Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211007045**

ID профиля: **323766**

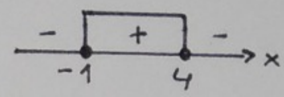
Вариант 12

Чистовик

№2 (начало).

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$$

Ограничения: $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ 4-x\geq 0 \\ 4+3x-x^2\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -1 \\ x\leq 4 \\ (x+1)(4-x)\geq 0 \end{cases}$



$x\in[-1;4]$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{(x+1)(4-x)}$$

Т.к. $x\in[-1;4]$, то $\sqrt{(x+1)(4-x)}=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}$.

$$2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}=\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3$$

Пусть $\sqrt{x+1}=a$, $\sqrt{4-x}=b$. Тогда $a^2+b^2=x+1+4-x=5$.

$\begin{cases} 2ab=a-b+3 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$; $\begin{cases} 2ab=a-b+3 \\ a^2-2ab+b^2=5-2ab \end{cases}$; $\begin{cases} 2ab=a-b+3 \\ (a-b)^2=5-2ab \end{cases}$; $\begin{cases} 2ab=a-b+3 \\ 2ab=5-(a-b)^2 \end{cases}$

$$5-(a-b)^2=a-b+3$$

$$(a-b)^2+(a-b)-2=0$$

Пусть $a-b=t$.

$$t^2+t-2=0$$

$$(t-1)(t+2)=0$$

1) $t=1$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=1$$

Заметим, что $y=\sqrt{x+1}$ - возраст. функция и $y=-\sqrt{4-x}$ - возраст. функция.
Сумма возраст. функций является возраст. функцией.

$$\underbrace{\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}}=\underbrace{1}_{const}$$

Следовательно, уравнение может иметь не более 1 решения.

Легко понять, что $x=3$ удовл. равенству.

2) $t=-2$

Чистовик

№2 (продолжение).

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = -2$

$\sqrt{x+1} = \sqrt{4-x} - 2 \quad |\hat{}2$

$x+1 = 4 - x - 4\sqrt{4-x} + 4$

$7 - 2x = 4\sqrt{4-x} \quad |\hat{}2$

$49 - 28x + 4x^2 = 16(4-x)$

$4x^2 - 12x - 15 = 0$

$D = 144 + 240 = 384 = 64 \cdot 6 = (8\sqrt{6})^2$

$x_1 = \frac{12 + 8\sqrt{6}}{8} = 1{,}5 + \sqrt{6}$

$x_2 = 1{,}5 - \sqrt{6}$

$g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}$, $g(x) \nearrow$

$D(g(x)) = [-1; 4]$, $E(g(x)) = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$

Значит, в данном случае должно быть только 1 решение.

Проверка:

Подставим x_1:

$\sqrt{1{,}5+\sqrt{6}+1} - \sqrt{4-1{,}5-\sqrt{6}} = -2$

$\sqrt{2{,}5+\sqrt{6}} - \sqrt{2{,}5-\sqrt{6}} = -2$

$\sqrt{2{,}5+\sqrt{6}} > \sqrt{2{,}5-\sqrt{6}}$ => их разность не может быть отриц.

Подставим x_2:

$\sqrt{1{,}5-\sqrt{6}+1} - \sqrt{4-1{,}5+\sqrt{6}} = -2$

$\sqrt{2{,}5-\sqrt{6}} - \sqrt{2{,}5+\sqrt{6}} = -2$

$\sqrt{2{,}5-\sqrt{6}} = \sqrt{2{,}5+\sqrt{6}} - 2 \quad |\hat{}2$

$2{,}5-\sqrt{6} = 2{,}5+\sqrt{6} - 4\sqrt{2{,}5+\sqrt{6}} + 4$

$4\sqrt{2{,}5+\sqrt{6}} = 2\sqrt{6} + 4 \quad |\hat{}2$

$16(2{,}5+\sqrt{6}) = 24 + 16\sqrt{6} + 16$

$40 + 16\sqrt{6} = 40 + 16\sqrt{6}$ – верно

Ответ: $1{,}5-\sqrt{6}$; 3.

№3 (начало).

$2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$ – точка A

$x^2 + (2y - 2a)x + 2a^2 - 6ay + 5y^2 = 0$

$D = 4y^2 - 8ay + 4a^2 - 8a^2 + 24ay - 20y^2 = -16y^2 + 16ay - 4a^2 = -(4y-2a)^2$

Т.к. уравнение задает точку A, то оно имеет 1 реш. $(x_A; y_A)$. Следовательно, $D=0$.

$4y - 2a = 0$

$y = \frac{a}{2}$

$x = \frac{2a-2y}{2} = \frac{2a-a}{2} = \frac{a}{2}$

$A\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$

Чистовик

№ 3 (продолжение).

$ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$

$y = x^2 + 4ax + 4a^2 + \frac{2}{a}$ – парабола с вершиной в т. B

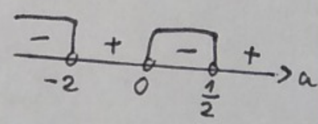
$x_B = \frac{-4a}{2} = -2a$

$y_B = 4a^2 - 8a^2 + 4a^2 + \frac{2}{a} = \frac{2}{a}$ $\qquad B\left(-2a; \frac{2}{a}\right)$

Точки $A\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ и $B\left(-2a; \frac{2}{a}\right)$ лежат по одну сторону от прямой $y = -x + 3$.

1) A и B лежат выше $y = -x + 3$.

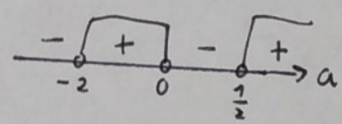
$\begin{cases} \frac{a}{2} > -\frac{a}{2} + 3 \\ \frac{2}{a} > 2a + 3 \end{cases}$; $\begin{cases} a > 3 \\ \frac{2a^2 + 3a - 2}{a} < 0 \end{cases}$; $\begin{cases} a > 3 \\ \frac{(a+2)(2a-1)}{a} < 0 \end{cases}$



$a \in \varnothing$

2) A и B лежат ниже $y = -x + 3$.

$\begin{cases} \frac{a}{2} < -\frac{a}{2} + 3 \\ \frac{2}{a} < 2a + 3 \end{cases}$; $\begin{cases} a < 3 \\ \frac{(a+2)(2a-1)}{a} > 0 \end{cases}$



$a \in (-2; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; 3\right)$

Ответ: $(-2; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

Черновик

$x+1=4-x-4\sqrt{4-x}+4$

$4\sqrt{4-x}=7-2x$

$16(4-x)=49-28x+4x^2$

$64-16x=49-28x+4x^2$

$4x^2-12x-15=0$

$D=144+240=384$

$(x-a)^2+(y-b)^2=0$

окружность с радиусом $R=0$ ~3.

$y=kx+b$

$\begin{cases}\frac{a}{2}=\frac{a}{2}k+b\\ \frac{2}{a}=-2ak+b\end{cases}$ $\Big|-$ $\left(\frac{a}{2}+2a\right)k=\frac{a}{2}-\frac{2}{a}$

$\frac{5a}{2}\cdot k=\frac{a^2-4}{2a}$

$k=\frac{a^2-4}{2a}\cdot\frac{2}{5a}=$

$=$

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$ – точка A

$a^2-2ax+x^2+a^2-6ay+9y^2+2xy-4y^2=0$

$(a-x)^2+(a-3y)^2+2y(x-2y)=0$

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$ – парабола с вершиной в точке B

$x+y=3$; $\boxed{y=-x+3}$ точки A и B лежат по одну сторону от прямой

$y=\frac{ax^2+4a^2x+4a^3+2}{a}=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

$x_B=\frac{-4a}{2}=-2a$

$y_B=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$ $B\left(-2a;\frac{2}{a}\right)$

$384 \,|\, 64$; $64\cdot 6=384$; $384 \,|\, 16$, -32, 24, 64

$4+16=$

$\frac{3}{2}$

$\frac{-3+5}{-2\cdot 4}$ $60\cdot 4=240$

$(x^2-2ax+a^2)+(y^2-2ay+a^2)-4ay+2xy+4y^2=0$

$x^2+(2y-2a)x+2a^2-6ay+5y^2=0$

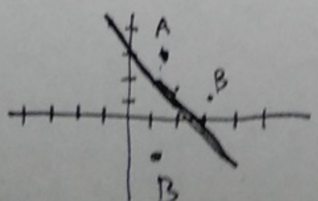
$D=4y^2-8ay+4a^2-8a^2+24ay-20y^2=-16y^2+16ay-4a^2=-(4y-2a)^2$

$4y=2a$

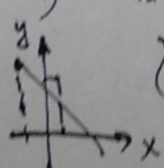
$y=\frac{a}{2}$ $x=\frac{-b}{2a}=\frac{2a-2y}{2}=\frac{2a-a}{2}=\frac{a}{2}$ $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$

$1{,}5-3{,}4=-0{,}9$; $3{,}9$

$A\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$

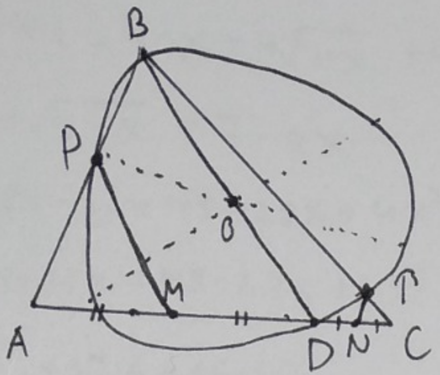


1) $\begin{cases}y_A>-x+3\\ y_B>-x+3\end{cases}$

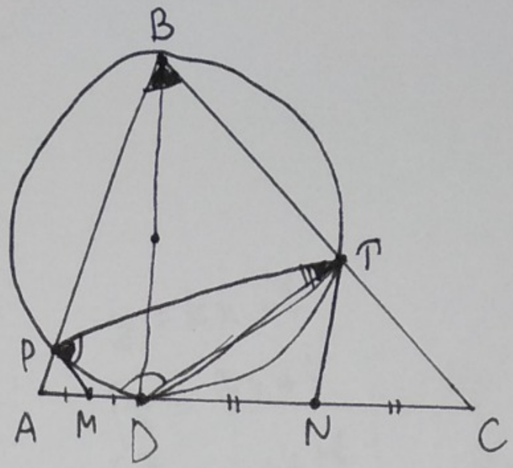


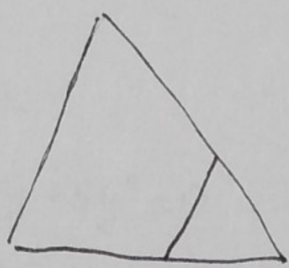
$2{,}4\cdot 2{,}4=5{,}76$ $\sqrt{6}\approx 2{,}4$ $2{,}5=\sqrt{6{,}25}$

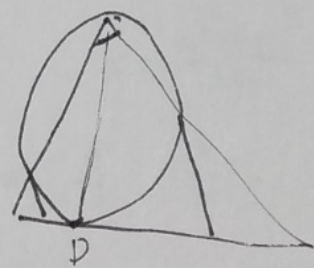
Черновик



PM ‖ TN







$\sqrt{1,5-\sqrt{6}+1} - \sqrt{4-1,5-\sqrt{6}}$

$\sqrt{2,5-\sqrt{6}} - \sqrt{2,5-\sqrt{6}}$

Черновик

№2.

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$\sqrt{a} - \sqrt{b} + 3 = 2\sqrt{ab}$

Ограничения: $(x+1)(4-x) \geq 0$

$-\quad -1 \quad + \quad 4 \quad -$

$x \in [-1; 4]$

$f(x) =$ $g(x) = \sqrt{4+3x-x^2}$, $x = \frac{3}{2}$

$-1 \quad + \quad \frac{3}{2} \quad - \quad 4$

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{}} \cdot (3-2x) = \frac{3-2x}{2\sqrt{4+3x-x^2}}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{4-x}$

$2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{4-x} \underbrace{- \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x}} = 3$

$x+1 = 4-x$

$2x = 3$

$x = 1{,}5$

$\cancel{2ab - a + b - 3 = 0}$

$f(x) = 2\sqrt{4+3x-x^2} - \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x}$

$a - b + 3 = 2ab$

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$x = 0$

$\underbrace{1 - 2 + 3}_{2} = \underbrace{2 \cdot 1 \cdot 2}_{4}$

$\boxed{x = 3}$ – корень

$2 - 1 + 3 = 2 \cdot 2$

$4 = 4$

$f'(x) =$

$\sqrt{4-x} = t$

$4 - x = t^2$

$x - 4 = -t^2$

$\sqrt{x+1} = \sqrt{5-t^2}$

$\sqrt{5-t^2} - t + 3 = 2t\sqrt{5-t^2}$

$\sqrt{5-t^2}(1-2t) = t - 3 \quad |^2$

$(5-t^2)(1-4t+4t^2) = t^2 - 6t + 9$

$(4t^2 - 4t + 1)(t^2 - 5) + t^2 - 6t + 9 = 0$

$\cancel{4t^4 - 20t^2 - 4t^3 + 20t + t^2 - 5 + t^2 - 6t + 9 = 0}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x} - 3$

$a = \sqrt{x+1}$, $b = \sqrt{4-x}$.

$\cancel{a^2 + b^2 = x + 1 + 4 - x}$

$f(x) = \sqrt{x+1}\sqrt{4-x}$

$D(f) = [-1; 5]$

$E(f) = [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$

$\begin{cases} a - b = 2ab - 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$

$t^2 + t - 2 = 0$

$(t-1)(t+2) = 0$

$\begin{cases} a - b - 2ab + 3 = 0 \\ (a-b)^2 = 5 - 2ab \Rightarrow -2ab = (a-b)^2 - 5 \end{cases}$

$\underbrace{\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}} = 1 \Rightarrow 1$ к.

$x = 3$

$\underbrace{\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}} = -2 \Rightarrow 1$ к.

$\sqrt{x+1} = \sqrt{4-x} - 2$

$(a-b)^2 + a - b - 2 = 0$

Пусть $a - b = t$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211007045**

ID профиля: **323766**

Вариант 12

Черновик

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$2(x^4+2x^2y^2+y^4) + x^2y^2 = \frac{9}{4}$

$2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4}$

$x^2y^2 = \frac{9}{4} - 2(x^2+y^2)^2$

$\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{9}{4} - 2(x^2+y^2)^2 = \frac{5}{4}$

Пусть $x^2+y^2=t$, $t \geq 0$.

$2t^2 - \frac{1}{t} - 1 = 0 \quad | \cdot t \neq 0$

$2t^3 - t - 1 = 0$ $\quad \boxed{t=1}$ – корень

$\cancel{at^3 + bt^2 + ct + d = 0}$

$\cancel{(at^2+bt+c)(dt+e) = 0}$

$$\begin{array}{r|l} 2t^3 - t - 1 & t-1 \\ \underline{2t^3 - 2t^2} & \overline{2t^2+2t+1} \\ 2t^2 - t - 1 & \\ \underline{2t^2 - 2t} & \\ t - 1 & \end{array}$$

$(t-1)(2t^2+2t+1)=0$

$2t^3 + \cancel{2t^2 + t - 2t^2 - 2t - 1 = 0}$

$D = 4 - 8 = -4$

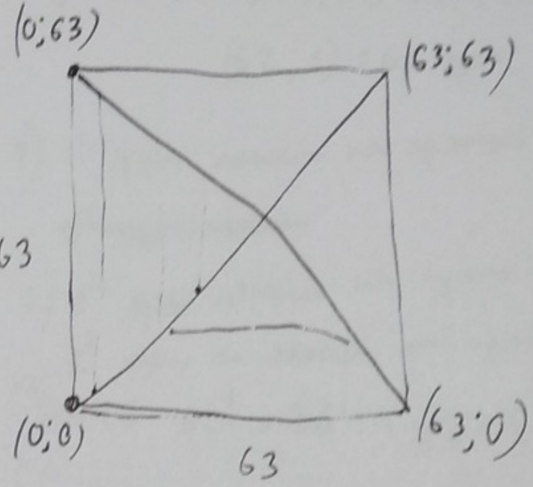
корней нет

сколько узлов?

узлы $(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5), \dots, (62;62) = 62$

$y = x$, $y = 63 - x$

узлы $(1;62), (2;61), (3;60), \dots, (62;1) = 62$



x: 1, 2, 3, …, 62

y: 1, 2, 3, …, 62

$62 \cdot 62 = 62^2$ узлов

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times 62 \\ \hline 124 \\ 372 \\ \hline 3844 \end{array}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 1 \\ (xy)^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$x^2 + \frac{1}{4x^2} = 1 \quad | \cdot 4x^2 \neq 0$

$4x^4 - 4x^2 + 1$

1) $\begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ (x+y)^2 = 2 \end{cases}$ $\rightarrow \cancel{x} \; y = \frac{1}{2x}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1}$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot -\frac{\sqrt{2}}{1}$

$\left(x + \frac{1}{2x}\right)^2 = 2$

$y = \frac{1}{2x}$

$\left(\frac{2x^2+1}{2x}\right)^2 = 2$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{2}$ $\qquad -\sqrt{2}$

2) $\begin{cases} xy = -\frac{1}{2} \\ (x+y)^2 = 0 \end{cases}$

$x = -y$

$-y^2 = \cancel{\dots} -\frac{1}{2}$

$y^2 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad -\frac{1}{\sqrt{2}}$

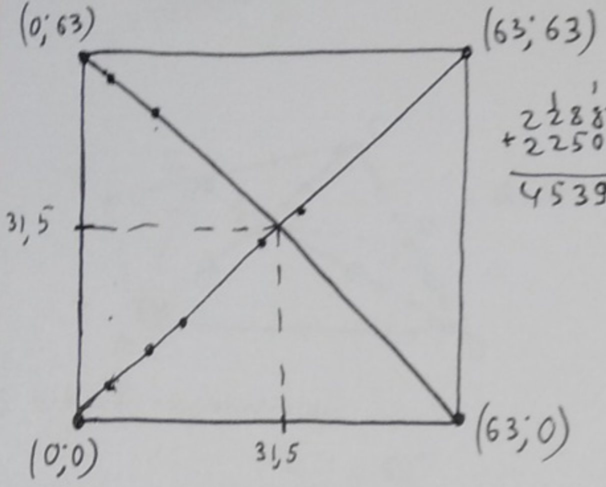
x $\qquad$ x

211007045 (U323766 M1274547)

Черновик

Выбрать 2 узла

№5.



$$\begin{array}{r} 228873 \\ +225029 \\ \hline 453902 \end{array}$$

$y=x$: $(1;1), (2;2), (3;3), \ldots (62;62) = 62$ узла

$y=63-x$: $(1;62), (2;61), (3;60), \ldots,$

$(62;1) = 62$ узла

1) 1й узел лежит на прямой $y=x$,

~~2й узел лежит~~

2) 1й узел лежит на прямой $y=63-x$,

2й узел не лежит на прямой $y=x$.

Всего $62^2 = 3844$ узлов.

Оба узла не лежат на прямой, которая || ох или оу.

1) $(1;1) \to 3844-(61+61)$

$(2;2) \to 3844-(1+61+61)$

$(3;3) \to 3844-(2+61+61)$

...

$(62;62) \to 3844-(61+61+61)$

$S_1 = \ldots$

2) $(1;62) \to 3844-(62+61+61)$

$(2;61) \to 3844-(1+62+61+61)$

$(3;60) \to 3844-(2+62+61+61)$

...

$(62;1) \to 3844-(61+62+61+61)$

$S_2 = \ldots$

$S_1 + S_2 = \ldots$

121 $\quad \begin{array}{r} 61 \\ 61 \\ 62 \\ \hline 184 \end{array}$

1 2 3 4 ... 58 59 60 61

30 32

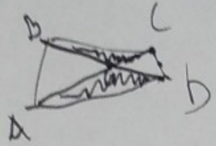
$\begin{array}{r} 3844 \\ -121 \\ \hline 3723 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 62 \\ \cdot 30 \\ \hline 1860 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 1860 \\ 31 \\ \hline 1891 \end{array}$

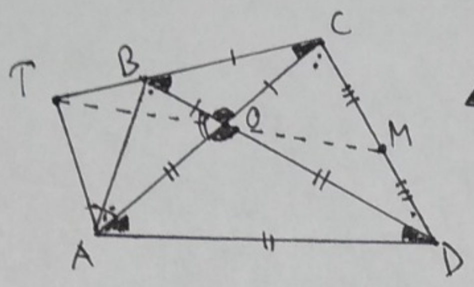
$\begin{array}{r} 3723 \\ \cdot 62 \\ \hline 7446 \\ 22338 \\ \hline 230826 \\ -1891 \\ \hline 228935 \\ 1891 \\ \hline 230826 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 62 \\ \cdot 62 \\ \hline 124 \\ 372 \\ \hline 3844 \end{array}$ $\quad .3660$

$\begin{array}{r} 3844 \\ -122 \\ \hline 3722 \\ \cdot 62 \\ \hline 7444 \\ 22332 \\ \hline 230764 \\ -1891 \\ \hline 228873 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 3844 \\ -184 \\ \hline 3660 \\ 184 \\ \hline 3844 \end{array}$

$\begin{array}{r} 3660 \\ 62 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 366 \\ \cdot 62 \\ \hline 732 \\ 2196 \\ \hline 226920 \\ -1891 \\ \hline 225029 \\ 1891 \\ \hline 226920 \end{array}$

Черновик





$\angle$ - 60°

! ΔABT – правильный

$\cdot + \cdot\cdot = 60^\circ$

211007045 (U323766 M1274547)

Чистовик

№4 (начало).

$$\frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4}$$

$$2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4}$$

Преобразуем 2ое уравнение системы:

$$2(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + x^2y^2 = \frac{9}{4}$$

$$2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Пусть $a = x^2+y^2$; $b = x^2y^2$.

$$(*)\begin{cases} \frac{1}{a} + b = \frac{5}{4} \\ 2a^2 + b = \frac{9}{4} \end{cases} \Bigg| - \Rightarrow 2a^2 - \frac{1}{a} = 1 \quad \big| \cdot a \neq 0$$

$$2a^3 - a - 1 = 0$$

Заметим, что $a = 1$ - корень.

$$\begin{array}{r|l} 2a^3 - a - 1 & a - 1 \\ \underline{-\ 2a^3 - 2a^2} & \overline{2a^2 + 2a + 1} \\ 2a^2 - a - 1 & \\ \underline{-\ 2a^2 - 2a} & \\ a - 1 & \\ \underline{-\ a - 1} & \\ 0 & \end{array}$$

$$(a-1)(2a^2+2a+1) = 0$$

$$D = 4 - 8 = -4$$

$$a \notin \mathbb{R}$$

$$a = 1$$

Подставим в 1ое уравнение системы (*) и получим:

$$b = \frac{5}{4} - \frac{1}{1} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Чистовик

№4 (продолжение).

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Решим 1ую систему совокупности:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=\frac{1}{2x} \end{cases}$$

$$x^2+\frac{1}{4x^2}=1 \ \Big| \cdot 4x^2 \neq 0$$

$$4x^4-4x^2+1=0$$

$$(2x^2-1)^2=0$$

$$2x^2=1$$

$$x^2=\frac{1}{2}$$

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}, \ y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \ y_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Решим 2ую систему совокупности:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=-\frac{1}{2x} \end{cases}$$

$$x^2+\frac{1}{4x^2}=1 \ \Big| \cdot 4x^2 \neq 0$$

$$4x^4-4x^2+1=0$$

$$(2x^2-1)^2=0$$

$$x^2=\frac{1}{2}$$

$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}, \ y_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}, \ y_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

Чистовик

№5 (начало).

Важно отметить, что точка пересечения прямых $y=x$ и $y=63-x$ не является целочисленной и не придется ее учитывать (чтобы не посчитать несколько раз).

$$\left.\begin{array}{l} x=1,2,3,\ldots,62 \\ y=1,2,3,\ldots,62 \end{array}\right\} \text{Всего } 62^2=3844 \text{ узлов}$$

Прямой $y=x$ принадлежат точки $(1;1),(2;2),(3;3),\ldots,(62;62)$, т.е. 62 узла.

Прямой $y=63-x$ принадлежат точки $(1;62),(2;61),(3;60),\ldots,(62;1)$, т.е. всего 62 целочисленные точки.

Введу обозначение: $(x;y)\longrightarrow A$. Это означает, что точке с координатами $(x;y)$ соответствует A целочисленных точек.

Разобьем задачу на два случая:

1) 1ый узел лежит на прямой $y=x$.

$(1;1)\longrightarrow 3844-\underbrace{(61+61)}$

т.к. по условию оба узла не должны лежать на прямой, параллельной ox или oy

$(2;2)\longrightarrow 3844-\underbrace{(1+61+61)}$

„1" появилась, т.к. способ выбрать узлы $(1;1)$ и $(2;2)$ мы уже посчитали

$(3;3)\longrightarrow 3844-\underbrace{(2+61+61)}$

„2", т.к. способы выбрать узлы $(1;1)$ и $(3;3)$, $(2;2)$ и $(3;3)$ уже были подсчитаны ранее

…

$(62;62)\longrightarrow 3844-(61+61+61)$

Итого получаем:

$$S_1=\overset{3844-(61+61)}{\vee}3844-(1+61+61)+3844-(2+61+61)+\ldots+3844-(61+61+61)=$$

$$=3844\cdot62-122\cdot62-(1+2+3+\ldots+61)=62\cdot(3844-122)-(62\cdot30+31)=$$

$$=230\overset{764}{\cancel{826}}-1891=228\overset{873}{\cancel{935}}$$

Чистовик

№5 (продолжение).

2) $1^{\text{ый}}$ узел лежит на прямой $y=63-x$, а $2^{\text{ой}}$ узел не лежит на прямой $y=x$ (иначе мы дважды подсчитаем одно и то же).

$(1;62) \longrightarrow 3844 - \underbrace{(61+61+62)}$

„62", т.к. именно столько точек лежит на прямой $y=x$

$(2;61) \longrightarrow 3844-(1+61+61+62)$

$(3;60) \longrightarrow 3844-(2+61+61+62)$

...

$(62;1) \longrightarrow 3844-(61+61+61+62)$

Итого получаем:

$S_2 \overset{3844-(61+61+62)}{=} 3844-(1+61+61+62)+3844-(2+61+62+61)+\ldots+3844-(61+61+61+62)=3844\cdot 62-184\cdot 62-(1+2+3+\ldots+61)=62\cdot(3844-184)-1891=$
$=226920-1891=225029$

Количество способов выбрать два узла сетки равно сумме S_1+S_2.

$S_1+S_2=228873+225029=453902$

Ответ: 453902.

4