# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

Шифр: **211006549**

ID профиля: **280773**

Вариант 12

Чистовик 1

№2

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

Заметим, что $4+3x-x^2 = (x+1)(4-x)$; Пусть $\sqrt{x+1} = a$; $\sqrt{4-x} = b$, тогда

$\begin{cases} a-b+3 = 2ab \\ a^2+b^2 = 5 \end{cases}$; $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$; $a-b = 2ab-3$

пусть $ab = u$, тогда

$(a-b)^2 = 4u^2+9-12u = 5-2u$

$4u^2-10u+4=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u=2 \\ u=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} ab=2 \\ a-b=1 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} ab=\frac{1}{2} \\ a-b=-2 \end{cases} (2) \end{array}\right.$

$(1): \begin{cases} ab=2 \\ a-b=1 \end{cases} \rightarrow b(1+b)=2 \rightarrow b^2+b-2=0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-2 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=-1 \end{array}\right.$

$\sqrt{n} > 0 \Rightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=-1 \end{cases}$ не подходит. Осталось $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

$(2): \begin{cases} ab=\frac{1}{2} \\ a-b=-2 \end{cases} \rightarrow 2a(a+2)=1 \rightarrow 2a^2+4a-1=0 \rightarrow a=\frac{-2\pm\sqrt{6}}{2} \rightarrow b=\frac{1}{-2\pm\sqrt{6}}$

$\sqrt{n}>0 \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{-2-\sqrt{6}}{2} \\ b=\frac{1}{-2-\sqrt{6}} \end{cases}$ не подходит. Осталось $\begin{cases} a=\frac{-2+\sqrt{6}}{2} \\ b=\frac{1}{-2+\sqrt{6}} \end{cases}$

$\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \rightarrow \sqrt{x+1}=2 \rightarrow x+1=4 \rightarrow x=3$; $4-x>0$ - $x=3$ подходит.

$\begin{cases} a=\frac{-2+\sqrt{6}}{2} \\ b=\frac{1}{\sqrt{6}-2} \end{cases} \rightarrow \sqrt{x+1}=\frac{\sqrt{6}-2}{2} \rightarrow x+1=\frac{6+4-4\sqrt{6}}{4} \rightarrow x=\frac{10-4\sqrt{6}-4}{4}=\frac{3}{2}-\sqrt{6}$

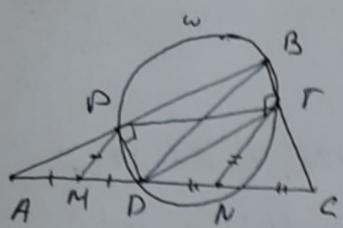
$\frac{3}{2}-\sqrt{6}+1>0$; $4-\frac{3}{2}+\sqrt{6}>0 \rightarrow x=\frac{3}{2}-\sqrt{6}$ подходит.

Ответ: $3$; $\frac{3}{2}-\sqrt{6}$.

211006549 (U280773 M1278348)

Чистовик 2

№1




Дано: $\triangle ABC$, $D \in AC$, ок-ть $\omega\left(R = \frac{BD}{2}\right)$;
$P = \omega \cap AB$; $T = \omega \cap BC$; $M = \frac{AD}{2}$; $N = \frac{CD}{2}$, $PM \parallel TN$

Найти: $\angle ABC$ (а)

$MP = \frac{1}{2}$, $NT = 1$, $BD = \frac{4}{3}$, $S_{ABC}$ - ? (б)

Решение:

а) $\angle DPB = \angle DTB = 90^\circ$, тк вписанные и опир. на диаметр
$\Rightarrow \angle APD = \angle DTC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow \triangle APD$, $\triangle TDC$ прямоуг
В прямоуг. $\triangle$ах медиана, пров. к гипотенузе, равна ее половине
$\Rightarrow AM = MD = PM$; $DN = TN = NC$
Проведем PT. тк $PM \parallel TN$, $\angle MPT + \angle PTN = 180^\circ$
$\angle MPT = \angle MPD + \angle DPT$; $\angle MPD = 90^\circ - \angle A$, тк $\triangle MPD$ р/б
$\angle DPT = \angle DBT$ как впис. и опир. на одну дугу
Аналогично $\angle DTM = 90^\circ - \angle C$ и $\angle PTD = \angle PBD$

$$90^\circ - \angle A + \angle DBT + 90^\circ - \angle C + \angle PBD = 180^\circ$$
$$\Rightarrow \angle B = \angle DBT + \angle PBD = \angle A + \angle C$$

Но из $\triangle ABC$ $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) \Rightarrow \boxed{\angle B = 90^\circ}$

б) Если $\angle B = 90^\circ$, то и $\angle PDT = 90^\circ$, тк чет-к PDTB вписан и $\angle D + \angle B = 180^\circ$.
$\Rightarrow \angle TDC = 90^\circ - (90^\circ - A) = \angle A \rightarrow AB \parallel TD$ и $PD \parallel BC$

$$S_{ABC} = S_{APM} + S_{NTC} + S_{PMD} + S_{DNT} + S_{PBTD}$$

$S_{APM} = S_{PMD} = \frac{PM^2 \cdot \sin 2A}{2}$ (медиана делит $\triangle$к на 2 равновеликих)

$S_{TNC} = S_{TND} = \frac{TN^2 \cdot \sin 2C}{2}$; $\sin 2C = \sin(180 - 2A) \Rightarrow S_{TNC} = S_{TND} = \frac{TN^2 \cdot \sin 2A}{2}$

по т. косинусов: $\triangle DNT$: $TD^2 = TN^2 \cdot 2(1 - \cos 2C)$
$\triangle PMD$: $PD^2 = PM^2 \cdot 2(1 - \cos 2A)$ $\quad \cos 2C = -\cos 2A$

$TD^2 + PD^2 = BD^2$ - т. Пифагора $\Rightarrow$
$$BD^2 = 2\left(TN^2(1 + \cos 2A) + PM^2(1 - \cos 2A)\right)$$
$$\frac{8}{9} = 1 + \cos 2A + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2A \Rightarrow \frac{3}{4}\cos 2A = \frac{8}{9} - \frac{5}{4}; \ \cos 2A = \frac{4 \cdot 8}{3 \cdot 9} - \frac{5}{3}$$
$$\cos 2A = \frac{32}{27} - \frac{5}{3} = -\frac{13}{27} \rightarrow \sin 2A = \sqrt{1 - \frac{169}{27^2}} = \frac{4\sqrt{35}}{27}$$

прод. на чистовике 3

Чистовик (3)

№1, прод.

$$S_{PBTD} = PD \cdot DT = 1 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2\left(1+\frac{13}{27}\right)\cdot 2\left(1-\frac{13}{27}\right)} = \frac{4\sqrt{35}}{27}$$

$$S_{ABC} = \left(PM^2 + TN^2\right)\cdot \sin 2A + \frac{4\sqrt{35}}{27} = \frac{4\sqrt{35}}{27}\underbrace{\left(1+\frac{1}{4}+1\right)}_{\frac{9}{4}}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}$$

Ответ: $\angle B = 90^\circ$; $S_{ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

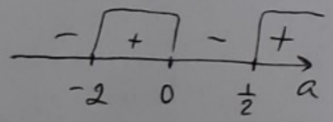
№3

Если лежат по одну сторону, то либо $y < 3-x$ (1), либо $y > 3-x$ (2)

парабола $y = x^2 + 4ax + 4a^2 + \frac{2}{a}$ при $a \neq 0$ (если $a=0$, то $2=0$ - неверно)

вершина: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -2a$; $y_0 = 4a^2 - 8a^2 + 4a^2 + \frac{2}{a} = \frac{2}{a}$

(1): $\frac{2}{a} < 3+2a$; $\frac{2a^2+3a-2}{a} > 0$; $2a^2+3a-2=0 \to \left[\begin{array}{l} a=-2 \\ a=\frac{1}{2}\end{array}\right.$



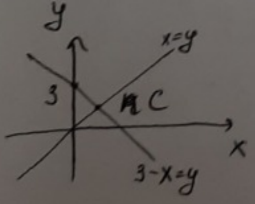

; $a \in (-2;0) \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

$x^2 + 2x(y-a) + 5y^2 - 6ay + 2a^2 = 0$

$D = y^2 + a^2 - 2ay - 5y^2 + 6ay - 2a^2 = -4y^2 - a^2 + 4ay = -(2y-a)^2$

Корни будут только при $D=0 \to a = 2y$

$x^2 - 2xy + 5y^2 - 6y\cdot 2y + 2\cdot 4y^2 = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = 0 \Rightarrow x = y = a/2$




(-) C: $3 - x = x \to x = \frac{3}{2} \to a = 3 \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, значит

(1): $a \in (-2;0) \cup \left(\frac{1}{2}; 3\right)$

(2): $a \in (-\infty;-2) \cup \left(0;\frac{1}{2}\right)$, чтобы лежать выше $y=3-x$, $x$ должно быть больше $\frac{3}{2}$, т.е. $a > 3$, что не попадает в указ. промежутки => таких решений нет

Ответ: $a \in (-2;0) \cup \left(\frac{1}{2};3\right)$

Черновик

$(x+1)(4-x) = 4x+4-x-x^2 = 4+3x-x^2$

$\sqrt{x+1} - \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

$\underset{a}{\shortparallel} \qquad \underset{b}{\shortparallel}$

$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$

$\begin{cases} a-b+3 = 2ab \\ a^2+b^2 = 5 \end{cases}$

$a-b = 2ab-3$

$ab = u$

$(a-b)^2 = 5-2ab$

$25-16$

$4u^2+\cancel{9}_{4} - \cancel{12}_{10}u = \cancel{5} - \cancel{2u}$

$4u^2-10u+4=0 \to u = \frac{5\pm\sqrt{3}}{4} = \left[\begin{array}{l} 2 \\ \frac{1}{2} \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} ab=2 \\ ab=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a-b=1 \\ a-b=-2 \end{array}\right.$

$\begin{cases} ab=2 \\ a-b=1 \end{cases} \to b(1+b)=2; \quad b^2+b-2=0 \to b = \left[\begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array}\right. \to a = \left[\begin{array}{l} 2 \\ -1 \end{array}\right. \quad \sqrt{x}>0 \Rightarrow \begin{array}{l} b=1 \\ a=2 \end{array}$

$4+2=6$

$\begin{cases} ab=\frac{1}{2} \\ a-b=-2 \end{cases} \quad 2a(a+2)=1, \; 2a^2+4a-1=0 \to a = \frac{-2\pm\sqrt{6}}{2}$

$b = \frac{1}{-2\pm\sqrt{6}}$

$\sqrt{x}>0$

$\Rightarrow a = \frac{-2+\sqrt{6}}{2}$

$b = \frac{1}{-2+\sqrt{6}}$

① $\sqrt{x+1} = 2$

$x+1=4 \to x=3$

② $\sqrt{x+1} = \frac{-2+\sqrt{6}}{2} \to x+1 = \frac{6+4-4\sqrt{6}}{4}$

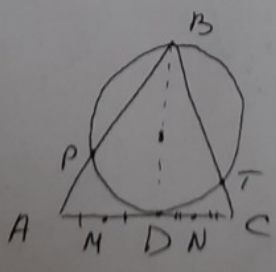
$x = \frac{10-4\sqrt{6}-4}{4}; \quad x = \cancel{\frac{5}{2}}\; \frac{3}{2} - \sqrt{6}$

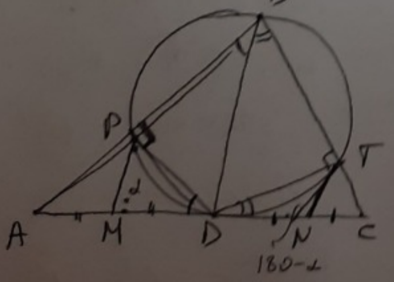
$4-x>0$ – все ок

$x+1 = \frac{5}{2}-\sqrt{6}$ – ок т.к. $2{,}5^2 = 6{,}25$

$4+\left(\frac{3}{2}-\sqrt{6}\right)\cdot 3 - \cancel{\frac{9}{4}} - 6 + 3\sqrt{6}$

$4+\underbrace{\frac{9}{2}-\frac{9}{4}}_{\frac{9}{4}}-6 =$




$D = 9^2+2\cdot 2\cdot 4 = 5^2$

$a = \frac{-3\pm 5}{4} = \left[\begin{array}{l} -2 \\ \frac{1}{2} \end{array}\right.$

211006549 (U280773 M1278348)

Черновик

(1) $y < ~~2a~~\ 3-x$

$2a^2-2ax+x^2+2xy-6ay+5y^2=0$

$\underbrace{x^2-2ax+a^2}+2xy+\underbrace{y^2-2ay+a^2}+4y^2-4ay=0$

$(x-a)^2+(y-a)^2+2y(x+2y-2a)=0$

вершина параболы: $x_0=\frac{-b}{2a}$ ; $x_0=-2a^2$

$y=x^2+4a^2x+4a^3+\frac{2}{a}$ $(a\neq0)$

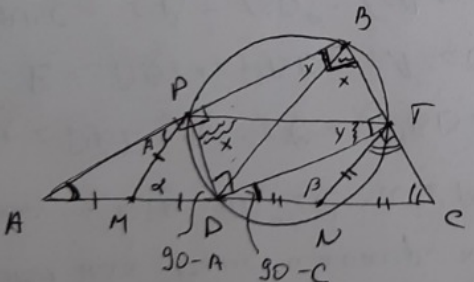
$y_0=4a^4-8a^4+4a^3+\frac{2}{a}=-4a^4+4a^3+\frac{2}{a}$

$-4a^4+4a^3+\frac{2}{a}<3+2a^2 \mid ~~a\neq0~~$

$\frac{4a^5-4a^4+2a^3+3a-2}{a}>0$

$\underbrace{(27-13)}_{14}\underbrace{(27+13)}_{40}$

$2\cdot7\cdot2^3\cdot5=2^4\cdot5\cdot7$




$\alpha+\beta=180°$

$180-90+A-90+C=A+C$

$\angle B=$

$90-A+x=180-(90-C+y)$

$x-A=C-y$ ; $C+A=x+y$

$x+y=180-(C+A)$

$S_{ABC}=S_{MPA}+S_{MPD}+S_{TCN}+S_{TDN}+S_{PBTD}$

$S_{MPA}=AM^2\cdot\frac{\sin 2A}{2}=S_{MPD}$

$S_{TDN}=S_{TCN}=TN^2\cdot\frac{\sin 2C}{2}=TN^2\cdot\frac{\sin 2A}{2}$

$C=90-A \Rightarrow 2C=180-2A$

$2TN^2-2TN^2\cdot\underset{-\cos 2A}{\cos 2C}=TD^2$

$2PM^2-2PM^2\cdot\cos 2A=PD^2$

$2TN^2+2TN^2\cos 2A+2PM^2-2PM^2\cos 2A$

211006549 (U280773 M1278348)

# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006549**

ID профиля: **280773**

Вариант 12

Чистовик (1)

№4

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

пусть $a = x^2+y^2$; $b=(xy)^2$, тогда

$$\begin{cases}\frac{1}{a} + b = \frac{5}{4} \\ 2a^2+b=\frac{9}{4}\end{cases} \ominus$$

Система симметрична и от-но $x \leftrightarrow y$, и от-но $x \leftrightarrow -x$

$$2a^2 - \frac{1}{a} = 1 \quad | \cdot a \neq 0$$

$2a^3 - a - 1 = 0 \to a=1$ - корень, $\begin{cases}a=1\\ b=\frac{1}{4}\end{cases} \to \begin{cases} x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \ \left(\mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{cases}$

$$\begin{array}{r|l} 2a^3+0a^2-a-1 & a-1 \\ \cline{2-2} -\ 2a^3-2a^2 & 2a^2+2a+1 \\ \hline 2a^2-a & \\ -\ 2a^2-2a & \\ \hline a-1 & \\ -\ a-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

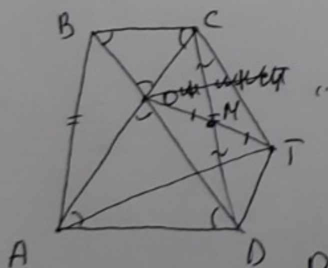
$2a^2+2a+1=0$ не имеет действительных корней ($D<0$)

=> ед. решение при $\begin{cases}a=1\\ b=\frac{1}{4}\end{cases}$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

№7




Дано: чет-к $ABCD$, (·)$O = AC \cap BD$, $\Delta BOC$ и $\Delta AOD$ прав.; (·)$T$ симм-на (·)$O$ от-но ~~AD~~ $M$: $CM = \frac{CD}{2}$

а) Д-ть: $\Delta ABT$ - прав.

б) $BC=2$, $AD=4$. Найти: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}}$ - ?

Решение: а) все углы в прав. треугольниках по $60°$ => $\angle CAD = \angle ACB = 60°$ - накрест лежащие углы => $BC \parallel AD$ => $ABCD$ - трапеция. Ее диагонали равны, она вписана (тк $\angle BDA = \angle BCA$ и опир. на $AB$) => она р/б: $AB=DC$

Соединим $TD$ и $CT$. Тогда $CODT$ - пар-м; тк это четырехугольник, у которого диагонали точкой пересечения делятся пополам.

=> $TD=CO$; $CT=OD$

Прод. на чистовике (2)

Чистовик ②

№8, прод.

по т. косинусов для △-ка ABO:

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos 120^\circ \quad (180-60)$$

для △-ка ATD: $AT^2 = AD^2 + DT^2 - 2AD \cdot DT \cdot \cos(\angle ADO + \angle ODT)$

$\angle ADO = 60^\circ$ по условию; $AO = AD$ и $DT = CO = OB$.

Пусть $\angle ODC = x$, а $\angle OCD = y$, тогда, т.к. $AD \parallel BC$:

$$60^\circ + y + 60^\circ + x = 180^\circ \to x + y = 60^\circ$$

$CO \parallel TD$ ($CODT$ - пар-м) $\Rightarrow \angle OCD = \angle CDT$

$\Rightarrow \angle ODT = x + y = 60^\circ \Rightarrow \angle ADO + \angle ODT = 120^\circ \Rightarrow AT = AB$.

Аналогично доказываете, что ~~в~~ $BT = AB$

$AB = BT = AT \Rightarrow \triangle ABT$ - правильный

ч.т.д.

б) $S_{ABT} = AB^2 \cdot \frac{\sin 60}{2}$

$AT = AB = \sqrt{AD^2 + BC^2 - 2AD \cdot BC \cdot \cos 120^\circ}$, $\cos 120 = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$AT = \sqrt{16 + 4 + 8} = \sqrt{28} \to S_{ABT} = \frac{28\sqrt{3}}{4} = 7\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{BOC} + 2S_{BOA}$

$S_{AOD} = AD^2 \cdot \frac{\sin 60^\circ}{2} = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$; $S_{BOC} = BC^2 \cdot \frac{\sin 60^\circ}{2} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

$2S_{AOB} = BC \cdot AD \cdot \sin 120^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = 4\sqrt{3} + \sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$

Ответ: $\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7}{9}$

Чистовик 3

№5

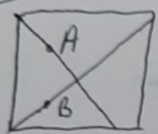
Всего точек на диагоналях: $62+62=124$

Заметим, что пересечение $y=x$ и $y=63-x$ не лежит в узле $\Rightarrow$ эту точку вычитать не надо.

Всего узлов внутри квадрата: $62\times 62$

Выбирая одну точку, мы сразу отметаем $61+62$ точки из общего кол-ва, т.к. эти точки лежат на одной вертикали/горизонтали с выбранной.

~~Т.к.~~ наши два узла независимы, поэтому нужно добавить $62\cdot 2$


$\Leftrightarrow$


На данном этапе ~~$n_1 = 124(62^2$ [illegible]$) + 62\cdot 2$~~

Но так же неразличимы ситуации


$\Leftrightarrow$

, поэтому следует вычесть $124\cdot 61$ из $n_1$

~~$124\cdot 62^2+2\cdot 62$~~ $n_1 = 124(62^2-61-62)+2\cdot 62$

$$n = n_1 - 124\cdot 61 = 124(62^2-61-62+1-61) = 124(62^2-61\cdot 3)$$

Мы прибавили $62\cdot 2$, т.к. у каждой точки, лежащей на одной из диагоналей, есть точка, лежащая на другой диагонали и на одной вертикали/горизонтали с выбранной точкой одновременно.

Мы вычитали $124\cdot 61$, т.к. у каждой из 124 „диагональных" точек есть по 61 точке, лежащими с ней на одной диагонали.

Ответ: $n = 124(62^2-61\cdot 3)$

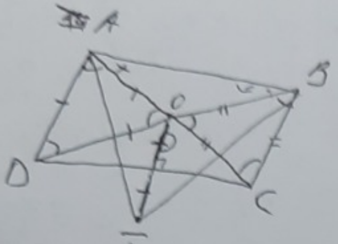
# Черновик

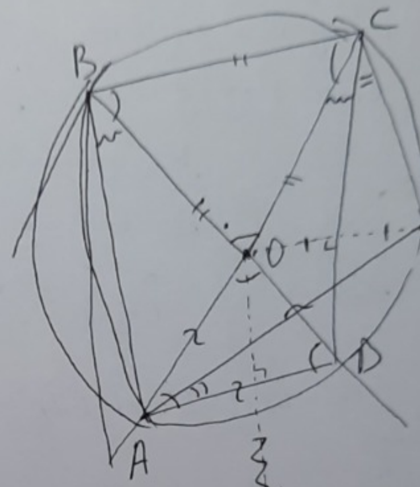
$a = x^2+y^2;\ b = x^2y^2$

$a^2 = x^4+y^4+2x^2y^2$

$2x^4+2y^4+5x^2y^2 = 2a^2+b = \frac{9}{4}$

$\frac{1}{a}+b=\frac{5}{4}$

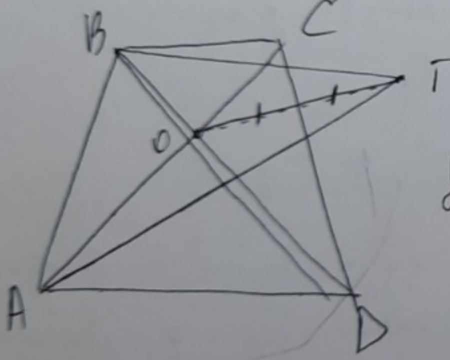




BC ∥ AD → трап.

$x+y=60$

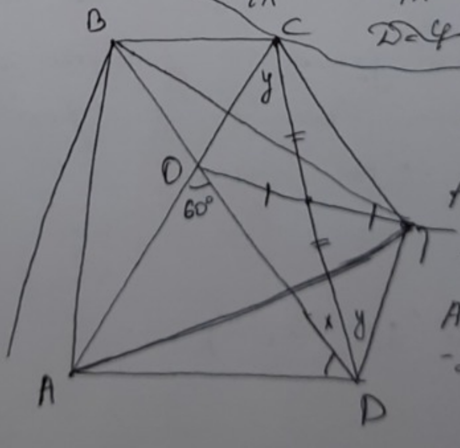
$60+x+60+y=180$




$y\cancel{x}^2 = \frac{1}{4x^2}$

$x^2+\frac{1}{4x^2}=1 \quad 4x^4-4x^2+1=0$

~~D=4-4=0~~ $(2x^2-1)=0$




CT = OD

CO = TD

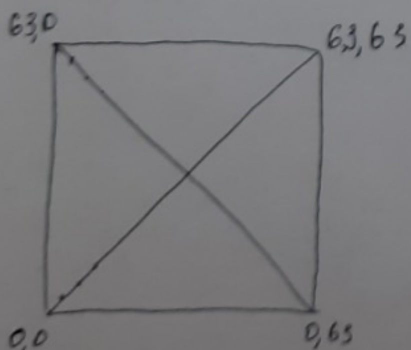
$AB^2 = AO^2+BO^2-$

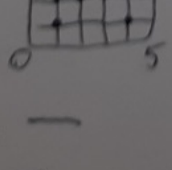
$-2AO\cdot BO\cdot\cos 120$

$AT = AO^2+TD^2-$

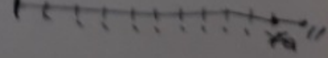
$-2AO\cdot TD\cdot\cos(60+OTD)$

60




62 + 62 − = 124



A→B и B→A

экв. ⇒

вычтем еще 62


−61 —

−61 |

62 · 62 − всего узлов

62+61 − занято верт. и гор.