Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

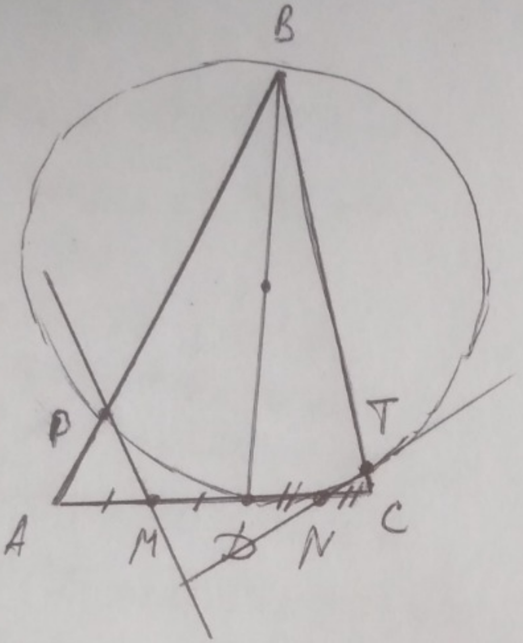
Шифр: **211006701**

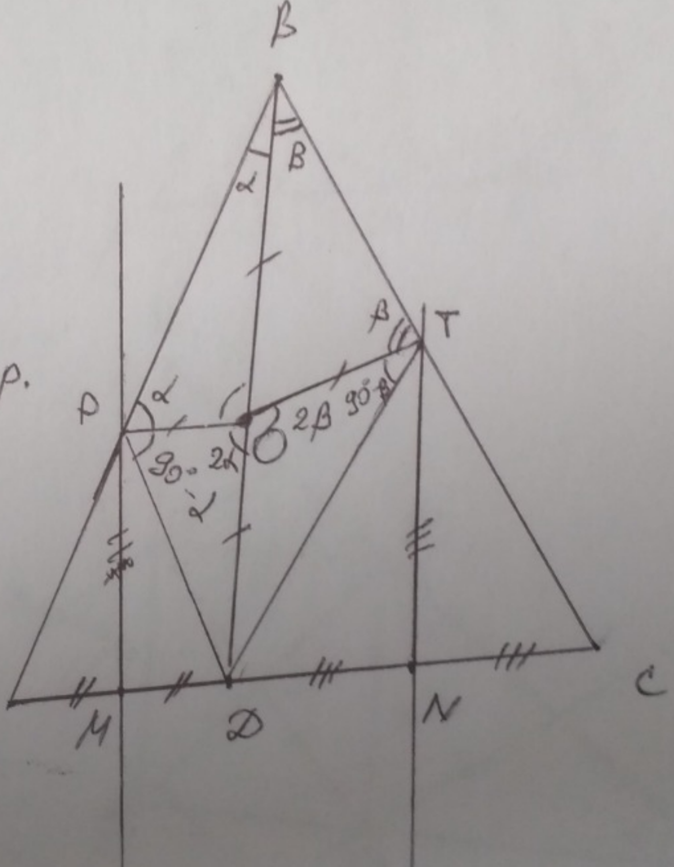
ID профиля: **92348**

Вариант 12

Чистовик.

1.





а) $OP = OB = OD = OT$

$\triangle POB$ и $\triangle TOB$ – равнобедр.

$\angle BOT + \angle TOD = 180°$

$\angle BOP + \angle POD = 180° \Rightarrow$

$\angle BPD = \angle BTD = 90°$

(+ медиана к стороне А равная половине этой стороны) $\Rightarrow$

$\angle CTD = \angle APD = 90° \Rightarrow TN = DN$ и $PM = MD$ – как медианы к гипотенузе.

211006701 (U92348 M1275070)

Чистовик

1(продолжение)

Если $MP \parallel NC \Rightarrow$

$\angle PMD = \angle TNC \Rightarrow$

~~$\angle DTC$~~

$\angle NCT = \angle ADP$

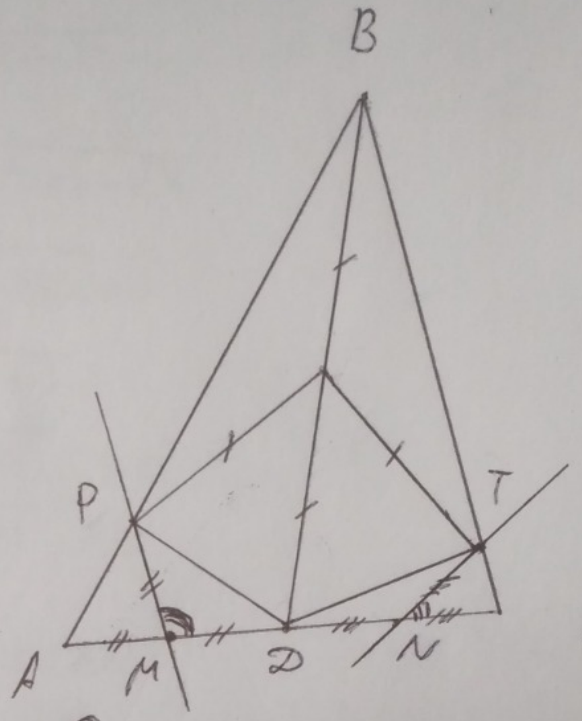
по теор. о $\Sigma\angle$ в $\Delta \Rightarrow$

$\angle ADP + \angle TDC = 90^\circ \Rightarrow$

$\angle PDT = 90^\circ \Rightarrow$ т. к

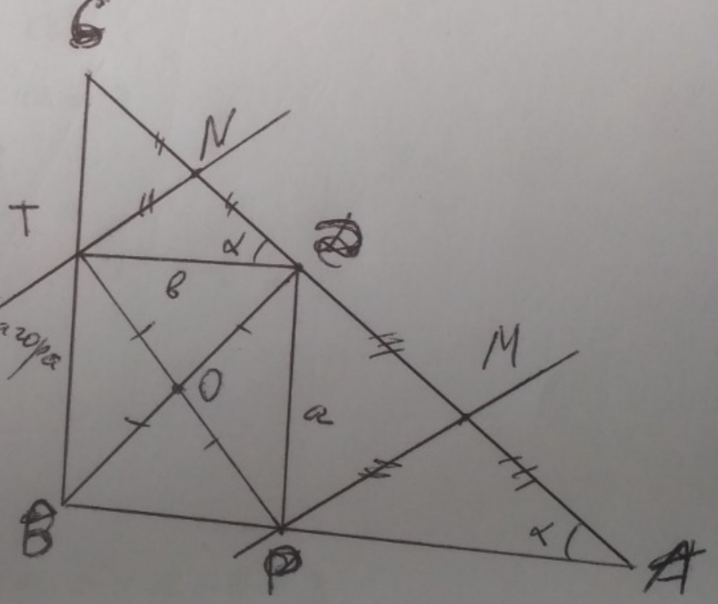
$\angle BPD = \angle BTD = 90^\circ \Rightarrow$

$\angle PBT = \angle ABC = 90^\circ$



б) $MP = \frac{1}{2} \Rightarrow DA = 1$ $\quad CA = 3$

$NT = 1 \Rightarrow CD = 2$



$$\begin{cases} a^2 + b^2 = BD^2 \\ DA \cdot \sin\alpha = a \\ DC \cdot \cos\alpha = b \end{cases}$$ — теорема Пифагора

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\ \sin\alpha = a \\ 2\cos\alpha = b \end{cases}$$

$\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha = \left(\frac{4}{3}\right)^2$

$1 + 3\cos^2\alpha = \left(\frac{4}{3}\right)^2$

$3\cos^2\alpha = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{3}$

$\cos^2\alpha = \frac{7}{27}$

$\cos\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$

$\alpha \in (0; 90^\circ) \Rightarrow \sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}(CA \cdot \cos\alpha) \cdot (CA \cdot \sin\alpha) =$

$= \frac{1}{2} \cdot CA^2 \cdot \sqrt{\frac{20}{27}} \cdot \sqrt{\frac{7}{27}} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{2\sqrt{35}}{27} =$

$= \frac{\sqrt{35}}{3}$

Ответ: $\frac{\sqrt{35}}{3}$

Чистовик.

2. $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{-(x^2-3x-4)}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{-(x-4)(x+1)}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{(4-x)(x+1)}$

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ (4-x)(x+1) \geq 0 \end{cases}$

$a = \sqrt{x+1} \geq 0$

$b = \sqrt{4-x} \geq 0$

$\begin{cases} x \in [-1; +\infty) \\ x \in (-\infty; 4] \end{cases}$

$x \in [-1; 4]$

$a - b + 3 = 2ab$

$b + 2ab = a + 3$

$b(1+2a) = a + 3$

$b = \dfrac{a+3}{1+2a}$

$\sqrt{4-x} = \dfrac{\sqrt{x+1} + 3}{1 + 2\sqrt{x+1}}$

$a^2 = -b^2 + 5$

~~4≤x~~

$\begin{cases} a - b + 3 = 2ab \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 5 + a - b + 3$

$(a+b)^2 = 8 + (a-b)$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 5 - (a-b) - 3$

$(a-b)^2 + (a-b) - 2 = 0$

$((a-b)+2)((a-b)-1) = 0$

Чистовик

$\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}>0$

2. (продолжение)

$\begin{cases} a-b=-2 \\ a+b=1 \end{cases}$

$a-b=k$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}=k$

$x+1-4+x=k(\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x})$

$\frac{2x-3}{k}=\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}$

$\frac{2x-3}{k}+k=2\sqrt{x+1}$

$2x-3+k^2=2k\sqrt{x+1}$

$(2x+(k^2-3))^2=(2k\sqrt{x+1})^2$

$4x^2+4x(k^2-3)+(k^2-3)^2=4k^2(x+1)$

$4x^2+4x(k^2-3-k^2)+(k^2-3)^2-4k^2=0$

$4x^2-12x-(5k^2-3)(3k^2+3)=0$

При $k=-2$

$4x^2-12x-(20-3)(12+3)=0$

$4x^2-12x-17\cdot15=0$

$x=\frac{12\pm\sqrt{12^2+4\cdot17\cdot15}}{8}$

$x=\frac{12\pm\sqrt{144+1020}}{8}$

$x=\frac{12\pm\sqrt{1164}}{8}$

$\sqrt{1164}>30\Rightarrow$

$\frac{12+\sqrt{1164}}{8}>5$

$\frac{12-\sqrt{1164}}{8}<-1$

$\Rightarrow$ при $k=-2$ решений нет

$17\cdot60=1020$

при $k=1$

$4x^2-12x-(5-3)(3+3)=0$

$4x^2-12x-2\cdot6=0$

$x^2-3x-3=0$

$x=\frac{3\pm\sqrt{9+4\cdot3}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$

$\sqrt{21}<5\Rightarrow$

$\frac{3+\sqrt{21}}{2}<\frac{3+5}{2}=4$

$\frac{3-\sqrt{21}}{2}>\frac{3-5}{2}=-1$

$\Rightarrow$ Ответ: $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$; $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$

Чистовик.

3. $2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$a \neq 0$ - иначе не парабола

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

$ay = ax^2+4a^2x+4a^3+2$

$y = x^2+4ax+4a^2+2 = (x+2a)^2+2 \Rightarrow$

В имеет координаты $(-2a;2)$

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$x^2+2x(y-a)-6ay+2a^2+5y^2=0$

$x^2+2x(y-a)+(2a^2+5y^2-6ay)=0$

т.к точка единственна $\Rightarrow$

$D=0 \Rightarrow 4(y-a)^2-4(2a^2+5y^2-6ay)=0$

$y^2+a^2-2ay-2a^2-5y^2+6ay=0$

$y^2+a^2-2ay=2a^2+5y^2-6ay$

$y^2-2ay=a^2+5y^2-6ay$

$a^2+4y^2-4ay=0$

$(a-2y)^2=0$

$y=\frac{a}{2}$

$x^2-ax+(2a^2+\frac{5}{4}a^2-3a^2)=$

$x^2-ax+\frac{1}{4}a^2=0$

$(x-\frac{1}{2}a)=0$

$x=\frac{1}{2}a.$

точка А имеет координаты $(\frac{1}{2}a;\frac{1}{2}a)$

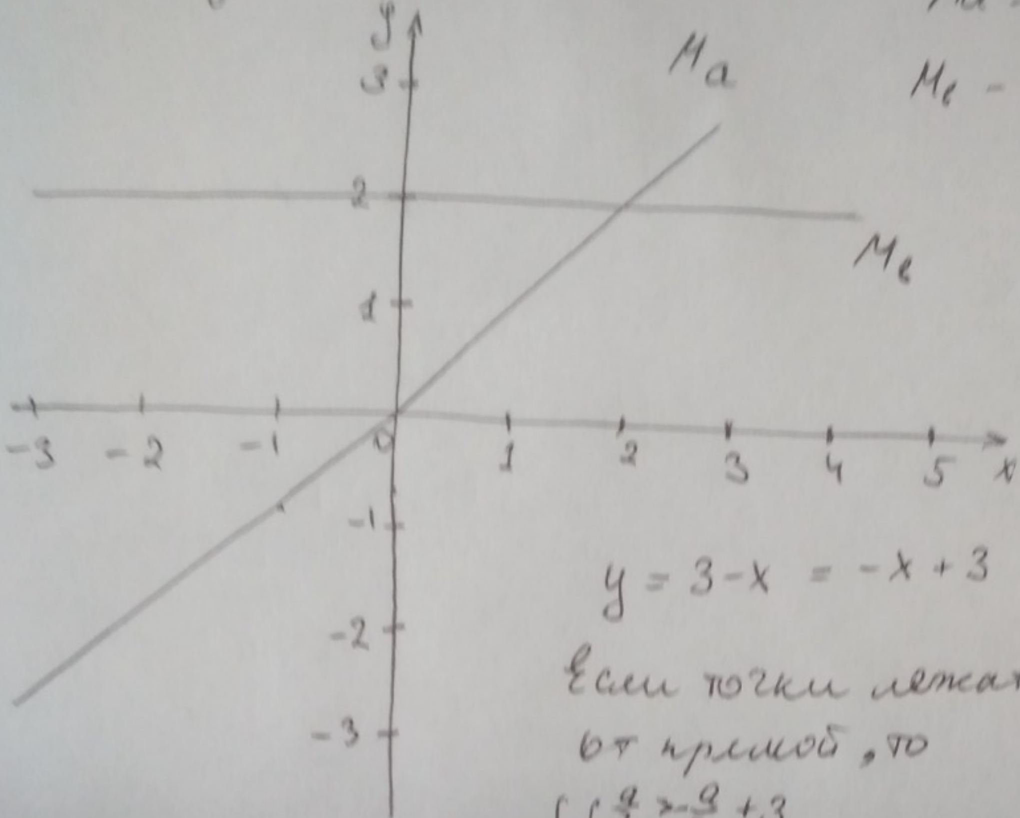
5

Чистовик

3 (продолжение)

Ma - множество точек A

Mв - множество точек B.



$y = 3 - x = -x + 3$

Если точки лежат по одну сторону от прямой, то

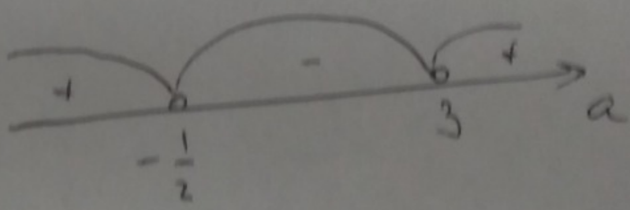
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{a}{2} > -\frac{a}{2} + 3\\ 2 > 2a + 3\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{a}{2} < -\frac{a}{2} + 3\\ 2 < 2a + 3\end{cases}\end{array}\right.$$

или

$\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} - 3\right)(2 - 2a - 3) > 0$

$(a - 3)(-1 - 2a) > 0$

$(a - 3)\left(a + \frac{1}{2}\right) < 0$



$a \in \left(-\frac{1}{2}; 3\right)$

6

211006701 (U92348 M1275070)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006701**

ID профиля: **92348**

Вариант 12

чистовик

4. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ – не решение

$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2 y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2) + x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$ $x^2+y^2>0$

$2(x^2+y^2) - \dfrac{1}{x^2+y^2} = 1$

$2(x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2) - 1 = 0$

$2(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) + (x^2+y^2) - 1 = 0$

$2(x^2+y^2)(x^2+y^2-1) + (x^2+y^2-1) = 0$

$(2x^2+2y^2+1)(x^2+y^2-1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} 2x^2+2y^2 = -1 \text{ – !!!} \\ x^2+y^2 = 1 \end{array}\right.$

$\begin{cases} 1 + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2y^2 = \dfrac{1}{4} \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{теорема Виета}} \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{2} \\ y^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

1

Чистовик.

5. Рассмотрим ~~некоторый~~ квадрат с чётной стороной (по количеству точек), который содержит все точки, удовл. условию.
вершины $(1;1)$; $(1;62)$; $(62;1)$; $(62;62)$
Заметим, что диагонали не пересекаются в целой точке.

Положим мы выбрали некоторую точку на диагонали, тогда есть 2, с которыми она лежит на прямых, параллельных осям. $\Rightarrow$
количество способов выбрать первую точку $2\cdot 62$, а вторую $2\cdot 62-2-1$
(т.к в каждой диагонали по 62 точки

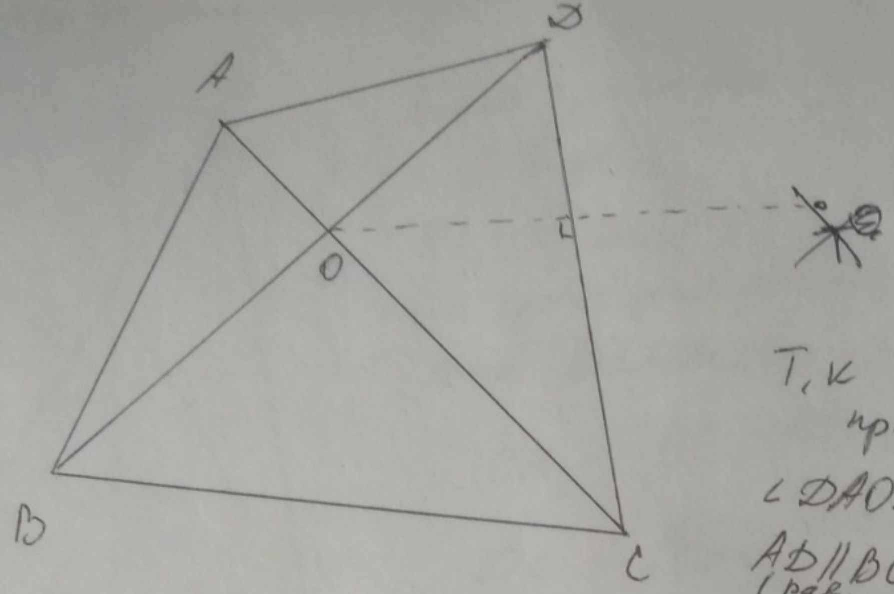
итого $2\cdot 62\cdot(2\cdot 62-2-1) = 124\cdot 121 = 15004$
прямые $y=x$ и $y=63-x$ задают диагонали квадрата.

$$\begin{array}{r} 124 \\ \times\ 121 \\ \hline 124 \\ 248 \\ +\ 124 \\ \hline 15004 \end{array}$$

211006701 (U92348 M1275071)

Чистовик.

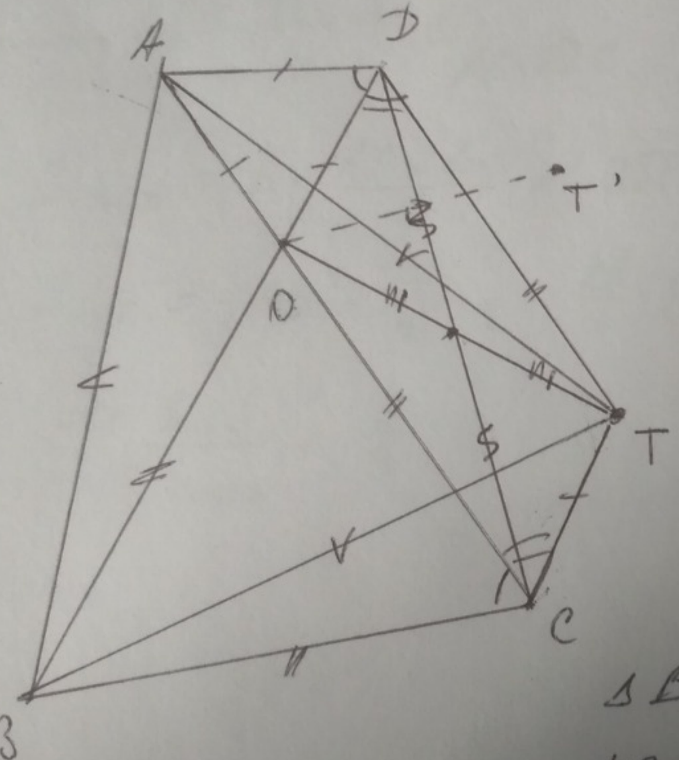
6.



Т.к ΔAOD и ΔBOC - правильные $\Rightarrow$

$\angle DAO = \angle ACB = 60° \Rightarrow$

$AD \parallel BC \Rightarrow ABCD$ - трапеция (равнобедренная)



т.к T симметрична O $\Rightarrow$

ODTC - параллелограмм

$\Rightarrow DT = OC = OB = BC$

$TC = DO = AO = AD$

$\angle ADO = \angle BCO = 60°$

$\angle ODT = \angle OCT$ - т.к DOCT - параллелограмм $\Rightarrow$

$\angle ADT = \angle BCT \Rightarrow$

т.к $TC = AD$; $BC = DT \Rightarrow$

$\Delta BCT = \Delta ADT$ по 2м сторонам и углу между ними $\Rightarrow AT = TB$

$\Rightarrow \Delta ABT$ - равнобедр.

$\angle DOC = \dfrac{360° - 2 \cdot 60°}{2} = 120° \Rightarrow \angle OCT = 60° \Rightarrow$

$\angle BCT = 120° \Rightarrow$ т.к $AO = AD$; $DT = OB \Rightarrow$

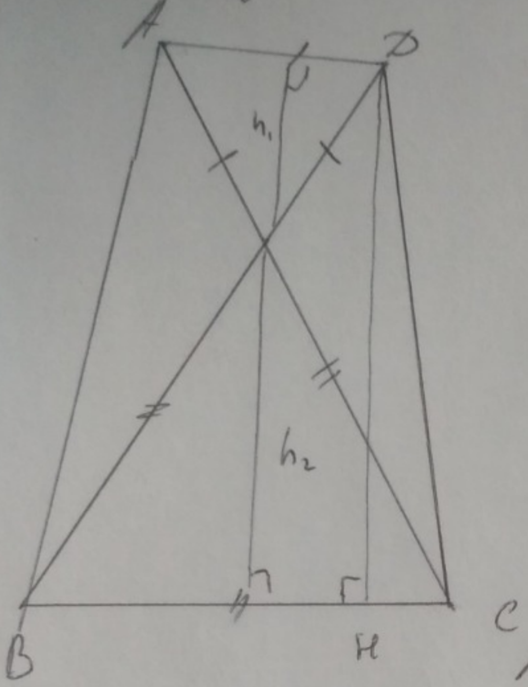
$\Delta ADT = \Delta ADB$ по 2м сторонам и углу между ними $\Rightarrow BA = AT = TB \Rightarrow \Delta ABT$ - правильный

3

211006701 (U92348 M1275071)

Чистовик

~~6~~ (продолжение)



высота трапеции $h = h_1 + h_2$

$h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} AD$

$h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} BC \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$

т.к трапеция равнобедр $\Rightarrow$

~~сим~~ симметрична $\Rightarrow$

$CH = \frac{BC - AD}{2} = -1$ (− − значит, что $BC < AD$ и высота к прямой, содерж. отрезок)

$DC = \sqrt{CH^2 + h^2}$

$AB = DC = \sqrt{1+27} = \sqrt{28} \Rightarrow$

$S_{ABCD} = h \cdot \frac{AD+BC}{2} = 9\sqrt{3}$

$S_{ABT} = \frac{1}{2} AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{28}{4} \cdot \sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$