Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

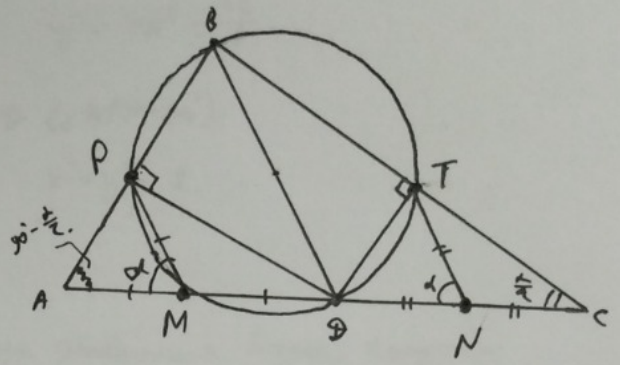
Шифр: **211006966**

ID профиля: **364257**

Вариант 12

Чистовик.

Задача 1



а) Отмечу, что $\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ$ как вписанные, опирающиеся на диаметр.

Тогда $\triangle APD$ и $\triangle CTD$ – прямоугольные, PM и TN – их медианы. По свойству медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, получим: $PM = AM = MD$; $TN = DN = CN$.

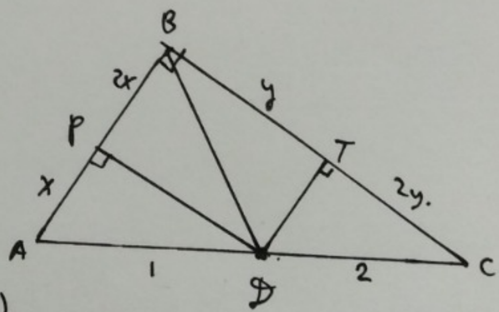
Пусть $\angle TND = \alpha$. Поскольку $\angle TND$ – внешний в $\triangle NTC$, то $\angle NTC + \angle NCT = \alpha$.
$\triangle NTC$ – р/б ($TN = NC$ по ранее доказанному). Тогда $\angle NTC = \angle NCT = \frac{\alpha}{2}$; $\boxed{\angle NCT = \frac{\alpha}{2}}$

По условию $PM \parallel TN$. Тогда $\angle AMP = \angle DNT = \alpha$ как соответственные при $NT \parallel PM$ и секущей AC.
$\triangle AMP$ – р/б ($AM = PM$ по ранее доказанному). Тогда $\angle APM = \angle PAM = \frac{180^\circ - \angle AMP}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$; $\boxed{\angle PAM = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}}$

Из суммы углов $\triangle ABC$: $\angle ABC = 180^\circ - \angle ACB - \angle BAC = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - (90^\circ - \frac{\alpha}{2}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Тогда $\underline{\underline{\angle ABC = 90^\circ}}$

б) Имеем: $AD = 2PM = 1$; $CD = 2TN = 2$.



В четырёхугольнике BPDT:
$\angle BPD = \angle PBT = \angle BTD = 90^\circ$. Тогда <u>BPDT – прямоугольник.</u>

$\triangle CTD \sim \triangle CBA$ (по двум углам: $\angle ACB$ – общий; $\angle CTD = \angle CBA = 90^\circ$).
Тогда $\frac{TD}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{2}{3}$. Поскольку BPDT - прямоугольник, то $TD = BP$; $PD = BT$.
Тогда $\frac{BP}{AB} = \frac{TD}{AB} = \frac{2}{3}$. Пусть $BP = 2x$. Тогда $AP = x$

$\triangle APD \sim \triangle ABC$ (по двум углам: $\angle BAC$ – общий; $\angle APD = \angle ABC = 90^\circ$).
Тогда $\frac{PD}{BC} = \frac{BT}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$. Тогда, если $BT = y$, то $BC = 3y$; $CD = 2y$.

Чистовик.

По теореме Пифагора для $\triangle BTD$ ($\angle BTD = 90^\circ$):

$DT = BP = 2x$; $BT^2 + TD^2 = BD^2$; $y^2 + 4x^2 = \frac{16}{9}$.

По теореме Пифагора для $\triangle APD$ ($\angle APD = 90^\circ$):

$PT = BT = y$; $AP^2 + PT^2 = AD^2$; $x^2 + y^2 = 1$.

Получили систему:

$$\begin{cases} y^2 + 4x^2 = \frac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим:

$3x^2 = \frac{7}{9}$; $x = \sqrt{\frac{7}{27}}$.

Тогда $y^2 = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$; $y = \sqrt{\frac{20}{27}}$.

$\triangle ABC$ – прямоугольный ($\angle ABC = 90^\circ$ по ранее доказанному):

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 3y = \frac{9}{2} \cdot \sqrt{\frac{7}{27}} \cdot \sqrt{\frac{20}{27}} = \frac{9 \cdot \sqrt{7} \cdot 2\sqrt{5}}{2 \cdot 27} = \frac{\sqrt{35}}{3}.$$

Ответ: $\angle ABC = 90^\circ$; $S_{ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}$.

Чистовик.

Задача 2 $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$.

Выпишем ограничение на x:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 4 \end{cases} \qquad \boxed{x \in [-1; 4]} \qquad (**)$$

($4+3x-x^2 \geq 0$ будет соблюдаться, т. к. $4+3x-x^2 = (x+1)(4-x)$)

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2\sqrt{4+3x-x^2} - 3 \qquad (*)$$

Возведём обе части равенства в квадрат:

$$(x+1) - 2\sqrt{4+3x-x^2} + (4-x) = 4(4+3x-x^2) - 12\sqrt{4+3x-x^2} + 9.$$

$$10\sqrt{4+3x-x^2} = 4(4+3x-x^2) + 4.$$

Пусть $\sqrt{4+3x-x^2} = t$. Имеем:

$4t^2 - 10t + 4 = 0$; $\quad 2t^2 - 5t + 2 = 0$.

$D = 25 - 16 = 9$; $\sqrt{D} = 3$.

$t_1 = \frac{5+3}{4} = 2$; $\quad t_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

Тогда: $\sqrt{4+3x-x^2} = 2$ или $\sqrt{4+3x-x^2} = \frac{1}{2}$.

$4+3x-x^2 = 4$ или $4+3x-x^2 = \frac{1}{4} \,|\cdot 4$

$x^2 - 3x = 0$ или $16 + 12x - 4x^2 = 1$;

$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{array}\right.$ $\qquad 4x^2 - 12x - 15 = 0$.

$D_1 = 36 + 60 = 96$; $\sqrt{D_1} = 4\sqrt{6}$.

$$\left[\begin{array}{l} x_3 = \frac{6+4\sqrt{6}}{4} = \frac{3}{2} + \sqrt{6}. \\ x_4 = \frac{6-4\sqrt{6}}{4} = \frac{3}{2} - \sqrt{6}. \end{array}\right.$$

Отмечу, что при возведении $(*)$ в квадрат могла произойти потеря равносильности.

Для отбора корней достаточно проверить, совпадают ли знаки у правой и левой частей $(*)$.

$x_1 = 0$ – не подх.

$x_2 = 3$ — подходит (удовлетворяет $(**)$)

$x_3 = \frac{3}{2} + \sqrt{6}$ – не подх. (левая часть $(*)$ положительна, а правая – отрицательна);

$\sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{6}+1} - \sqrt{4-\frac{3}{2}-\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{6}} - \sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}} > 0$;

$2\sqrt{4+\frac{9}{2}+3\sqrt{6}-(\frac{3}{2}+\sqrt{6})^2} - 3 = 2\sqrt{\frac{17}{2}+3\sqrt{6}-\frac{9}{4}-3\sqrt{6}-6} - 3 = 2\sqrt{\frac{1}{4}} - 3 < 0$.

$x_4 = \frac{3}{2} - \sqrt{6}$ — подх. (обе части (*) отрицательны); уд. условиям (**):

$$\sqrt{\frac{3}{2} - \sqrt{6} + 1} - \sqrt{4 - \frac{3}{2} + \sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{2} - \sqrt{6}} - \sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{6}} < 0.$$

$$2\sqrt{4 + 3x_4 - x_4^2} - 3 = 2\left(\sqrt{\frac{5}{2} - \sqrt{6}}\sqrt{\frac{5}{2} + \sqrt{6}}\right) - 3 = 2\sqrt{\frac{25}{4} - 6} - 3 = 2\sqrt{\frac{1}{4}} - 3 < 0.$$

Ответ: $x = 3$; $x = \frac{3}{2} - \sqrt{6}$.

Чистовик

Чистовик.

Задача 3 $2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

Рассмотрим данное ур-ние как квадратное относительно x:

$$x^2+x(2y-2a)+2a^2-6ay+5y^2=0.$$

Посчитаем дискриминант по чётной формуле $(2y-2a=2(y-a))$:

$$D_1=y^2-2ay+a^2-2a^2+6ay-5y^2=-4y^2+4ay-a^2=-(2y-a)^2.$$

Получаем, что $D_1\leq 0$.

Тогда чтобы корни существовали, необходимо, чтобы $D_1=0$; $\boxed{a=2y}$

Подставляем в исходное уравнение:

$$2\cdot 4y^2-4yx-12y^2+x^2+2xy+5y^2=0$$

$$x^2-2xy+y^2=0$$

$$(x-y)^2=0 \Leftrightarrow \boxed{x=y}.$$

Таким образом, ~~Все~~ при любом a все точки A лежат на прямой $x=y$; при этом $a=2y$.

Тогда точка A имеет координаты $\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

$$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0 \quad \Big|:a\neq 0.$$

$$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}.$$

Тогда вершина B параболы находится в точке с $x_B=\frac{-4a}{2}=-2a.$

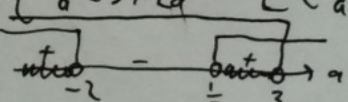
Тогда $y_B=y(-2a)=4a^2+4a\cdot(-2a)+4a^2+\frac{2}{a}=8a^2-8a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}.$

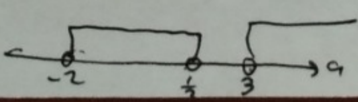
Точка B имеет координаты $\left(-2a;\frac{2}{a}\right)$.

Приведённое в задаче условие можно записать в виде:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y_A<3-x_A\\ y_B<3-x_B\end{cases}\\ \begin{cases}y_A>3-x_A\\ y_B>3-x_B\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{a}{2}<3-\frac{a}{2}\\ \frac{2}{a}<3+2a\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{a}{2}>3-\frac{a}{2}\\ \frac{2}{a}<3+2a\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<3\\ \frac{2}{a}<3+2a \quad |\cdot a\neq 0\end{cases}\\ \begin{cases}a>3\\ \frac{2}{a}>3+2a \quad |\cdot a\neq 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<3\\ 2a^2+3a-2>0\end{cases}\\ \begin{cases}a>3\\ 2a^2+3a-2<0\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<3\\ (a-\frac{1}{2})(a+2)>0\end{cases}\\ \begin{cases}a>3\\ (a-\frac{1}{2})(a+2)<0.\end{cases}\end{array}\right.$$





$\varnothing$.

Ответ: $a\in(-\infty;-2)\cup\left(\frac{1}{2};3\right)$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006966**

ID профиля: **364257**

Вариант 12

Чистовик.

Задача 4

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4}. \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4}. \end{cases}$$

Отмечу, что данная система ~~…~~ симметрическая, т.е. устойчива к перемене x на y и наоборот. Обозначим: $x^2+y^2=u$; $x^2y^2=v$.

Преобразуем второе уравнение данной системы:

$2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4}$.

$2(x^4+2x^2y^2+y^4)+x^2y^2=\frac{9}{4}$.

$2(x^2+y^2)^2+x^2y^2=\frac{9}{4}$.

Итак, произведя замену, получим:

$$\begin{cases} \frac{1}{u}+v=\frac{5}{4}. \\ 2u^2+v=\frac{9}{4} \end{cases} \quad (2)$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$2u^2-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}-\frac{5}{4}=1. \quad |\cdot u\neq 0$

$2u^3-u-1=0.$ (1) Отмечу, что $u=1$ подходит.

$(u-1)(2u^2+2u+1)=0.$

$$\begin{array}{l|l} 2u^3+0u^2-u-1 & u-1 \\ \underline{2u^3-2u^2} & 2u^2+2u+1 \\ \quad 2u^2-u & \\ \quad \underline{2u^2-2u} & \\ \qquad u-1 & \\ \qquad \underline{u-1} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Однако ур-ние $2u^2+2u+1=0$ не имеет корней, т.к. $D=4-4\cdot 2<0$.

Тогда исходное уравнение (1) имеет всего один корень: $u=1$.
Подставляя в систему (2), получим $v=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

Тогда $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2=\frac{1}{4} \end{cases}$; $y^2=1-x^2$.

Имеем: $x^2(1-x^2)=\frac{1}{4}$; $-x^4+x^2=\frac{1}{4} \quad |\cdot(-4)$

$4x^4-4x^2+1=0$

$(2x^2-1)^2=0$

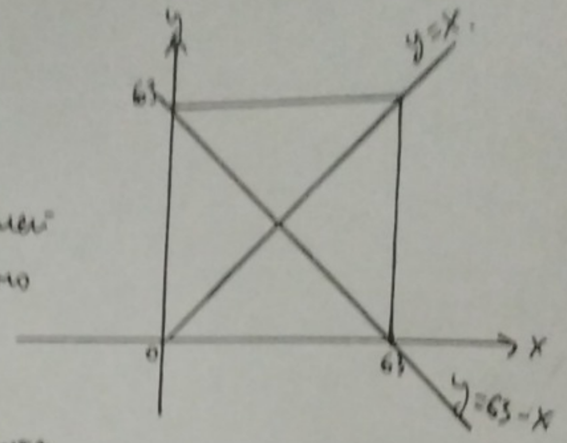
$x^2=\frac{1}{2}$. Тогда $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$y^2=1-x^2=\frac{1}{2}$; $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Чистовик.

Задача 5



Заданное условие означает, что хотя бы один из выбранных узлов должен лежать на одной из диагоналей квадрата (прямые $y=x$ и $y=63-x$ являются соответственно главной и побочной диагоналями квадрата).

Отмечу, что уравнение $x=63-x$ имеет нецелое решение. Значит, побочная и главная диагонали квадрата не имеют общих узлов сетки.

Внутри квадрата лежат $62\cdot 62=3844$ узла сетки.

Очевидно, что каждая из диагоналей содержит по 62 узла сетки. Поскольку главная и побочная диагонали не имеют общих узлов, то всего будет $62\cdot 2=124$ "диагональных" узла.

Разобьём все варианты на два случая:

I) Лишь один из выбранных узлов лежит на диагонали квадрата.

Первый узел можно выбрать 124 способами.

1) При этом, после выбора первого узла, $61+61=122$ узла будут образовывать с первым прямую, параллельную одной из осей координат. Эти точки не годятся для второго узла.

2) Также в рассматриваемом случае для второго узла не годятся точки, лежащие на одной из диагоналей квадрата — таких точек 124.

При этом две точки были исключены и в 1), и во 2) пункте — это точки, лежащие на диагонали, отличной от той, которая содержит первый узел, и имеют с первым узлом одинаковую абсциссу или ординату.

Итак, на каждый из 124 способов выбрать первый узел есть $(3844-124-122+2) = 3600$ способов выбрать второй.

Тогда в первом случае имеется $124\cdot 3600=446\,400$ способов.

II) Оба выбранных узла лежат на диагонали квадрата.

Первый узел можно выбрать 124 способами.

Для второго узла "не годятся" 3 "диагональных" точки: одна из них совпадает с первым узлом, а две другие лежат на диагонали, отличной от той, которая содержит первый узел, и имеют с первым узлом одинаковую абсциссу или ординату.

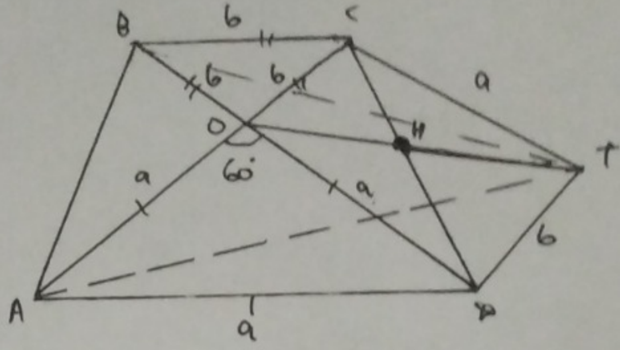
При этом каждая пара будет посчитана 2 раза, т.к. первый узел неотличим от второго.

Тогда во втором случае получим $\frac{124(124-3)}{2} = \frac{15004}{2} = 7502$ способа.

Итого, получаем $446\,400 + 7502 = 453\,902$ способа выбрать искомую пару.

Ответ: $453\,902$ способа.

Задача 6



а) $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – р/ст.

Тогда $\angle OAD = \angle OCB = 60°$.

Эти углы – накрест лежащие при прямых AD и BC и секущей AC.

Тогда $AD \parallel BC$; $ABCD$ – [redacted] трапеция.

Пусть $OT \cap CD = H$. H – середина CD по условию.

Но тогда в четырёхугольнике $OCTD$ диагонали точкой пересечения делятся пополам. Тогда $OCTD$ – параллелограмм; $OC = TD$; $OD = CT$.

$\angle COD = 180° - \angle AOD = 120°$; $\angle ODT = 180° - \angle COD = 60°$ (соседние углы в параллелограмме $OCTD$).

$\angle ADT = \angle ADO + \angle ODT = 60° + 60° = 120°$.

Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle ADT$:

$\angle AOB = 180° - \angle AOD = 120°$; $\angle ADT = 120°$. Тогда $\angle AOB = \angle ADT$.

$AD = AO = a$ ($\triangle AOD$ – р/ст).

Пусть $BO = b$. Тогда $CO = BO = b$ ($\triangle BOC$ – р/ст); $DT = OC = b$ (противолежащие стороны в параллелограмме $OCTD$).

Тогда $BO = TD$.

Получили, что $\triangle AOB = \triangle ADT$ по двум сторонам и углу между ними.
Тогда $\underline{AB = AT}$.

Аналогично $\triangle BCT = \triangle BOA$ по двум сторонам и углу между ними.
Тогда $\underline{AB = BT}$

Получили, что $BT = AB = AT$, т.е. $\triangle ATB$ – р/ст., $\underline{\text{ч.т.д.}}$

$b = BC = 2$; $a = AD = 4$.

б) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\angle AOD = \frac{1}{2}(a+b)(a+b) \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = \underline{9\sqrt{3}}$

По теореме косинусов из $\triangle AOB$:

$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos 120°} = \sqrt{a^2 + b^2 + ab} = \sqrt{4 + 16 + 8} = \sqrt{28} = 4\sqrt{7}$.

$\triangle ABT$ – р/ст. $S_{ABT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$; $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$ Ответ: $\frac{7}{9}$