Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

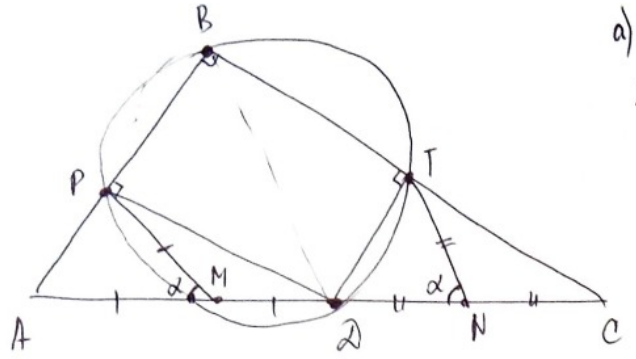
Шифр: **211006839**

ID профиля: **844930**

Вариант 12

Чистовик. Лист 1.

Задача №1.



а) 1. Пусть $\angle PMA = \angle TND = \alpha$ (из параллельности)

2. Т.к BD - диаметр, то $\angle BPD = \angle BTD = 90° \Rightarrow$

$\triangle APD$ и $\triangle TDC$ - прямоугольные

3. Значит, $TN = DN = NC$ и $MD = MA = PM$ (как медианы в прямоуг. треуг.).

4. Т.к. PMD - равноб., то $\angle MDP = \angle MPD = \frac{\alpha}{2}$

Т.к. TND - равноб., то $\angle NDT = \angle DTN = 90 - \frac{\alpha}{2}$

5. Т.к. $BTDP$ - вписанный, то $\angle ABC = \angle PDA + \angle TDC$

$\angle ABC = 90 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 90°$

б) $AD = 2PM = 1$; $DC = 2TN = 2 \Rightarrow AC = 3$

Т.к. $\angle ABC = \angle BPD = \angle BTD = 90°$, то $BTDP$ прямоугольник и $BT^2 + TD^2 = PD^2 + TD^2 = BD^2$

Из $\triangle TND$ по т. косинусов: $TD^2 = 2 - 2\cos\alpha$

Из $\triangle PMD$ по т. косинусов: $PD^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(180 - \alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha$

$TD^2 + PD^2 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\cos\alpha = BD^2 = \frac{16}{9}$

$45 - 27\cos\alpha = 32$

$27\cos\alpha = 13$

$\cos\alpha = \frac{13}{27}$

$\angle TCD$ из равноб. $\triangle TNC$ равен $\frac{\alpha}{2}$.

$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = \frac{13}{27}$

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{20}{27}$; $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$ (Т.к. $\frac{\alpha}{2}$ - острый, то косинус положительный)

$\frac{BC}{AC} = \frac{BC}{3} = \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$; $BC = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

По т. Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{9 - \frac{20}{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Ответ. $\angle ABC = 90°$; $S_{ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Чистовик. Лист 2.

Задача №2.

• Заметим, что $(\sqrt{x+1})^2+(\sqrt{4-x})^2=5$

• ОДЗ: $\begin{cases} x+1>0 \\ 4-x>0 \end{cases}$ На ОДЗ преобразование $\sqrt{4+3x-x^2}=\sqrt{(x+1)(4-x)}=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}$ не приведёт к потере корней.

• $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3-2\sqrt{(x+1)(4-x)}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3+(\sqrt{x+1})^2+(\sqrt{4-x})^2-5-2\sqrt{(x+1)(4-x)}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}-2+(\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x})^2=0$

Пусть $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=t$, тогда

$t^2+t-2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=1 \\ t_2=-2 \end{array}\right.$

Обратная замена:

1) $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=1$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=1+\sqrt{4-x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1+4-x+2\sqrt{4-x} \\ x+1\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=\sqrt{4-x} \\ x\geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x=(x-2)^2 \\ x\geqslant 2 \\ x\geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+4=4-x \\ x\geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-3)=0 \\ x\geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right. \\ x\geqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x=3}$

2) $\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=-2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{4-x}-2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=4-x+4-4\sqrt{4-x} \\ x+1\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{4-x}=7-2x \\ x+1\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16(4-x)=(7-2x)^2 \\ 7-2x\geqslant 0 \\ x\geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64-16x=49-28x+4x^2 \\ x\leqslant \frac{7}{2} \\ x\geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-12x-15=0 \\ -1\leqslant x\leqslant 3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{6\pm\sqrt{36+60}}{4} \\ -1\leqslant x\leqslant 3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3\pm 2\sqrt{6}}{2} \\ -1\leqslant x\leqslant 3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{3-2\sqrt{6}}{2}}$

Оценка: 1) $2<\sqrt{6}<3$

$3{,}5<\sqrt{6}+1{,}5<4{,}5$ — не удовл. ограничению

$\cancel{2)}$ $\cancel{-1{,}5<1{,}5-\sqrt{6}<-0{,}5}$

$1{,}5-\sqrt{6} \vee -1$

$2{,}5 \vee \sqrt{6}$

$6{,}25>6$ — корень удовл. ограничению

Ответ. $\left\{\frac{3-2\sqrt{6}}{2}; 3\right\}$

Чистовик. Лист 3.

Задача №3.

Найдем координаты точек A и B:

1) A. $2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$x^2+2x(y-a)+y^2-2ay+a^2+4y^2-4ay+a^2=0$

$x^2+2x(y-a)+(y-a)^2+(2y-a)^2=0$

$(x+y-a)^2+(2y-a)^2=0$

$\begin{cases} x+y-a=0 \\ 2y-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{a}{2} \\ y=\frac{a}{2} \end{cases}$

Координаты точки $A\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$

2) B. Заметим, что $a\neq 0$ (иначе получается неверное равенство $2=0$)

Поделим обе части на a.

$x^2+4ax-y+4a^2+\frac{2}{a}=0$

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

$x_B=\frac{-4a}{2}=-2a$

$y_B=(-2a)^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$

Координаты точки $B\left(-2a;\frac{2}{a}\right)$

Рассмотрим случай, когда обе точки лежат ниже прямой $x+y=3$.

Тогда выполняется, что:

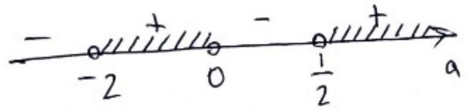
$\begin{cases} \frac{a}{2}+\frac{a}{2}<3 \\ -2a+\frac{2}{a}<3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<3 \\ -2a+\frac{2}{a}-3<0 \quad (1) \end{cases}$

(1) $-2a+\frac{2}{a}-3<0$

$2a-\frac{2}{a}+3>0$

$\frac{2a^2+3a-2}{a}>0$

$\frac{2(a+2)(a-\frac{1}{2})}{a}>0$



$\left[\begin{array}{l} -2<a<0 \\ a>\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Вернемся в систему.

Задача 3 (продолжение)

$$\begin{cases} a<3 \\ \left[\begin{array}{l} -2<a<0 \\ a>\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<a<0 \\ \frac{1}{2}<a<3 \end{array}\right.$$

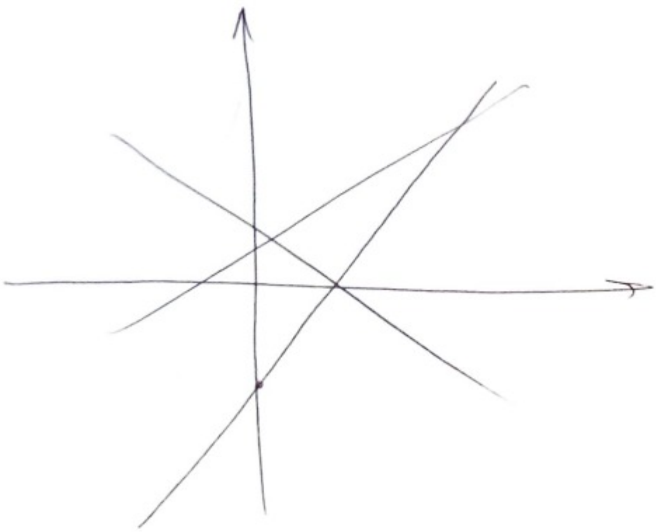
Рассмотрим случай, когда обе точки лежат выше прямой $x+y=3$.

Тогда:

$$\begin{cases} \frac{a}{2}+\frac{a}{2}>3 \\ -2a+\frac{2}{a}>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>3 \\ \left[\begin{array}{l} a<-2 \\ 0<a<\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

Объединяя решения в двух случаях, получаем ответ.

Ответ. $(-2;0)\cup(\frac{1}{2};3)$.



$45 - 27\cos\alpha = 32$

$27\cos\alpha = 13$

$\cos\alpha = \frac{13}{27} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

$\frac{20}{27} = \cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$

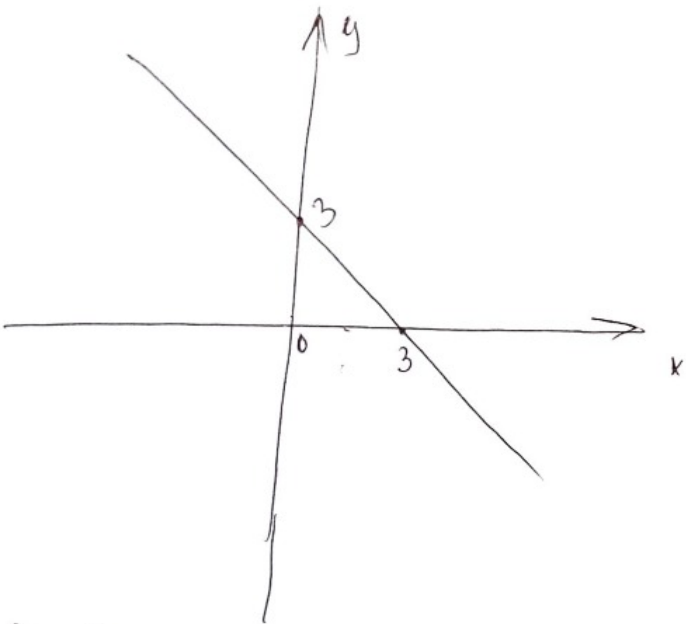
$\frac{3+2\sqrt{6}}{2}$

$1{,}5+\sqrt{6} \overset{>}{\vee} 3{,}5$

$\sqrt{6} \vee 2$

$\sqrt{6} > 2$

$96 = 24\cdot 4 = \underline{16\cdot 6}$



A: $\frac{3a}{2} - \frac{a}{2} = 3$ – на прямой

$a<3$ – под прямой

$\boxed{a \neq 0}$

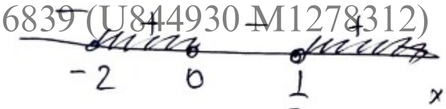
B: $-2a + \frac{2}{a} < 3$

$\frac{-2a^2-3a+2}{a} < 0$

$\frac{2a^2+3a-2}{a} > 0$

$-2;+\frac{1}{2}$

$2(a+2)(a-\frac{1}{2})a > 0$



$a \in (-2;0) \cup (\frac{1}{2};3)$

$A: \quad 2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

B – вершина п-олы $\quad ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

$\cancel{x_B=-\frac{4a^2}{2a}=-2a}$

$\cancel{y_B=4a^3+4a^2\cdot 2a}$

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

$x_B=-\frac{4a}{2}=-2a$

$y_B=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$

$\boxed{B\left(-2a;\frac{2}{a}\right)}$

$\cancel{x^2-2ax+a^2+2}$

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$\cancel{(x+y)^2+4y^2}$

$\cancel{x^2+2x(a+y)+2a^2+5y^2-6ay=0}$

$\cancel{x^2+2x(a+y)+a^2+2ay+y^2+a^2-8ay+4y^2=0}$

$\cancel{x^2+2x(a+y)+(a+y)^2+(a-2y)^2-4ay=0}$

$\cancel{(x+y+a)^2+(a-2y)^2=4ay}$

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$x^2+2x(y-a)+y^2-2ay+a^2+4y^2-4ay+a^2=0$

$(x+y-a)^2+(2y+a)^2=0$

$\begin{cases}x+y=a\\2y=-a\end{cases}\quad \begin{cases}x=\frac{3a}{2}\\y=-\frac{a}{2}\end{cases}\quad A\left(\frac{3a}{2};-\frac{a}{2}\right)$

$B\left(-2a;\frac{2}{a}\right)$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$(x+1)(4-x) = 4x+4-x^2-x = 4+3x-x^2$

ОДЗ: $x+1 \geq 0 \quad x \geq -1$
$4-x \geq 0 \quad x \leq 4$

$\sqrt{4+3x-x^2} = \sqrt{(x+1)(4-x)} = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{4-x}$

$\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{4-x} - \sqrt{4-x} + 3 = 0$

$\sqrt{x+1} + 3 = \sqrt{4-x}\,(2\sqrt{x+1} + 1)$

$\sqrt{x+1} + \frac{1}{2} - 2\sqrt{4-x}\left(\sqrt{x+1} + \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} = 0$

$\left(\sqrt{x+1} + \frac{1}{2}\right)\left(1 - 2\sqrt{4-x}\right) + \frac{5}{2} = 0$

$a - b + 3 = 2ab$

$a^2 + b^2 = 5$

~~$a - b + 8 = (a+b)^2$~~

$(\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{4-x})^2 = 5$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 - 5 + (\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{4-x})^2 - 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{4-x} = 0$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + (\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x})^2 - 2 = 0$

Пусть $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = t$, тогда

$t^2 + t - 2 = 0$

$t_1 = 1 \quad t_2 = -2$

1) $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1$

$\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{4-x}$

$x + \cancel{1} = \cancel{1} + 4 - x + 2\sqrt{4-x}$

$2x - 4 = 2\sqrt{4-x}$

$x - 2 = \sqrt{4-x}$

$x^2 - 4x + \cancel{4} = \cancel{4} - x$

$x^2 - 3x = 0$

$x = 0 \quad x = 3$

Пров $x = 0$

$1 - 2 + 3 = 4$ $\ominus$

$x = 3$

$2 - 1 + 3 = 4$ $\oplus$

$x = 3$

2) $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = -2$

$\sqrt{x+1} = \sqrt{4-x} - 2$

$x - 1 = 4 - x + 4 - 4\sqrt{4-x}$

$4\sqrt{4-x} = 9 - 2x$

$16(16 - 8x + x^2) = 81 - 36x + 4x^2$

$256 - 128x + 16x^2 = 81 - 36x + 4x^2$

$12x^2 - 92x + 175 = 0$

$x_{12} = 41 \pm \sqrt{1681 - 2100}$

$D < 0$

$41^2 = 1600 + 80 + 1$

$$\begin{array}{r} 175 \\ \times\ 12 \\ \hline 350 \\ 175\ \ \\ \hline 2100 \end{array}$$

$x+1=4-x+4-4\sqrt{x-4}$

$(20+2)^2=400+80+4=484$

$\times 113$

$4\sqrt{x-4}=7-2x$

$16(x-4)=49-28x+4x^2$

$16x-64=49-28x+4x^2$

$4x^2-44x+113=0$

$\sqrt{D^*}=\sqrt{22^2-4\cdot 113}$

$4\sqrt{4-x}=7-2x$

$16(4-x)=(7-2x)^2$

$49-64=-(64-49)=-15$

$$x_{12}=\frac{6\pm\sqrt{36+60}}{4}$$

$96=4\cdot 24$

$\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

$2<\sqrt{6}<3$

$\cancel{4<2\sqrt{6}<6}$

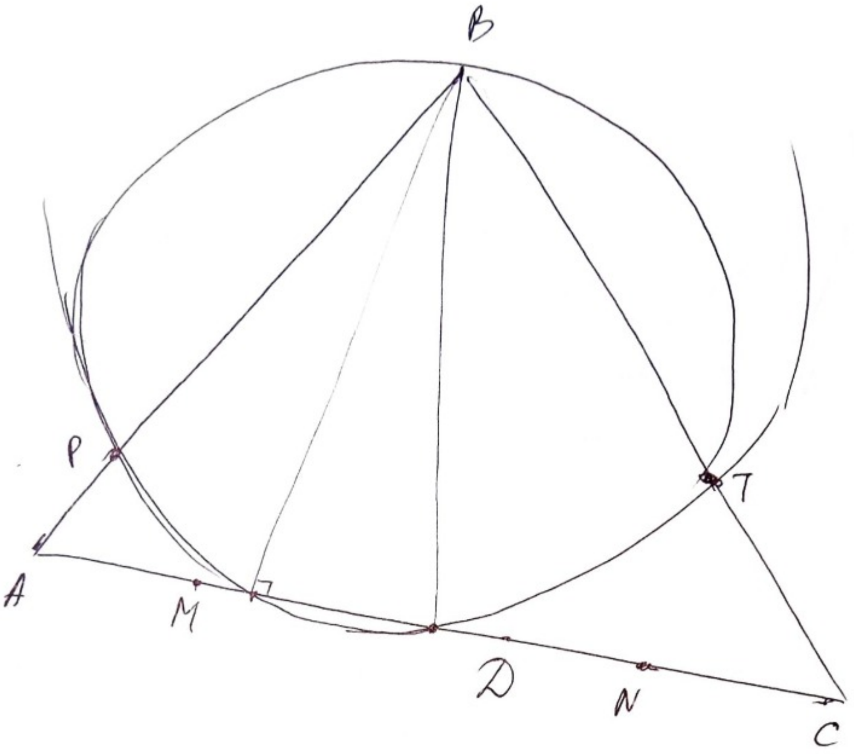
$3{,}5<1{,}5+\sqrt{6}<3$

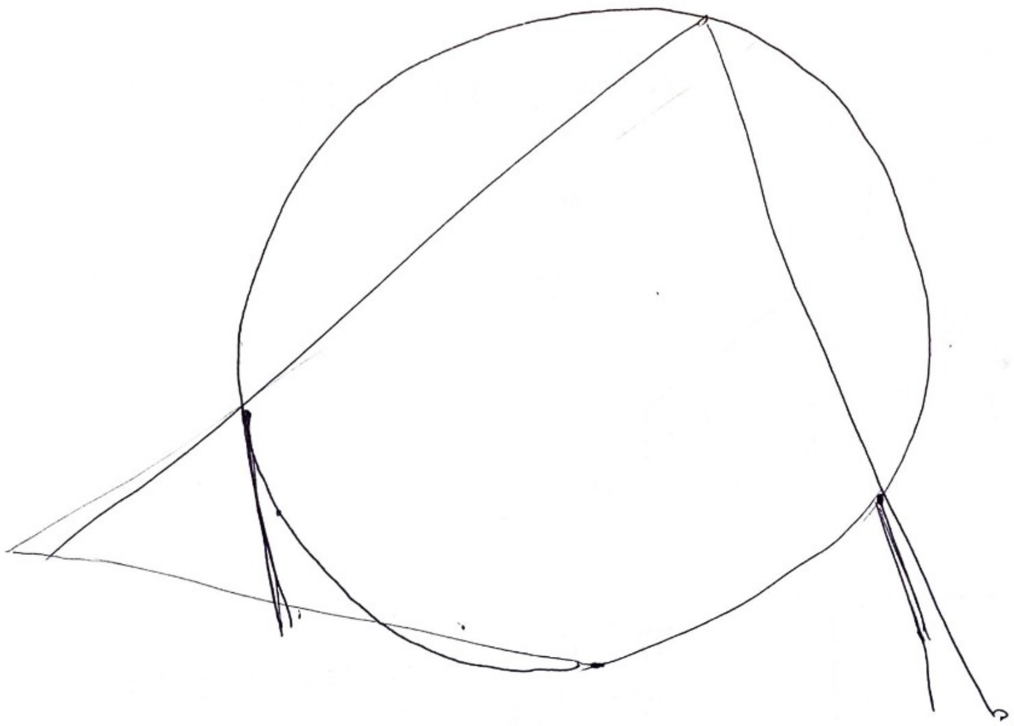
$1{,}5-\sqrt{6} \vee -1$

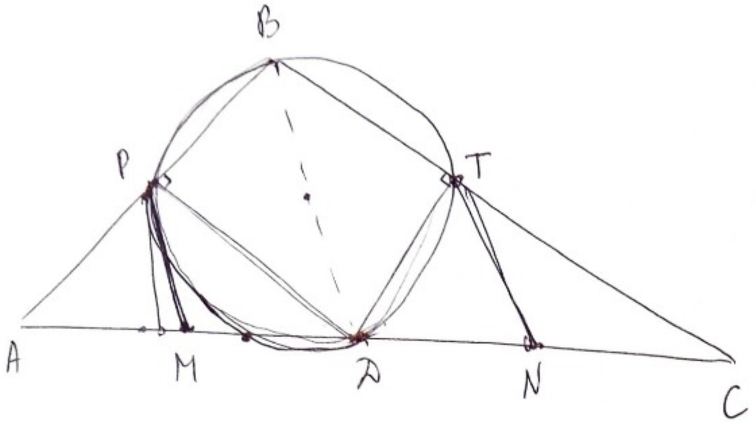
$\sqrt{6} \vee 2{,}5$

$6<6{,}25$

211006839 (U844930 M1278312)


B
P
T
A
M
D
N
C



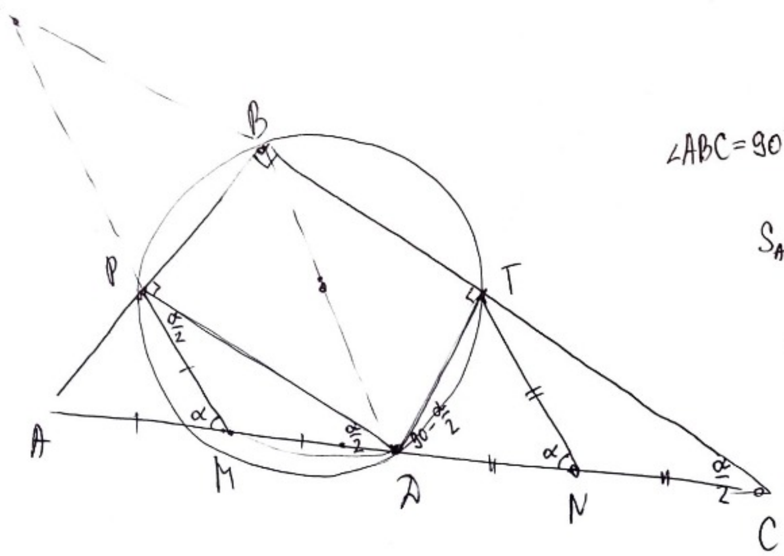


$\angle PAD + \angle PDA = 90$

$\angle TCD + \angle TDC = 90$

$\angle ABC = \angle PDA + \angle TDC$

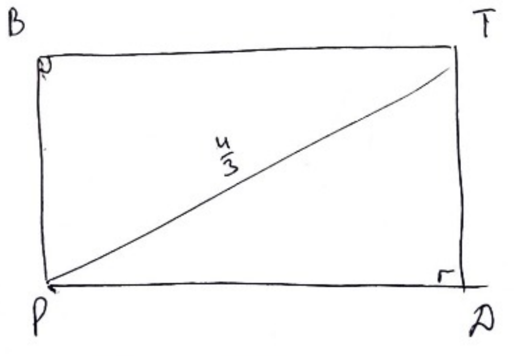
$\angle ABC = 180 - \angle PAD - \angle TCD$



$\angle ABC = 90°$; $MP = \frac{1}{2}$; $NT = 1$; $BD = \frac{4}{3}$

S_{ABC} - ?

$AC = 3$



$TD^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha = 2 - 2\cos\alpha$

$PD^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \cos(180 - \alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha$

$2 - 2\cos\alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha = \frac{4}{3}$

$\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\cos\alpha = \frac{4}{3}$

$15 - 9\cos\alpha = 8$

$9\cos\alpha = 7$

$\cos\alpha = \frac{7}{9} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

$\frac{16}{9} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ $\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\frac{BC}{AC} = \frac{BC}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $BC = 2\sqrt{2}$

$AB = \sqrt{9 - 8} = 1$

$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

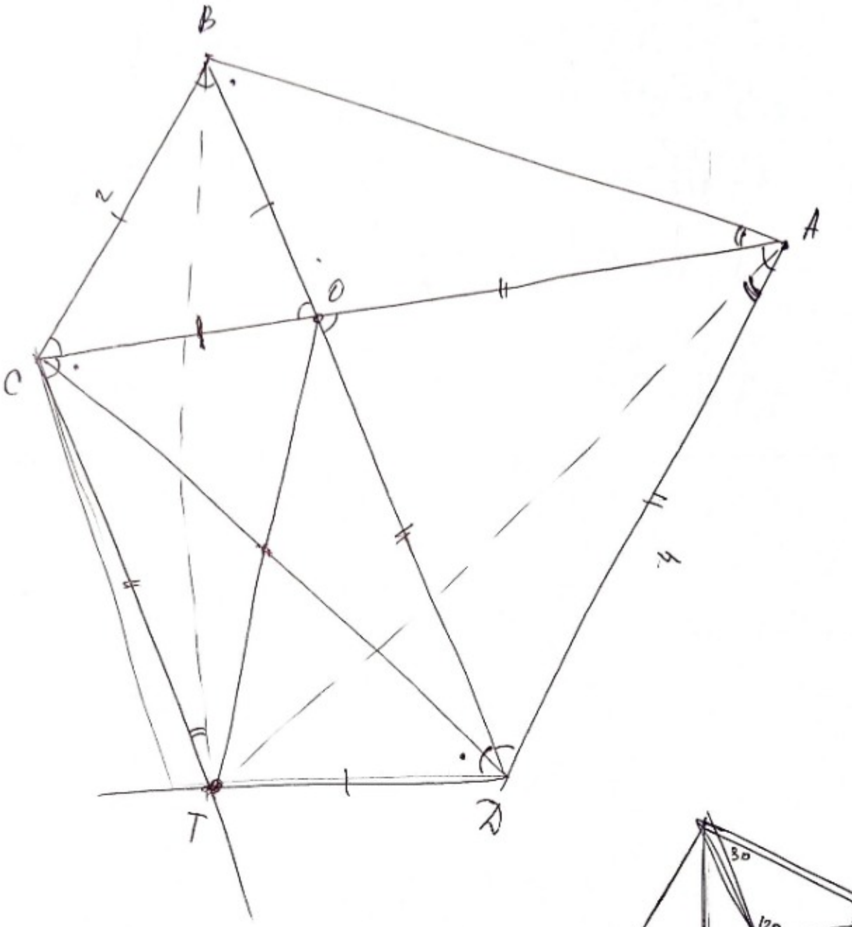
Часть 2

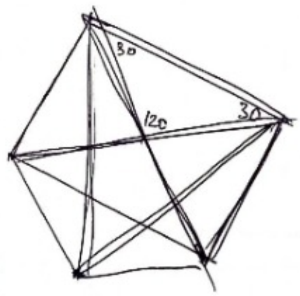
Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006839**

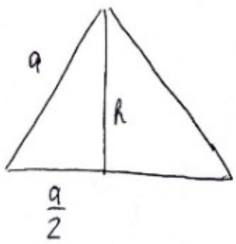
ID профиля: **844930**

Вариант 12





$$AB^2 = 2^2+4^2-2\cdot 2\cdot 4\cdot \cos 120 = 4+16+8=28 \quad ; AB = 2\sqrt{7}$$



$$h=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$$

1. $\begin{cases} x+y=\sqrt{2} \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases}$

$x=\sqrt{2}-y$

$(\sqrt{2}-y)y=\frac{1}{2}$

$y\sqrt{2}-y^2-\frac{1}{2}=0$

$y^2-y\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}=0$

$\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=0$

$y=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $x=\frac{2-1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2. $\begin{cases} x+y=-\sqrt{2} \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases}$

$x=-\sqrt{2}-y$

$(-\sqrt{2}-y)y=\frac{1}{2}$

$-\sqrt{2}\cdot y-y^2-\frac{1}{2}=0$

$y^2+\sqrt{2}y+\frac{1}{2}=0$

$\left(y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=0$

$y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $x=\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

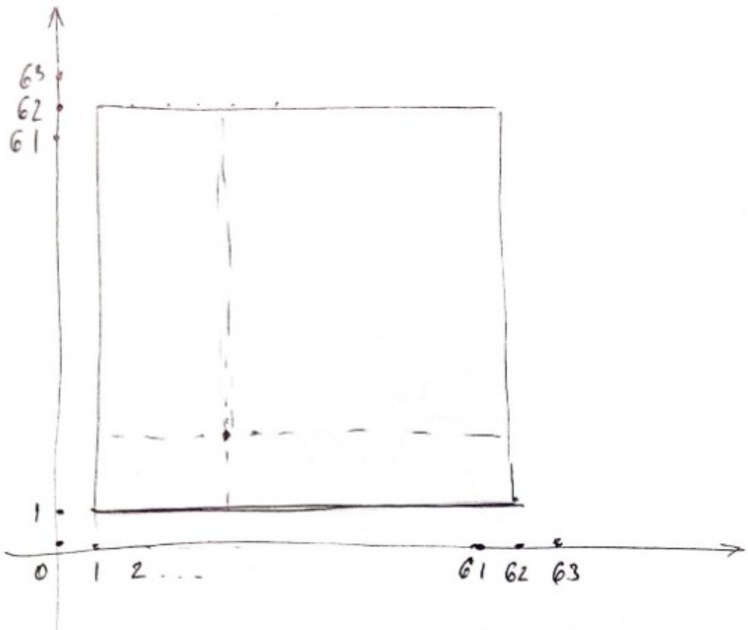
3. $x^2+2xy+y^2=0$

$\begin{cases} x+y=0 \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$x=-y$

$-y^2=-\frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{\sqrt{2}};\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}};\ x=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$



$62+62-1=12\cancel{4}$ подходящих узла

122

$\begin{array}{r} \times\ 62 \\ 62 \\ \hline 124 \\ 372 \\ \hline 3844 \end{array}$ – всего узлов

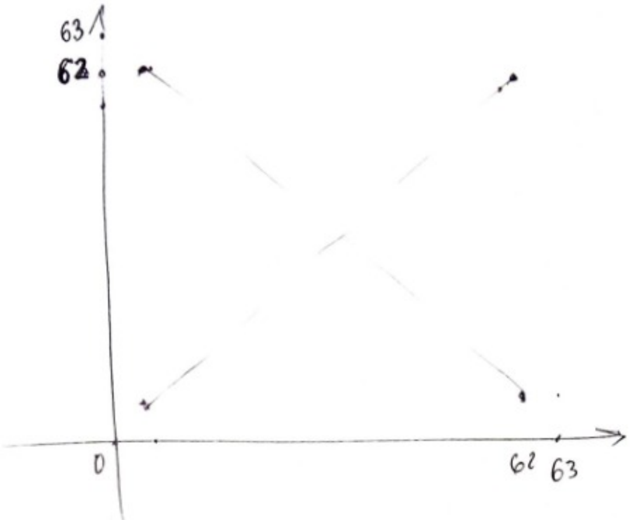
$\begin{array}{r} -\ 3844 \\ 123 \\ \hline 3721 \end{array}$ – можно выбрать в пару

$3721\cdot 62=$ . . .

$\begin{array}{r} \times\ 3760 \\ 124 \\ \hline 1504 \\ 752 \\ 376 \\ \hline 46624 \end{array}$

$\frac{124\cdot122}{2}$

211006839 (U844930 M1278313)



$62+62=124$

$61+61=122$

$\frac{124\cdot 121}{2}=121\cdot 62$

$-124-120$

$$\begin{array}{r} \times\, 62 \\ 62 \\ \hline 124 \\ 372 \\ \hline 3844 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\,3844 \\ 122 \\ \hline 3722 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,3722 \\ 121 \\ \hline 3601 \end{array}$$

$124\cdot(3844-124-120)=124\cdot 3600$

$$\begin{array}{r} \times\, 3601 \\ 124 \\ \hline 14404 \\ 7202 \\ 3601 \\ \hline 446524 \\ +\quad 7502 \\ \hline 454026 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 121 \\ 62 \\ 242 \\ 726 \\ 7502 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3721 \\ 124 \\ \hline 14884 \\ 7442 \\ 3721 \\ \hline 461404 \\ -\quad 7502 \\ \hline 453902 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 124 \\ 3600 \\ 744 \\ 372 \\ \hline 446400 \\ +\quad 7502 \\ 453902 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 3721 \\ 124 \\ \hline 14884 \\ 7442 \\ 3721 \\ \hline 461404 \\ -\quad 7502 \\ \hline 453902 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 121 \\ 62 \\ \hline 242 \\ 726 \\ \hline 7502 \end{array}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$x^2+y^2 = u$
$x^2y^2 = v$

$\cancel{\frac{1}{u} + v = \frac{5}{4}}$

$2x^4+2y^4+4x^2y^2+x^2y^2 = \frac{9}{4}$

$2(x^4+2x^2y^2+y^4)+x^2y^2 = \frac{9}{4}$

$2(x^2+y^2)^2+x^2y^2 = \frac{9}{4}$

$$- \begin{cases} \frac{1}{u} + v = \frac{5}{4} \\ 2u^2+v = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$2u^2 - \frac{1}{u} = 1 \qquad u \neq 0$

$2u^3-u-1=0 \quad \boxed{u=1}$

$2u^2+2u+1=0$

$D<0$

$\boxed{v=\frac{1}{4} \quad u=1}$

$$\begin{array}{r|l} 2u^3-u-1 & u-1 \\ \cline{2-2} -\,2u^3-2u^2 & 2u^2+2u+1 \\ -\,2u^2-u & \\ 2u^2-2u & \\ u-1 & \end{array}$$

$(2u^2+2u+1)(u-1) = 2u^3+\cancel{2u^2}+u-\cancel{2u^2}-2u-1 = 2u^3-u-1$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2=\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases} \quad (3) \end{array}\right.$$

$x^2+2xy+y^2=2$

$(x+y)^2=2$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{ll} x+y=\sqrt{2} & (1) \\ x+y=-\sqrt{2} & (2) \end{array}\right. \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases}$$

211006839 (U844930 M1278313)

Задача 4.

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}+x^2y^2=\frac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2+x^2y^2=\frac{9}{4} \end{cases}$$

Замена: $x^2+y^2=u$

$x^2y^2=v$

$$-\begin{cases} \frac{1}{u}+v=\frac{5}{4} & (1) \\ 2u^2+v=\frac{9}{4} & (2) \end{cases}$$

(2)-(1) $2u^2-\frac{1}{u}=1$; $u\neq 0$

$2u^3-u-1=0$

Заметим, что $u=1$ – корень.

$$\begin{array}{r|l} 2u^3-u-1 & u-1 \\ \cline{2-2} -\;2u^3-2u^2 & 2u^2+2u+1 \\ \hline 2u^2-u & \\ -\;2u^2-2u & \\ \hline u-1 & \\ -\;u-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$2u^2+2u+1=0$

$D=4-8<0$, значит больше корней нет

Итак, ур-е $2u^2-\frac{1}{u}=1$ имеет один корень $u=1$, тогда $v=\frac{1}{4}$

Обратная замена:

$$\begin{cases} x^2+y^2=u=1 \\ x^2y^2=v=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ \left[\begin{array}{l} xy=\frac{1}{2} \\ xy=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

1. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases}$

$x^2+2xy+y^2=1+1$

$(x+y)^2=2$

а) $\begin{cases} x+y=\sqrt{2} \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases}$

$x=\sqrt{2}-y$

$\sqrt{2}y-y^2=\frac{1}{2}$

$y^2-\sqrt{2}y+\frac{1}{2}=0$

$\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=0$

б) $\begin{cases} x+y=-\sqrt{2} \\ xy=\frac{1}{2} \end{cases}$

$x=-\sqrt{2}-y$

$y^2+\sqrt{2}y+\frac{1}{2}=0$

$\left(y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=0$

$y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

2. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$x^2+2xy+y^2=0$

$x+y=0$

$\begin{cases} x=-y \\ xy=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$-y^2=-\frac{1}{2}$

а) $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

б) $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

Чистовик. лист 2.

Задача 4. (продолжение)

а) $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

б) $x=-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ответ. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

211006839 (U844930 M1278313)

Задача 5.

Рассмотрим квадрат с вершинами в точках $(1;1)$; $(1;62)$; $(62;1)$; $(62;62)$.
В нем $62 \times 62 = 3844$ клетки (включая границы).

Заметим, что прямые $y = x$ и $y = 63 - x$ проходят через узлы сеток, лежащих на диагоналях данного квадрата (включая вершины). При этом, т.к. длина стороны такого квадрата нечетная, то точка пересечения диагоналей не будет лежать в узле сетки.

Таким образом, можно выбрать точку внутри квадрата, лежащую на одной из заданных прямых $62 + 62 = 124$ способами.

При этом в пару к такой точке можно выбрать любую точку из квадрата, не лежащую сверху / снизу / справа / слева от выбранной. Запрещенных точек $61 + 61 = 122$. То есть пару можно выбрать $3844 - 122 - 1 = 3721$ способами.

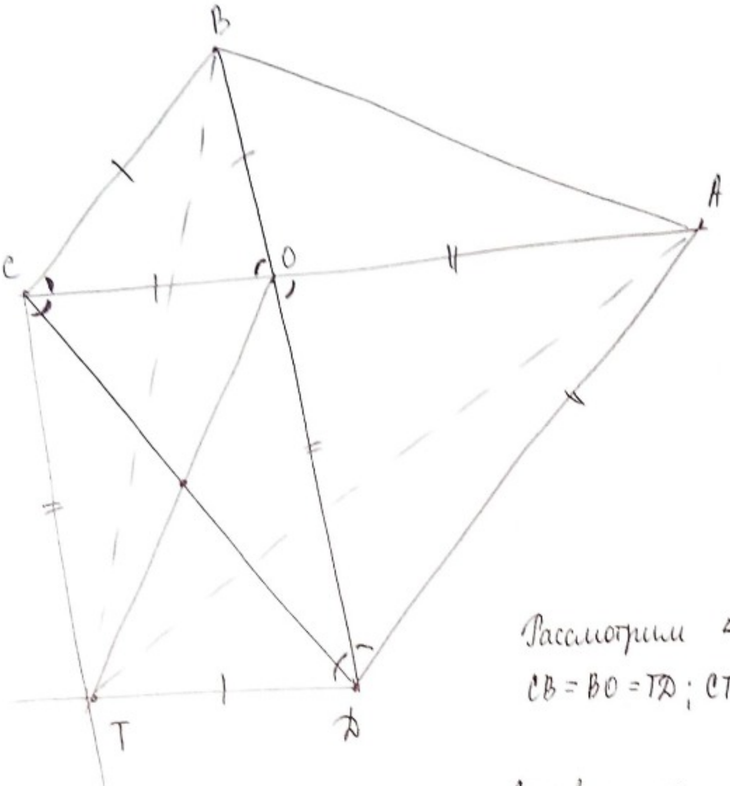
Всего пар $124 \cdot 3721$. Однако, при таком выборе пары точек, обе из которых лежат на диагоналях, будут учтены дважды. Таких пар $\frac{124 \cdot 121}{2} = 121 \cdot 62$

Всего способов: $124 \cdot 3721 - 121 \cdot 62 = 453902$

Ответ. 453902

Чистовик. Лист 4.

Задача 6.



а) Т.к. $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ – правильные, то $\angle CBO = \angle ODA = 60° \Rightarrow CB \parallel AD$

$CODT$ – параллелограмм, т.к. его диагонали точкой пересечения делятся пополам.

Значит, $CB = BO = CO = TD$; $OA = AD = OD = CT$

Также $CT \parallel OD$ ($CT \parallel BD$), значит, $\angle BOC = \angle BCO = \angle OCT = 60°$;

$TD \parallel CO$ ($TD \parallel CA$), значит, $\angle AOD = \angle ODA = \angle ODT = 60°$ (как накрест лежащие)

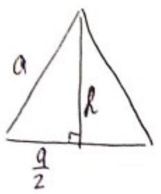
Рассмотрим $\triangle TCB$, $\triangle BOA$ и $\triangle TDA$, у них $CB = BO = TD$; $CT = OA = AD$; $\angle BCT = \angle BOA = \angle TDA = 120°$

($60° + 60°$) (смежный с углом в $60°$)

Следовательно, эти треугольники равны по I признаку.

Их элементы соответственно равны. $BT = TA = BA$. Значит, $\triangle ABT$ – правильный.

б) • Выведем формулу площади правильного треугольника со стороной a.



$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$S = \frac{1}{2} a h = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

• $\angle BOA = 120°$ как смежный с $60°$.

По теореме косинусов $AB^2 = BO^2 + OA^2 - 2 \cdot BO \cdot OA \cdot \cos BOA = 4 + 16 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 28$

$AB = 2\sqrt{7}$

• $\triangle BOA = \triangle COD$ по I признаку ($AO = OD$; $BO = OC$; $\angle BOA = \angle COD$) их площади равны.

По теореме Герона:

$S_{ABO} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{2+4+2\sqrt{7}}{2} = 3 + \sqrt{7}$

$S_{ABO} = \sqrt{(3+\sqrt{7})(3+\sqrt{7}-2)(3+\sqrt{7}-4)(3+\sqrt{7}-2\sqrt{7})} = \sqrt{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)} =$

$= \sqrt{(9-7)(7-1)} = \sqrt{2 \cdot 6} = 2\sqrt{3}$

$S_{AOD} = \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$

$S_{BOC} = \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

$S_{ABCD} = 2S_{AOB} + S_{AOD} + S_{BOC} = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

Задача 6 (продолжение)

$$S_{ABT} = \frac{(2\sqrt{7})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 7\sqrt{3}$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$$

Ответ. $\frac{7}{9}$.