Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006623**

ID профиля: **378883**

Вариант 12

Чистовик

Задача №2

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$$
$$\Updownarrow$$
$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} + 5 - 2 = 0$$

$(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}) + (\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x})^2 - 2 = 0$. Пусть $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = t$, тогда

$t^2 + t - 2 = 0$. По теореме Виетта и обратной ей: $\begin{cases} t_1 t_2 = -2 \\ t_1 + t_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = 1 \end{cases}$

Значит, $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = -2 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1 \end{array}\right.$

Рассмотрим 1ое уравнение совокупности:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = -2$$
$$\Downarrow$$
$$x + 1 = 4 - x + 4 - 4\sqrt{4-x}$$
$$\Downarrow$$
$$4x^2 + 49 - 28x = 64 - 16x$$
$$\Downarrow$$

$4x^2 + 113 - 10x = 0$, но $D = 100 - 113 \cdot 4 \cdot 4 < 0 \Rightarrow$ Корней нет

Рассмотрим 2ое уравнение совокупности:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1$$
$$\Downarrow$$
$$2x - 4 = 2\sqrt{4-x}$$
$$\Downarrow$$
$$4x^2 + 16 - 16x = 16 - 4x$$
$$\Downarrow$$

$4x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ или $x = 3$. Если $x = 0$, то $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1 - 2 \neq 1$ – Не подходит

Если $x = 3$, то $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 2 - 1 = 1$ – Подходит

Ответ: $x = 3$

Чистовик

Задача №3

Рассмотрим выражение $2x^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$ как квадратное относительно x: $x^2-2x(a-y)+5y^2-6ay+2a^2=0$, тогда

$$D=4(a^2+y^2-2ay)-20y^2+24ay-8a^2=$$

$$=-(2a-4y)^2, \text{ но } (2a-4y)^2\geqslant 0 \Rightarrow \text{ чтобы } \exists A: 2a-4y=0$$

Значит, $y=\frac{a}{2}$ => (~~подставив в $x=$~~) $x=\frac{a}{2}$ т.е. координаты $A\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$

Заметим, что если $a=0$, то $x^2+2xy+5y^2=0$ – Невозможно т.к. $D=4y^2-20y^2<0$

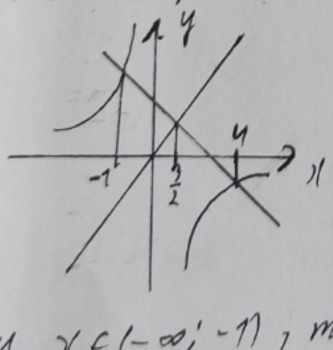
Рассмотрим выражение $y=\dfrac{ax^2+4a^2x+4a^3+2}{a}$ ($a\neq 0$ т.к. $2\neq 0$) – Парабола с вершиной в $B(x_0;y_0)$ => $x_0=\dfrac{-4a^2}{2a}=-2a$ => Подставив в исходное,

$$y=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a} \Rightarrow B\left(-2a;\frac{2}{a}\right)$$

Таким образом, координаты точки A удовлетворяют $y=x$, а точки B – $y=\frac{-4}{x}$. Найдём точки пересечения данных функций с искомой прямой: $3-x=x \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow a=3$

$$-\frac{4}{x}=3-x \Rightarrow x^2-3x-4=0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1=-1 \\ x_2=4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_1=\frac{1}{2} \\ a_2=-2 \end{matrix}$$

Расположив графики в 1-ой системе координат:



Таким образом, условие выполняется при

$x\in(-\infty;-1)\cup(0;\frac{3}{2})\cup(4;+\infty)$

⇕

~~$a\in(-\infty;2)\cup(0;\frac{1}{2})\cup$~~

Если $x\in(-\infty;-1)$, то $a\in(\frac{1}{2};+\infty)$ для B и $a\in(-\infty;-2)$ для A

Если $x\in(0;\frac{3}{2})$, то $a\in(-\frac{3}{4};0)$ для B и $a\in(0;3)$ для A

Если $x\in(4;+\infty)$, то $a\in(-\infty;-2)$ для B и $a\in(8;+\infty)$ для A

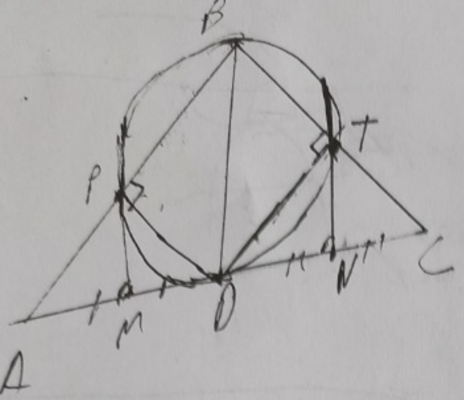
} Невозможно

⇓

Ответ: $a\in\varnothing$

Черновик

1)



M и N – середины AD и CD; PM || TN

а) ∠ABC – ?

R

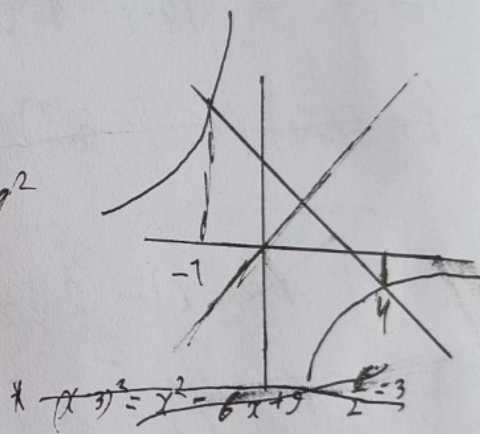
3) $2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$

$x = 3 - x \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ при $a = 3$

$ax^2 + 4a^2x = ay + 4a^3 + 2$ – парабола с вершиной B

A и B по одну сторону от $y + x = 3$ т.е. $y = 3 - x$. Найти a

$x^2 - \cancel{2x}(a+y) + 5y^2 - 6ay + 2a^2 = 0$



$D = 4(a^2 + y^2 + 2ay) - 20y^2 + 24ay - 8a^2$

$\cancel{6a^2 - 4}$

$-4a^2 - 16y^2 + 32ay = 0$

$-(4a^2 + 16y^2 - 32ay) = 0$

$D = -(2a - 4y)^2 \cancel{+ 16ay} \Rightarrow (2a - 4y)^2 = 0$

$\Updownarrow$

$2a - 4y = 0$

$\Updownarrow$

Тогда $x = \frac{2(a-y)}{2} = a - y = y$ $\quad A\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ $\quad a = 2y$ т.е. $y = \frac{a}{2}$

Рассмотрим точку B: $ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$

~~Вершина: $x_0 = \frac{-4a^2}{2a} = -2a \Rightarrow y_0 = 4a^3 - 8a^3 - ay + 4a^3 + 2 = 0$~~

~~$\Updownarrow$~~

~~$-20a^3 + 2 = ay \Rightarrow y = \frac{-20a^3}{a}$~~

* Проверь: $a \neq 0$

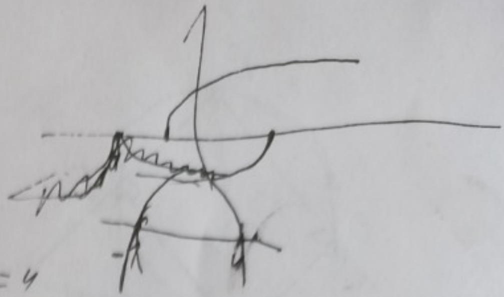
211006623 (U378883 M1274688)

Черновик

2) $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$(x+1)(4-x)$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = -4,\ x_1 + x_2 = +3 \Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = -1$



$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} = -3$, пусть $\sqrt{x+1} = a$, а $\sqrt{4-x} = b$, тогда

$\cancel{a - b - 2ab = 3}$

$a(1-b) + 1 - b - ab = 3$

$\cancel{(\sqrt{x+1})}$ $\cancel{x+1+4-x}$

$a - b + 3 = 2ab$

$a - b + 5 = 2(ab+1)$

$\cancel{\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}(1+2\sqrt{x+1}) - 3 = 0}$

$\cancel{(1+\sqrt{x+1})(1-\sqrt{4-x}) = 4}$ $\cancel{(1+\sqrt{x+1})(1-\sqrt{4-x})}$

$(x+1) + (4-x) - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} = 9 + 4(x+1)(4-x) - 12\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$(\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x})^2 = 9 + 4(x+1)(4-x) - 8\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$(\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x})^2 = (2\sqrt{(x+1)(4-x)} - 2)^2 + 5$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{(x+1)(4-x)}$

$\sqrt{x+1}(1 - \sqrt{4-x}) - \sqrt{4-x}(1 + \sqrt{x+1}) + 3 = 0$

$(\sqrt{x+1} + 1)(1 - \sqrt{4-x}) - \sqrt{(x+1)(4-x)} + 2 = 0$

$(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x})^2 = -2\sqrt{(x+1)(4-x)} + 5$

$(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}) - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} + 5 = 2$

$(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x})\left(1 + \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}}{\sqrt{(x+1)(4-x)}}\right) = 2$

Чертовкин

$$y = \frac{ax^2 + 4a^2x + 4a^3 + 2}{a} = x^2 + 4ax + 4a^2 + \frac{2}{a}$$

$$x_0 = \frac{-4a}{2} = -2a$$

$$y_0 = 4a^2 - 8a^2 + 4a^2 + \frac{2}{a} \Rightarrow y_0 = \frac{2}{a}$$

$A\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ $B\left(-2a; \frac{2}{a}\right)$. Если $a > 0$, то ~~обе координаты $B < 0$~~

~~$a \in (0; 3]$ - Подойдет~~

Если $a = 0$, то $x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$ $\Rightarrow a \neq 0$

$2 = 0$ - Невозможно

~~Если $a < 0$, то обе координаты B.~~

т.е. B удовлетворяет : $y = \frac{-4}{x}$

Найдём точки пересечения: $\frac{-4}{x} = 3 - x \Rightarrow 3x - x^2 + 4 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = -4$, $x_1 + x_2 = 3$ $\Rightarrow x_1 = -1$, $x_2 = 4$

Таким образом, $a \in (-\infty; -1] \cup (4; +\infty) \cup (0; 3)$ - Ответ.

$x^2 + 2xy + 5y^2 = 0$ $D = 4y^2 - 20y^2$

$\cancel{x \neq 2y}$

Если $x \in (-\infty; -1)$, то $a \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ для B и $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ для A

Если $x \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$, то $a \in (-3; 0)$ для B и $a \in (0; 3)$ для A

Если $x \in (4; +\infty)$, то $a \in ($

~~$(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$~~

$1 - 2 + 3 =$ 2:2 - Неверно

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} - 2\sqrt{(x+1)(4-x)} + \cancel{3} = 0$

$(\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x}) + (\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x})^2 \cancel{+} 2 = 0$. Пусть $\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = t$, тогда

$t^2 + t \cancel{+} 2 = 0 \Rightarrow t_1 t_2 = -2$, $t_1 + t_2 = -1 \Rightarrow t_1 = -2$ — $\cancel{+}$, $t_2 = 1$.

Значит, $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = -2 \\ \sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} = 1 \end{array}\right.$

~~Рассмотрим 1^ое выр.~~

Неверно т.к. $\sqrt{x+1} \geq 0$

$x + 1 = 4 - x + 4 - \cancel{4}\sqrt{4-x}$

$2x \cancel{-7} = - 4\sqrt{4-x}$

$4x^2 + \cancel{49} - \cancel{28}x = \cancel{64} - \cancel{16}x$

~~$4x^2 + 10x + 145 = 0$~~

$4x^2 + 113 - \cancel{12}x = 0$

$D = 100 - 113 \cdot 4 \cdot 4 < 0 \Rightarrow$ Корней нет

$x + 1 = 4 - x + 1 + 2\sqrt{4-x}$, ≥ 0

$2x - 4 = 2\sqrt{4-x}$

$4x^2 + 16 - 16x = 16 - \cancel{8}4x$

~~$4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$. Проверим:~~

~~$1 - 2 = -1$ — Не подходит~~

$4x^2 - 12x = 0$

$4x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ или $x = 3$

$1 - 2 = -1$ - Не подходит

$2 - 1 = 1$ — Подходит

$x = 3$ - Корень

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006623**

ID профиля: **378883**

Вариант 12

Чистовик

Задача №4

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{9}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Пусть $x^2y^2 = b$, а $x^2+y^2 = a$, тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + b = \frac{9}{4} \\ 2a^2 + b = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{9}{4} - \frac{1}{a} \\ 2a^2 + \frac{9}{4} - \frac{1}{a} = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Рассмотрим $2^{ое}$ уравнение системы:

$2a^2 - \frac{1}{a} = 1 \Rightarrow 2a^3 - 1 - a = 0$. Заметим, что $a = 1$ – корень, тогда

$2a^3 - a - 1 = (a-1)(2a^2 + 2a + 1)$, но $2a^2+2a+1=0$ не имеет корней т.к. $D = 4-4\cdot 1\cdot 2 < 0$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ x^2y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4y^2} + y^2 = 1 \\ x^2 = \frac{1}{4y^2} \end{cases}$$

Рассмотрим $1^{ое}$ уравнение системы:

$4y^4 + 1 - 4y^2 = 0$. Пусть $y^2 = t$, тогда

$4t^2 - 4t + 1 = 0$. $D = 16 - 16 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Ответ: $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $y_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $x_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Черновик

Задача № 5

Заметим, что узлов сетки, не принадлежащих границе 62^2. Из них, на диагоналях (искомых прямых $y=x$ и $y=63-x$) находится $62 \cdot 2$ узла. (т.к. $x-63=x \Rightarrow x=\frac{63}{2}$ – диагонали пересекаются не в узле)

$2 \cdot 62 \cdot (62^2-123)$ – Число способов выбрать диагональ · число способов выбрать узел сетки на ней · число способов выбрать узел сетки (всего 62^2, но 123 лежат в 1-ой вертикали / горизонтали и 1 – сам узел)

Но таким образом мы дважды посчитали способы выбрать узлы, ~~оба~~ из которых лежат на диагоналях. Таких способов:

$\underbrace{124 \cdot 123}_{\text{Выбрать 2 узла на диагоналях}} - \underbrace{124}_{\text{Недопустимые способы (2 для каждого)}}$

~~Ответ: Способов выбрать 2 узла сетки так, чтобы они лежали внутри квадрата (не включая границу)~~ и 1 из узлов ~~находится на диагонали~~

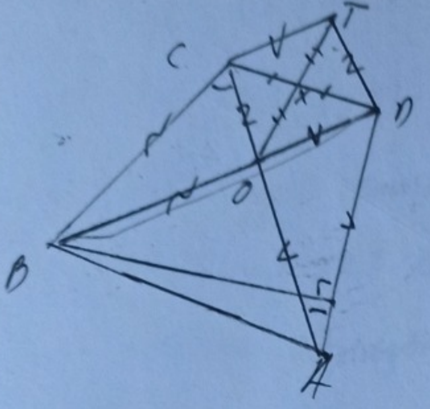
Ответ: Способов выбрать узлы, удовлетворяющие условию задачи

$2 \cdot 62(62^2-123) - \left(\frac{124 \cdot 123}{2} - 124\right)$

Чистовик

Задача №6

а) 1. Заметим, что ODTC – параллелограмм т.к. его диагонали делятся точкой пересечения пополам ($OX=XT$, $CX=XD$ по условию)



2. Тогда $\angle OCT = \angle ODT$ и $OC=DT$, $OD=CT$

3. Рассмотрим $\triangle BCT$ и $\triangle ADT$:

I $DC = DT = OC$ (из равностороннего $\triangle ODC$)

II $CT = AD = OD$ (из равностороннего $\triangle ADO$)

III $\angle BCT = \angle ADT = 60^\circ + \angle ACT$

$\Downarrow$

$\triangle BCT = \triangle ADT$ по 2м сторонам и углу

$\Downarrow$

$BT = AT$

4. Заметим, что $CB \parallel AD$ т.к. $\angle BCA = \angle CAD = 60^\circ$ – накрестлежащие при прямых BC и AD, секущей AC

~~5. Но тогда $BO = OD$ и $CO = OA$~~

6. $\angle COD = 180^\circ - \angle DOA = 120^\circ \Rightarrow \angle BOA = \angle COD = 120^\circ$ как вертикальные

Но $\angle OCT = 180^\circ - \angle COD = 60^\circ$

7. Рассмотрим $\triangle BOA$ и $\triangle BCT$:

1. $\angle BCT = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ = \angle BOA$
2. $BO = BC$ (из равностороннего $\triangle BCO$)
3. $OA = OD = CT$

$\Rightarrow \triangle BOA = \triangle BCT$

$\Downarrow$

$BA = BT$

Но тогда $BA = AT = BA$ ч.т.д. (треугольник правильный)

б) Дано: $BC=2$, $AD=4$, из п.5 части а ABCD – трапеция с основаниями AD и BC

1. Из теоремы косинусов $\triangle ADT$: $AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2\,AD \cdot DT \cdot \cos 120^\circ$, значит

$AT^2 = 4 + 16 - 16 \cdot (-\cos 60^\circ) = 20 + 8 = 28$

$\Downarrow$

2. Найдём $S_{ABT} = \frac{1}{2} AB \cdot AT \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} 28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

3. Найдём высоту трапеции: $BH = BD \cdot \sin 60^\circ = (2+4) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

4. $S_{трапеции} = \frac{BC+AD}{2} \cdot BH = \frac{6}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \Rightarrow \frac{S_{BCT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{9\sqrt{3}} = \frac{7}{9}$

Ответ: $\frac{S_{BCT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$

5) ~~1~~23 ~~123~~

~~способов выбрать в диагонали~~

~~Пусть только 1 лежит на~~

~~$123 \cdot 122 - 127$~~

~~Число способов выбрать так, чтобы обе лежали на диагоналях (−122 т.к. при выборе ∀ из 61 точки ей можно сопоставить 2 так, чтобы лежали в 1 ~~диагонали~~ гор.)~~

~~У центральной нет пары~~

~~121 пара с~~ искомыми прямыми

выберем точку

способов выбрать обе на диагон.

~~$62 \cdot 2 -$~~ $122 \cdot 121 - 124 + 62$.

~~выберем произвольные~~

лежат в 1 вертикали/горизонтали ($122 = 62 \cdot 2$)

узлов в той же вертикали/горизонтали

$2 \cdot 62^2 \cdot (62^2 - 61 \cdot 2) - (\cancel{62 \cdot 62} - 124)$

т.к. дважды посчитали случаи ~~нахождение в~~ нахождения обеих точек на диагоналях

выбрали диагональ

выбрали точку ~~на 1 из диагоналей~~

∴

124

Ответ: $2 \cdot 62(62^2 - 123) - (124 \cdot 123 - 124)$

дважды посчитали случаи нахождения обеих на диагоналях

$124(62^2 - 124) - 124(62^2 - 123 - 123 + 1)$

Ответ: $\frac{...}{S_{ABCD}} = \frac{...}{3}$ (страница 3 из 3)

21006623 (U378883 M1274689)

Черновик

4)

~~$2a^2 - 4a + \frac{2}{a^2} + \frac{25}{16} + 5a - \frac{5}{2a} = 1$~~ ~~$16 - 25$~~ $25 - 16 = 9$

~~$4a^4 + 2a^3 + 4 + \frac{9}{8}a^2 - 3a = 0$~~

~~$1 + 8a = \frac{5}{4}a$~~ $3 \cdot 16 = 48 \Rightarrow 48 - 25 = 23$

~~$a(8 - \frac{5}{4}) = 1$~~

$2a^2 - 4 + \frac{2}{a^2} + \frac{25}{16} + 5a - \frac{5}{a} - \frac{1}{a} = 1$

~~$2a^2 + \frac{25 - 5 \cdot 16}{16} + \frac{2}{a^2} - \frac{6}{a} = 0$~~

~~$2a^4 + \frac{55}{16}a^2 + 2 - 6a = 0$~~

$2a^4 - 4a^2 + 2 + \frac{9}{16}a^2 + 5a^3 - 6a = 0$

$2a^4 + 5a^3 - \frac{55}{16}a^2 - 6a + 2 = 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + b = \frac{5}{4} \\ 2a^2 + b = \frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{5}{4} - \frac{1}{a} \\ 2a^2 + \frac{5}{4} - \frac{1}{a} = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Рассмотрим 2-е уравнение системы:

$2a^2 - \frac{1}{a} = 1 \Rightarrow 2a^3 - 1 - a = 0 \Rightarrow$ Подбором: $a_1 = 1$, тогда

$2a^3 - a - 1 \,|\, a - 1$; $2a^2 + 2a + 1$

$2a^3 - 2a^2$

$2a^2 - a$

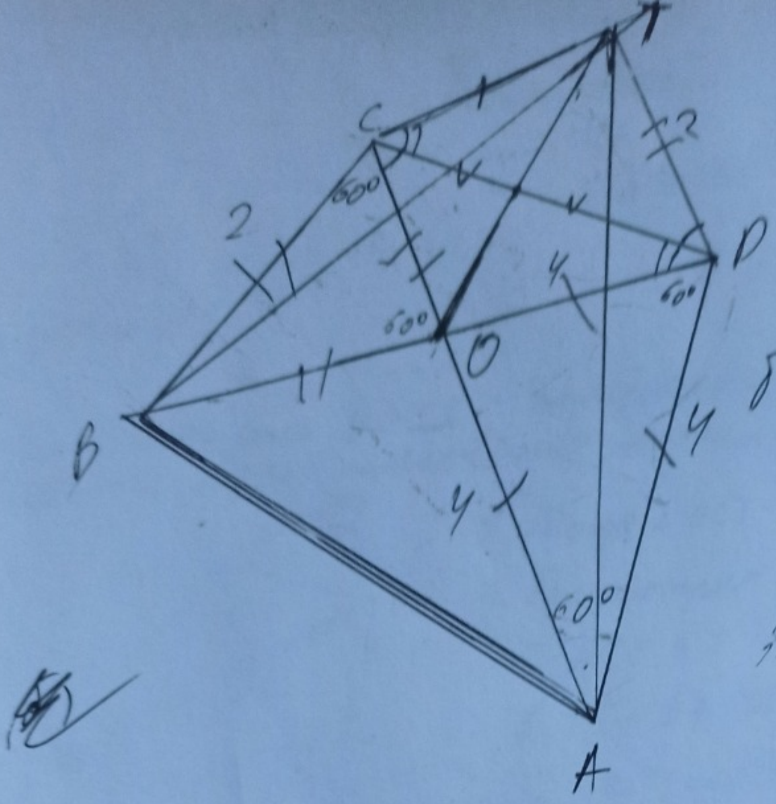
$2a^2 - 2a$

$a - 1$

$2a^3 - 1 - a = (a-1)(\underbrace{2a^2 + 2a + 1}_{\text{Корней нет}})$

т.к. $D = 4 - 4 \cdot 2 < 0$

21006623 (U378883 M1274689)



ABT – правильный??

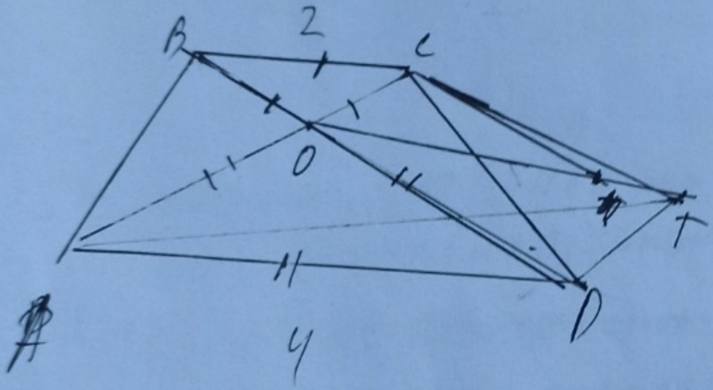
$\Delta BCT = \Delta ADT$

по ~~дв~~ двум сторонам и углу

б) $BC = 2; AD = 4$

$\frac{S_{ADT}}{S_{ABCD}} - ?$

$360 - 120^0 \Rightarrow 240^0 / 2 = 120^0$



$\cos 120^0 = \sin 60^0$

$4, S_{ABCD} = \frac{6}{2}.$

211006623 (U378883 M1274689)

4) Значит $\begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2y^2=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4y^2}+y^2=1 \\ x^2=\frac{1}{4y^2} \end{cases}$

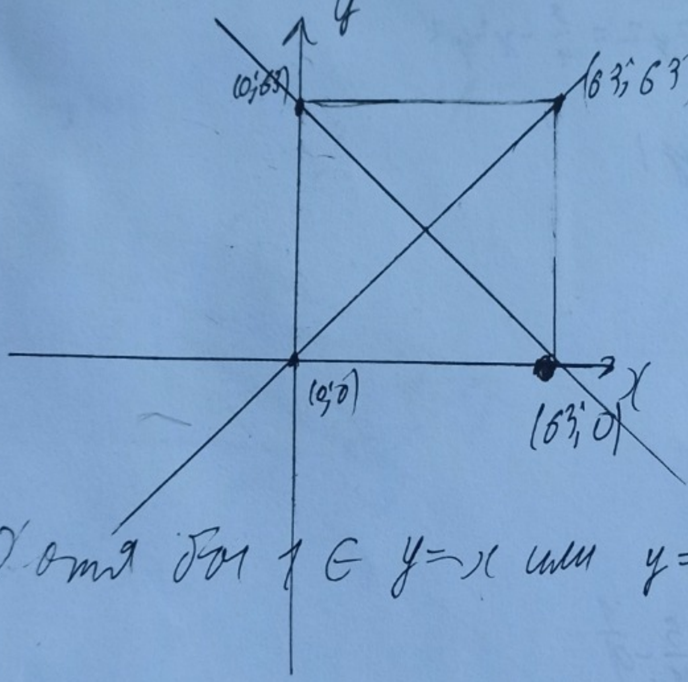
Рассмотрим 1ое уравнение системы:

$4y^4+1-4y^2=0$. Пусть $y^2=t$, тогда

$4t^2-4t+1=0 \Rightarrow \cancel{t_1 t_2 =}$

$D=16-16=0 \Rightarrow t_1=t_2=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\}$ Ответ

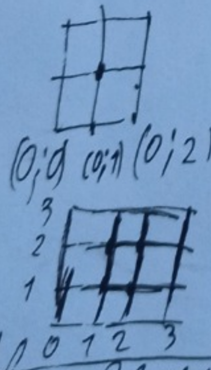
Б)



2 узла сетки

$y=x$ или $63-\cancel{x}$ ~~y~~

Хотя бы 1 $\in$ $y=x$ или $y=63-x$, но не в 1 точке вер.



Узлов сетки внутри: $(k-1)^2 \Rightarrow 62^2$

На диагоналях лежит 62 узла

(1, 2, ..., 63) т.к. не считаем границу

~~Но есть 1 общий узел~~ Нечетно => общего узла нет

$(63-x=x \Rightarrow 2x=63 \Rightarrow x=\frac{63}{2})$

На диагонали

$\cancel{(2\cdot 62^2-1)}\cdot$ $\cancel{62^2-2\cdot 6}$ $\cancel{(62^2-(2\cdot 62-1))}\cdot(2\cdot 62-1)+123\cdot$

$124-1=123$

Ответ

выбираем не на диагонали

Если оба на диагонали

Черновик

4) $\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$

Если $x^2+y^2=a$
$x^2y^2=b$

$\cancel{x^2+}$

Рассмотрим 2ое уравнение системы:

$2x^4+2y^4+5x^2y^2=\frac{9}{4}$

$x^2+y^2+2x^2y^2+x^2+y^2+2x^2y^2=\frac{9}{4}-x^2y^2$

$2(x+y)^2 = (\frac{3}{2}-xy)(\frac{3}{2}+xy)$

$2(x^2+y^2)^2 - \frac{1}{x^2+y^2} = 1$

$2(x^2+y^2)^2 = \frac{x^2+y^2+1}{x^2+y^2}$

$2(x^2+y^2)^3 = x^2+y^2+1$

$\begin{cases} \frac{1}{a} + b = \frac{5}{4} \\ 2(a+b)^2 + b = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{5}{4} - \frac{1}{a} \\ 2(a+\frac{5}{4}-\frac{1}{a})^2 + \frac{5}{4} - \frac{1}{a} = \frac{9}{4} \end{cases}$

Рассмотрим 1ое 2ое уравнение системы:

$\cancel{\frac{(a^2-1)}{a}}$ $\quad 2(\frac{a^2-1}{a}+\frac{5}{4})^2 - \frac{1}{a} = 1$

$2\frac{(a^2-1)^2}{a^2} + \frac{25}{16} + \frac{5(a^2-1)}{2a} - \frac{1}{a} = 1$

$2\frac{a^4-2a^2+1}{a^2} + \frac{25}{16} + \frac{5a^2}{2a} - \frac{5}{a} - \frac{1}{a} = 1$