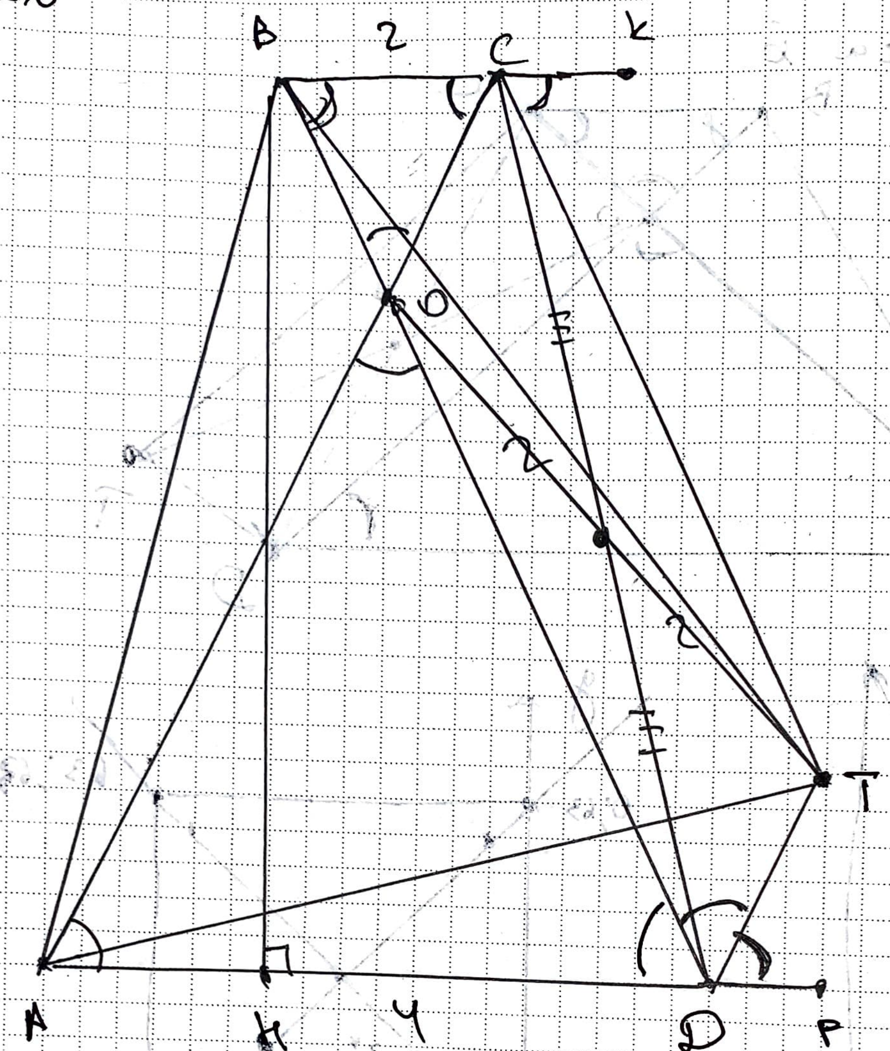
$-\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\sqrt{\frac{1}{2}}$,

$\sqrt{\frac{1}{2}}$; $-\sqrt{\frac{1}{2}}$,

$-\sqrt{\frac{1}{2}}$; $-\sqrt{\frac{1}{2}}$

Задача 6

а)



1) Заметим, что $OCTD$ – параллелограмм (диагонали точкой пересеч. делятся пополам)

$\Downarrow$

$DT = OC$; $DT \parallel OC \Rightarrow \angle TDP = 60^\circ$

$CT = OD$; $CT \parallel OD \Rightarrow \angle TCK = 60^\circ$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$\angle ODT = 60^\circ \Rightarrow ADT = 120^\circ$

2) Заметим, что $\angle AOB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AOB = \triangle ADT$ ($AD = AO$; $BO = DT$; $\angle AOB = \angle ADT$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = AT$

Аналогично

$\Delta BCT = \Delta ADT \Rightarrow BT = AT$

Итого $AB = AT = BT \Rightarrow ABT$ – равносто р. ч.т.д

б) $\dfrac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ – ?

1) Вычислим S_{ABT}:

по т. косинусов для ΔADT:

$AT^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \cdot \cancel{2} \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)$

$AT^2 = 16 + 4 + 8$; $AT = \sqrt{28}$

$S_{ABT} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot AT^2 = 7\sqrt{3}$

2) ~~Отсюда~~ $ABCD$ – трапеция, т.к. $\angle ACB = \angle CAD = 60^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot BH$ (BH – высота)

3) $\angle$ ΔBHD: $\sin 60^0 = \dfrac{BH}{BD}$; $BH = BD \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

№6

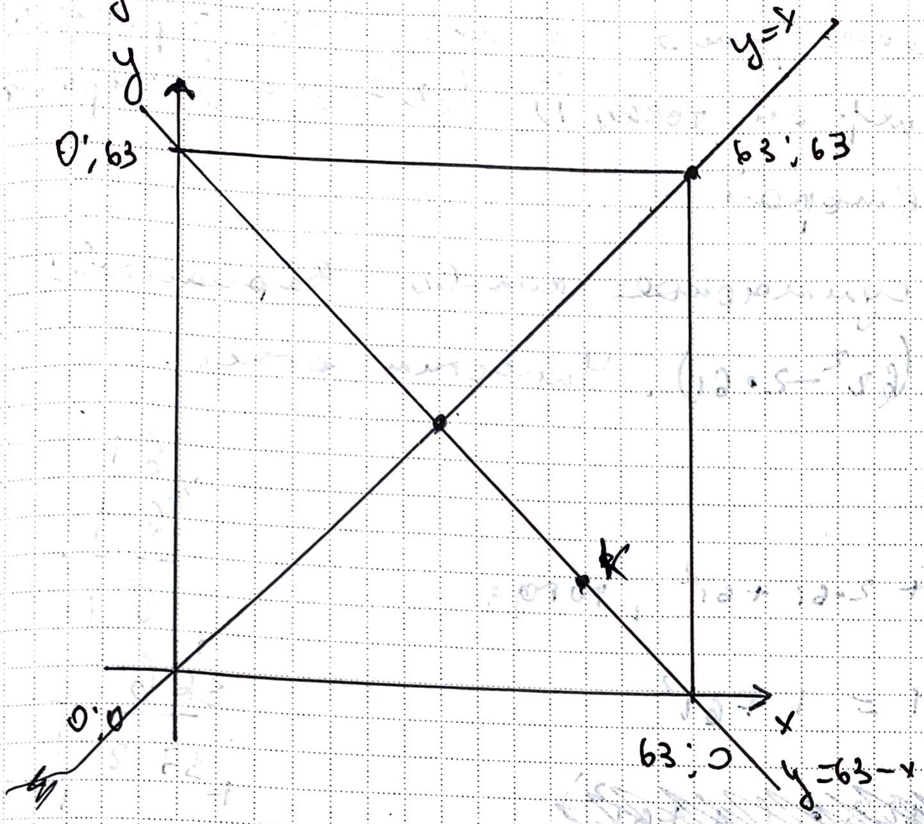
$$BH = (OD + OB)\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = \frac{2+4}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$$

Ответ: $\frac{7}{9}$

Задача 5



1) Всего внутри квадрата 62^2 узла сетки
2) Узлов, через которые проходят прямые $y=x$; $y=63-x$: $62+61=123$
3) Выберем на любой прямой ($y=x$ или $y=63-x$) произвольную точку k, лежащую в узле.

По горизонтали у нас 61 „плохой" узел. Сюда поставить вторую точку нельзя

Также по вертикали 61 „плохой" узел. Туда тоже нельзя поставить вторую точку.

4) Получается, что у нас 123 варианта для первой точки M $(62^2-61-61)$ вариантов для второй.

Тогда суммарное кол-во вариантов:

$123\cdot(62^2-2\cdot61)$. Упростим ответ:

$62=1+61$

$62^2=1^2+2\cdot61+61^2$, тогда

$62^2-2\cdot61=1+61^2$

~~Ответ: $123\cdot(1+61^2)$~~

Ответ: 457 806

$$\begin{array}{r} \times\ 61 \\ 61 \\ \hline 61 \\ +\ 366 \\ \hline 3721 \\ +\ 1 \\ \hline 3722 \\ \times\ 123 \\ \hline 11166 \\ +\ 7444 \\ +\ 3722 \\ \hline 457806 \end{array}$$