Часть 1

Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

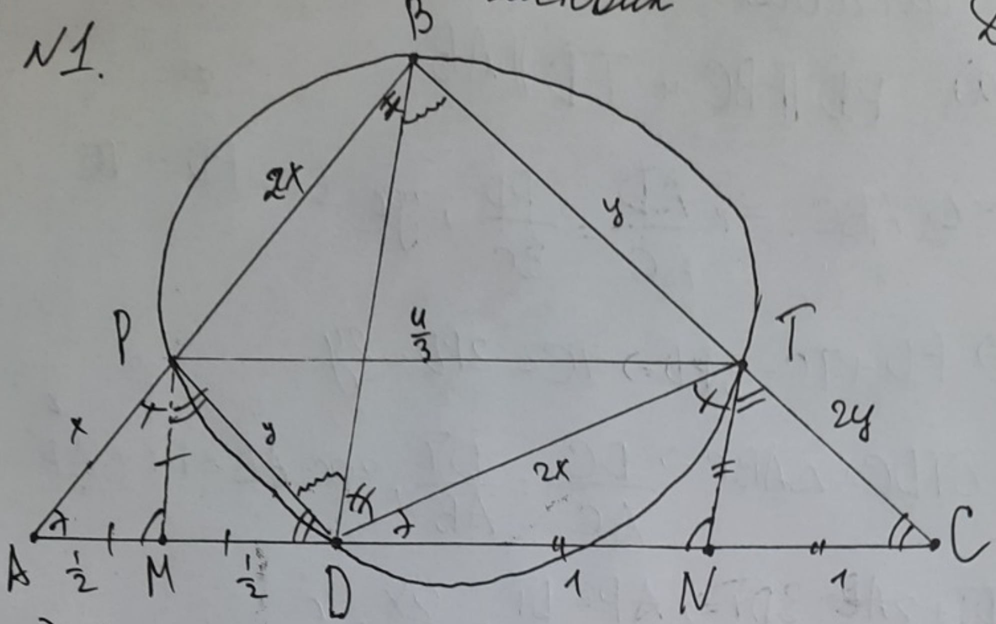
Шифр: **211006501**

ID профиля: **188621**

Вариант 12

Чистовик

№1.



Дано: $AM=MD$

$DN=NC$;

$PM \parallel TN$.

$\angle ABC=?$

$MP=\frac{1}{2}$; $NT=1$; $BD=\frac{4}{3}$

а) Соединим B и D; P и T. BD-диаметр $\Rightarrow \angle DTB=\angle BPD=90°$; т.к. опираются на диаметр $\Rightarrow \angle APD=\angle DTC=90°$ как смежные с DTB и BPD. Т.к. PM и TN - медианы в прямоуг. $\Delta \Rightarrow$ ~~PM=AM~~ $PM=AM=MD$ и $TN=NC$. По усл. $PM \parallel TN \Rightarrow \angle PMA=\angle TND$ как соответств. углы $\angle A=\dfrac{180°-\angle PMA}{2}=\dfrac{\angle 180°-\angle TND}{2}=\angle TDN$. Аналог. $\angle APM=\angle DTN=\angle A$. $\Rightarrow DT \parallel AB$ т.к. равны соотв. угл. A и TDN. Также ΔPMD и ΔTNC равноб. $\Rightarrow \angle MPD=\dfrac{180°-\angle PMD}{2}=\angle\dfrac{180°-\angle TNC}{2}=\angle NTC=\angle NCT=\angle PDM$ $\Rightarrow PD \parallel BC$, т.к. равны соотв. угл. PDM и C. Из св-в парал-ти AB и TD: $\angle ABD=\angle BDT$. Т.к. $PD \parallel BC \Rightarrow \angle PDB=\angle DBT \Rightarrow \angle PDT=\angle ABC$, т.к. равны их составляющ. $\Rightarrow 2ABC=180°$ — сумма противоп. углов вписан. PBTD $\Rightarrow \angle ABC=90°=\angle PDT$

б) Заметим, что $\Delta PBTD$ — прямоуг., т.к. все углы 90° $\Rightarrow PD=BT$; $DT=PB$. Пусть $DT=PB=2x$; $PD=y=BT$

$PT=BD$ как диам-ры окружн. $\Rightarrow PT=\frac{4}{3}$

$\boxed{1}$

$AC=2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot 1=3$; $PM=AM=\frac{1}{2}$; $TN=DN=1$

Чистовик

№1 (продолж.). Из а): $PD \parallel BC$ и $TD \parallel AB$

$PD \parallel BC \Rightarrow \triangle APD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{PD}{BC}$, где $BC = \overset{BT}{\overset{\shortparallel}{PD}} + TC$

$\Rightarrow \frac{2 + \frac{1}{2}}{3} = \frac{PD}{PD + TC} \Rightarrow PD + TC = 3PD \Rightarrow TC = 2PD = 2y$

Аналог: $TD \parallel AB \Rightarrow \triangle TDC \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{DC}{AC} = \frac{DT}{AB}$, где $AB = \overset{PB}{\overset{\shortparallel}{DT}} + AP$

$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{DT}{DT + AP} \Rightarrow 2DT + 2AP = 3DT \Rightarrow AP = \frac{DT}{2} = \frac{2x}{2} = x$

Т.к. $\angle B = 90° \Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2 \Leftrightarrow (3x)^2 + (3x)^2 = 3^2 \; / :9$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

Т.к. $\angle BTD = 90° \Rightarrow y^2 + (2x)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 + 4x^2 = \frac{16}{9}$

Вычтем второе ур-ие из первого: $3x^2 = \frac{7}{9} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$

$\Rightarrow y^2 = 1 - x^2 = \frac{20}{27} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow AB = 3x = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$; $BC = 3y = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{35}}{3}$

Ответ: $90°$; $\frac{\sqrt{35}}{3}$.

$\boxed{2}$

211006501 (U188621 M1274284)

Чистовик

№2.

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{4+3x-x^2}$$

$$-x^2+3x+4=-(x-4)(x+1)=(4-x)(x+1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=2\sqrt{(4-x)(x+1)}$$

Пусть $a=\sqrt{x+1}$; $b=\sqrt{4-x}$; a и $b>0$

(a и $b\neq 0$, т.к. если $b=0 \Rightarrow a+3=0 \Rightarrow a<0 \Rightarrow \varnothing$)

$$\begin{cases} a-b+3=2ab \\ a^2-1=4-b^2 \ (=x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b+3=2ab \rightarrow a(1-2b)=b-3 \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$$

Заметим, что $b\neq\frac{1}{2}$, т.к. если $b=\frac{1}{2} \Rightarrow a-\frac{1}{2}+3=a \Rightarrow \frac{1}{2}=3 \Rightarrow \varnothing$

$\Rightarrow a=\dfrac{b-3}{1-2b}$. Подставим это во 2 ур-ие:

$$\frac{(b-3)^2}{(1-2b)^2}+b^2-5=0 \Rightarrow \frac{b^2-6b+9+b^2-4b^3+4b^4-5+20b-20b^2}{1-4b+4b^2}=0$$

$4b^2-4b+1\neq 0 \Rightarrow 4b^4-4b^3-18b^2+14b+4=0$ (это числитель дроби)

$$2b^4-2b^3-9b^2+7b+2=0$$

Есть корень $b=1$. $\Rightarrow (b-1)(2b^3-9b-2)=0$ (вычисления в конце)

Есть корень $b=-2 \Rightarrow (b-1)(b+2)(2b^2-4b-1)=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-2 \rightarrow \varnothing, \text{ т.к. } b>0 \\ b=\dfrac{4\pm\sqrt{16+8}}{4}=\dfrac{2\pm\sqrt{6}}{2} \rightarrow b=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}, \text{ т.к. } 2-\sqrt{6}<0 \end{array}\right.$$

$\boxed{3}$

211006501 (U188621 M1274284)

Чистовик

№2. (продолжение)

Если $b=\frac{2+\sqrt{6}}{2} \Rightarrow a^2=5-b^2=5-\left(\frac{4+4\sqrt{6}+6}{4}\right)=\frac{10-4\sqrt{6}}{4}=\frac{5-2\sqrt{6}}{2}$

$\Rightarrow x=a^2-1=\frac{3-2\sqrt{6}}{2}$

Также $x=4-b^2=4-\left(\frac{4+4\sqrt{6}+6}{4}\right)=\frac{16-10-4\sqrt{6}}{4}=\frac{3-2\sqrt{6}}{2}$

Если $b=1 \Rightarrow a=\frac{b-3}{1-2b}=\frac{-2}{-1}=2$

$\Rightarrow x=a^2-1=3$, $x=4-b^2=3$

Ответ: $\boxed{3}$ и $\frac{3-2\sqrt{6}}{2}$ ~~$\frac{3-2\sqrt{6}}{2}$~~ ~~(подр ОДЗ подходят 3 и $\frac{3-2\sqrt{6}}{2}$, т.к. $3-2\sqrt{6}<8$, т.к. $-(2\sqrt{6})^2$~~

ОДЗ: $\begin{cases} x+1\geq 0 \\ 4-x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in[-1;4]$

3 подходит и $\frac{3-2\sqrt{6}}{2}$ не подход., т.к. $3-2\sqrt{6}<8$ и $3-2\sqrt{6}>-2$
$-2\sqrt{6}>-5$

Вычисление: $2b^4-2b^3-9b^2+7b+2 \,\big|\, b-1$

$2b^3-9b-2$

$$\begin{array}{l} 2b^4-2b^3 \\ \hline 0-9b^2 \\ -9b^2+9b \\ \hline -2b+2 \\ -2b+2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$2b^3-9b-2 \,\big|\, b+2$

$2b^2-4b-1$

$$\begin{array}{l} 2b^3+4b^2 \\ \hline -4b^2-9b \\ -4b^2-8b \\ \hline -b-2 \\ -b-2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\boxed{4}$

$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}}<0 \Rightarrow \emptyset$ и

$\sqrt{2}-3<0$

Если подст-ть $\frac{3-2\sqrt{6}}{2}$, то слева $3-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}}+\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}$, справа $\sqrt{2}$,

Чистовик

№3.

т.A: $2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

$(x-a+y)^2=x^2+a^2+y^2-2ax+2xy-2ay$

$\Rightarrow$ т.A: $(x-a+y)^2+a^2-4ay+4y^2=0$

$\Leftrightarrow$ т.A: $(x-a+y)^2+(a-2y)^2=0$

т.к. $(x-a+y)^2$ и $(a-2y)^2\geq0 \Rightarrow x-a+y=0$ и $a-2y=0$

(если $(x-a+y)^2>0 \Rightarrow (a-2y)^2<0$ – невозможно)

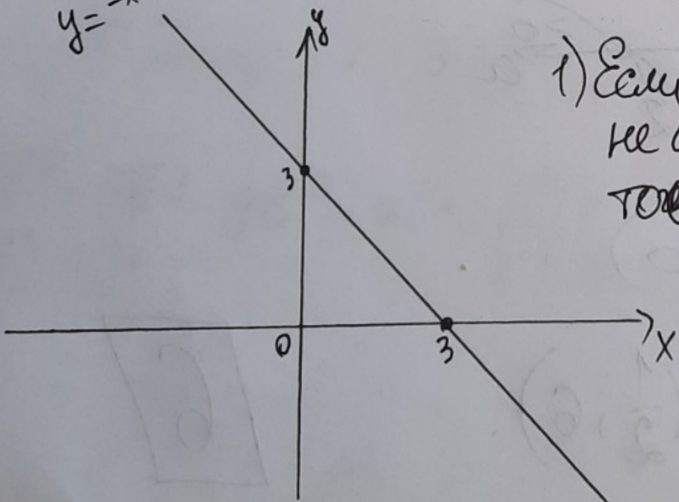
$\Rightarrow y=-x+a$ и $a=2y \Rightarrow \frac{a}{2}=-x+a \Rightarrow x=\frac{a}{2}=y$. – коор-ты т.A.

т.B: $ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

$a\neq0$, т.к. $2\neq0 \Rightarrow y=\frac{ax^2+4a^2x+4a^3+2}{a}=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

Вершина данной параболы по оси x $x_0=\frac{-4a}{2}=-2a$

по оси y $y_0=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$.



1) Если т.A и B лежат в полуплоскости, не содерж. (0;0) $\Rightarrow$ коор-ты всех точек данн. полупл-ти: $y_i>-x_i+3$.

($y_i\neq-x_i+3$, т.к. по усл. A и B $\notin$ прямой $y=-x+3$; y_i и x_i – коор-ты любой т. данн. полуплоскти, не содерж. (0;0))

$\Rightarrow$ для т.A
для т.B.
$\begin{cases} \frac{a}{2}>-\frac{a}{2}+3 \rightarrow a>6 \\ \frac{2}{a}>2a+3 \rightarrow \frac{2a^2+3a-2}{a}<0 \end{cases}$ т.к. $a>6 \Rightarrow$

$\boxed{5}$

$\Rightarrow$ знамен. >0 и $2a^2+3a>2\cdot6^2+3\cdot6 \Leftrightarrow 2a^2+3a>90 \Rightarrow$

$2a^2+3a-2>0 \Rightarrow$ дробь >0 – противор. т.к. дробь должна <0.

$\Rightarrow$ здесь $a\in\varnothing$

21100630 (U188621 M12 4284)

Чистовик.

№3. (продолжение)

Если т. A и B лежат в полупл-ти, содерж. $(0;0)$

$\Rightarrow$ в этой полупл-ти коор-ты всех точек $y_i < -x_i + 3$

($y_i; x_i$ - коор-ты любой точки $\in$ данн. пол пл-ти)

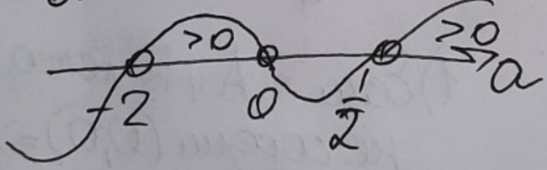
$\Rightarrow$ для т. A: $\begin{cases} \dfrac{a}{2} < -\dfrac{a}{2} + 3 \to a < 6 \\ \dfrac{2a^2+3a-2}{a} > 0 \end{cases}$

для т. B: $\left(\dfrac{2}{a} < 2a + 3 \Rightarrow \dfrac{2a^2+3a-2}{a} > 0\right)$

$\Delta\ 2a^2+3a-2$. $D = 9 + 16 = 25 \Rightarrow a = \dfrac{-3 \pm 5}{4} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ -2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \begin{cases} a < 6 \\ \dfrac{(a-\frac{1}{2})(a+2)}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{(2a-1)(a+2)}{a} > 0$ (умножил дробь на 2)

Метод интервалов:



$\Rightarrow \begin{cases} a < 6 \\ a \in (-2;0) \cup (\frac{1}{2}; +\infty) \end{cases}$

$\Rightarrow$ Ответ: $a \in (-2;0) \cup (\frac{1}{2}; 6)$.

$\boxed{6}$

$2a^2-2ax-6ay+x^2+2xy+5y^2=0$

Черновик

$(x-a+y)^2=x^2+a^2+y^2-2ax+2xy-2ay$

$(x-a+y)^2+a^2+4y^2-4ay=0$

$(x-a+y)^2+(a-2y)^2=0$

$$\begin{cases} y=a-x+a \\ y=\frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow x=+\frac{a}{2}$$

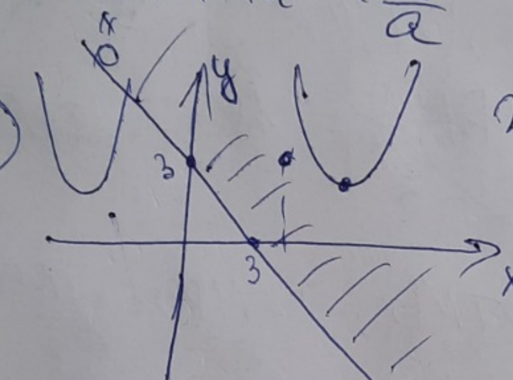
$x=y=\frac{a}{2}$ – точка A

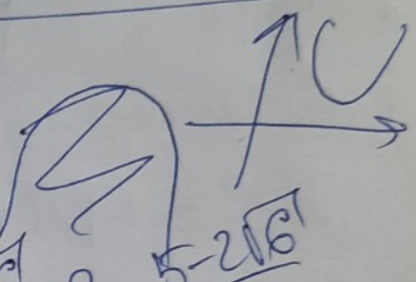
$a\neq 2$ т.к. $0\neq 2$

$ax^2+4a^2x-ay+4a^3+2=0$

$y=x^2+4ax+4a^2+\frac{2}{a}$

$y=-x+3$





$\frac{3-2\sqrt{6}}{2}+2=\frac{5-2\sqrt{6}}{2}$

$2a^2+3a-2$

$D=9+16=25$

$a=\frac{-3\pm5}{4}$

верш. $x_0=-\frac{4a}{2}=-2a$

$\frac{8-3+2\sqrt{6}}{2}=\frac{5+2\sqrt{6}}{2}$

$y_0=4a^2-8a^2+4a^2+\frac{2}{a}=\frac{2}{a}$

$2-3\sqrt{2}=\sqrt{18}$

$\frac{2a^2+3a-2}{a}>0$

$a^2+1{,}5a-1$

1) точки A и B выше и правее прямой

$\frac{a}{2}\geqslant -x+3$ $\quad \frac{a}{2}>-\frac{a}{2}+3 \Rightarrow a>6$

$\frac{a}{2}-3<-\frac{a}{2}$

$\frac{2+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=$

$\frac{25-24}{2}=$

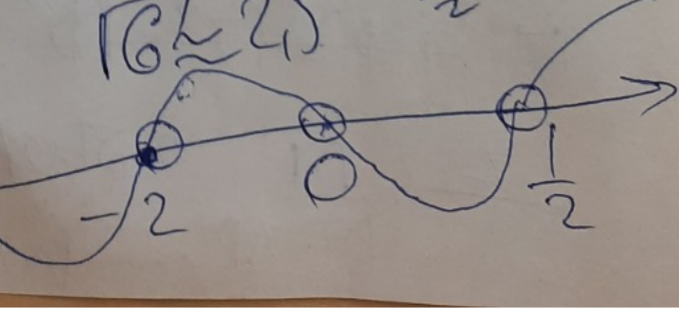
$2a(2a-2)(a-1)$

$\frac{1}{2}$

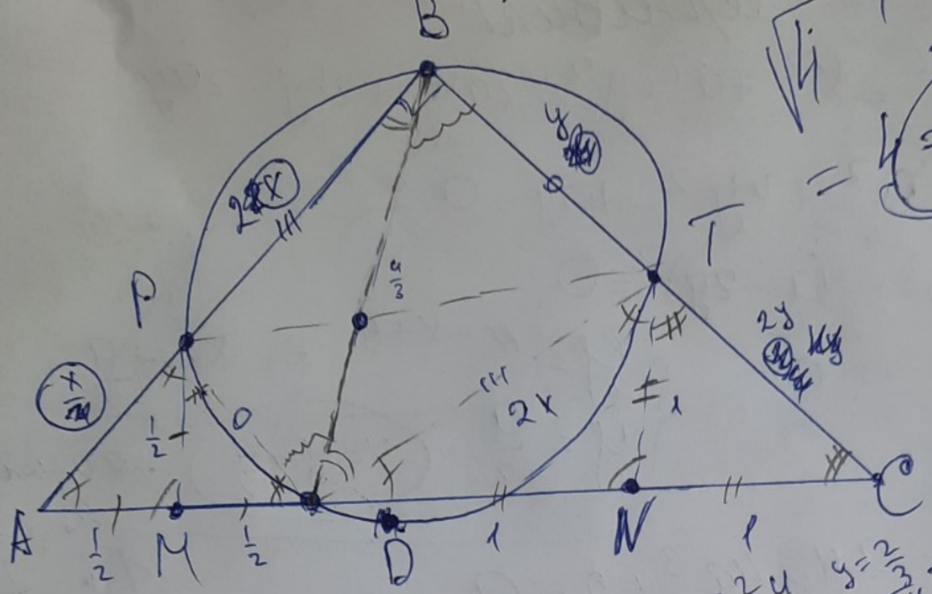
$\frac{2}{a}>-2a+3 \Leftrightarrow \frac{2+2a^2-3a}{a}>0$

$\sqrt{6}\approx 2{,}5$

$\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{8}}+\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{8}}+3=2\sqrt{\frac{1}{2}}$



Черновик $MP \parallel TN$



$\sqrt{4}$

$-1+3=$

$=4=2\sqrt{4+9-9}$

$\angle DPB = \angle DTB = 90^\circ$

т.к. BD-диам.

$\Rightarrow \angle DPA = \angle DTC = 90$

$y^2=\frac{4}{9}$ $y=\frac{2}{3}$ $5x^2=\frac{25}{9}$

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y^2+4x^2=\frac{16}{9} \end{cases}$ $\cancel{4x^2+4y^2=\frac{16}{9}}$

$x=\frac{\sqrt{5}}{3}$

PM и TN - медианы в △

$\angle TDC = \angle DAB \Rightarrow DT \parallel AB$

~~$2\angle MPD = 180 - \angle PMA = 180 - \angle DNT = \angle TNC$~~

~~$\angle MPD = \frac{TNC}{2} =$~~

$2\angle MPD = \angle PMA = \angle TND \Rightarrow \angle MPD = \frac{TND}{2}$ ~~$9y^2+\frac{9y^2}{4}=9$~~

~~$(1{,}5y)^2+(1{,}5x)^2$ $x^2+y^2=1$~~ x^2+y^2

$\Rightarrow PD \parallel BC$

$\Rightarrow \angle ABC = \angle PDT$ по сумм. углов $\Rightarrow 2\angle ABC = 180$ по св-ву

$\angle ABC = 90^\circ$

$MP=\frac{1}{2}$; $NT=1$; $BD=\frac{4}{3}$. $S_{ABC}=?$ $BC=3y$ $AB=3x$

$AC=3 \Rightarrow PT=\frac{4}{3}$ $\Rightarrow BC=2$

BTDP - прямоуг. $AB=\sqrt{5}$

$\Rightarrow S_{ABC}=\sqrt{5}$

~~$BT^2+BP^2=PT^2=BD^2=$~~

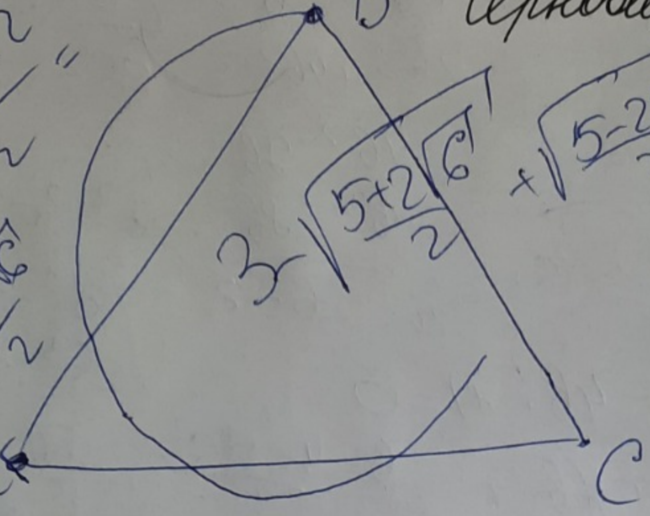
$\frac{1}{3}=\frac{PD}{PD+TC}$

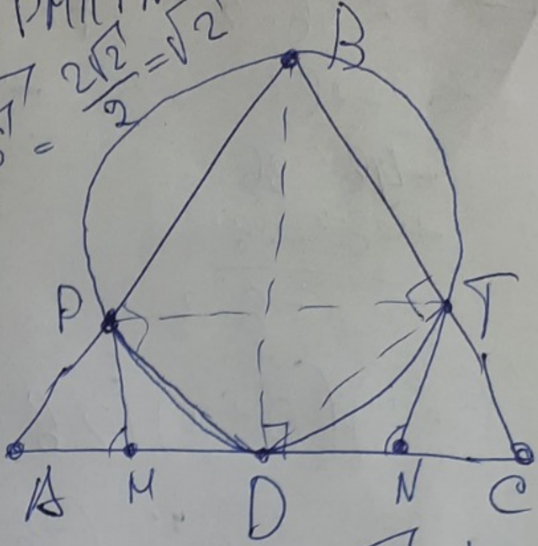
$\frac{2}{3}=\frac{DT}{DT+AP}$ $2DT+2AP=3DT$ $2AP=\frac{DT}{2}$

$2PD+2TC=3PD$ $TC=\frac{PD}{2}$

211006501 (U188621 M1274284)

Черновик





PM||TN

$\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$\frac{3-2\sqrt{6}\times 2}{2}=$

$=\frac{5-2\sqrt{6}}{2}$

$3-\sqrt{\frac{5+2\sqrt{6}}{2}}+\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}=$

$3-\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

$\frac{3-2\sqrt{6}}{2}$ 4

$-2\sqrt{6}<5$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{4-x}+3=\underbrace{2\sqrt{-(x^2-3x-4)}}_{}$ 2a

$a+2{,}5=\sqrt{2a}$

$\sqrt{x+1}=a$ $a^2=x+1$ $\sqrt{-(x-4)(x+1)}=\sqrt{(4-x)(x+1)}$

$\sqrt{4-x}=b$ $b^2=4-x$ $3-2\sqrt{6}-2$ $x+1\geq 0$

$-2\sqrt{6}-5$ $4-x\geq 0$

$\begin{cases} a-b+3=2ab \\ a^2+b^2=5 \end{cases}$ $a(1-2b)=b-3$ $x\in[-1;4]$

$2b^4-9b^2$ $(a+b)^2=a-b+8$ -1

$\frac{b^2-6b+9}{1-4b+4b^2}+b^2=5$ $-2b-2b^3+9b+2=\frac{3+2\sqrt{6}}{2}$

$=7b+2-9b^2+2b^4-2b^3$ $3-2\sqrt{6}-2$

$-2\sqrt{6}-5$

$\frac{b^2-6b+9+b^2-4b^3+4b^4-5+20b-20b^2}{1-4b+4b^2}=0$

$1-4b+4b^2\to\neq 0$

$2\sqrt{6}<5$

$-2\sqrt{6}>-5$

$4b^4-4b^3-18b^2+14b+4=0$

$2b^4-2b^3-9b^2+7b+2=0$

$b=1$

$-16-2+18$

$2b^4-2b^3-9b^2+7b+2=0$ | $b-1$

$2b^4-2b^3$ → $2b^3-9b-2$

$0-9b^2$

$-9b^2+9b$

$-2b+2$

$(b-1)(2b^3-9b-2)=0$

Черновик

$$\begin{array}{l|l} 2b^3-9b-2 & b+2 \\ \hline 2b^3+4b^2 & 2b^2-4b-1 \\ -4b^2-9b & \\ -4b^2-8b & \\ -b-2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 2b^3-9b-2 & b+2 \\ \hline 2b^3+4b^2 & 2b^2-4b-1 \\ -4b^2-9b & \\ -4b^2-8b & \\ -b-2 & \end{array}$$

$(b^2+b-2)(2b^2-4b-1)$

$2b^4-4b^3-b^2+$

$+2b^3-4b^2-b-$

$-4b^2+8b+2$

$2b^4-2b^3-9b^2+$

$+7b+2$

$D=16+8=24$

$(b-1)(b+2)(2b^2-4b-1)=0$

$b=\frac{4\pm2\sqrt{6}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$

$(b-1)(b+2)\left(b-\frac{2-\sqrt{6}}{2}\right)\left(b-\frac{2+\sqrt{6}}{2}\right)=0$

$b=\left[\begin{array}{l}1\\ \cancel{-2}\\ \frac{2\pm\sqrt{6}}{2}\end{array}\right.=\sqrt{4-x} \Rightarrow 1)\ 4-x=1 \Rightarrow x=3$

$2<\sqrt{6} \Rightarrow \frac{2+\sqrt{6}}{2}=\sqrt{4-x}$

$=\frac{5+2\sqrt{6}}{2}=4-x$

$\frac{10+4\sqrt{6}}{4}$

$\frac{4+4\sqrt{6}+6}{4}=4-x$

$x=\frac{3-2\sqrt{6}}{2}$

$a=\frac{b-3}{1-2b}=\frac{\frac{2+\sqrt{6}-6}{2}}{1-2-\sqrt{6}}=\frac{\frac{\sqrt{6}-4}{2}}{-1-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}-4}{-2-2\sqrt{6}}=\sqrt{x+1}$

$\frac{6-8\sqrt{6}+16}{4+24+4\sqrt{6}}=\frac{24-8\sqrt{6}}{28+4\sqrt{6}}=x+1$

$=\frac{-4-12\sqrt{6}}{28+4\sqrt{6}}$

$a+2=2a$

$a=2$

$\frac{2a-2-\sqrt{6}+6}{2}=2a(2+\sqrt{6})$

$2a+4-\sqrt{6}=4a+2\sqrt{6}a$

$2a=4-3\sqrt{6}$

$25-4\cdot6$

$\frac{5-2\sqrt{6}}{2}$

$a^2=\frac{25-\sqrt{6}}{4}$

$a=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}$

$\begin{cases} x=\frac{3-2\sqrt{6}}{2} \\ x=\frac{16-10-4\sqrt{6}}{4}=\frac{6-4\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

$5-a^2=\frac{10+4\sqrt{6}}{4}$

$10-4\sqrt{6}=4a^2$

$20-10-4\sqrt{6}=4a^2$

211006501 (U188621 M1274284)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006501**

ID профиля: **188621**

Вариант 12

Чистовик.

№4. $\begin{cases} \frac{1}{(x^2+y^2)} + (xy)^2 = \frac{5}{4} \\ 2x^4+2y^4+5(xy)^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$

$2x^4+2y^4+5(xy)^2 = 2(x^2+y^2)^2+(xy)^2$

$\Rightarrow$ второе ур-ие: $2(x^2+y^2)^2+(xy)^2=\frac{9}{4}$

Пусть $(x^2+y^2)=a$; $(xy)=b$

$\begin{cases} \frac{1}{a}+b^2=\frac{5}{4} \\ 2a^2+b^2=\frac{9}{4} \end{cases} \Big| -$

$\Rightarrow 2a^2-\frac{1}{a}=1$

$\frac{2a^3-a-1}{a}=0$, $a\neq0$ изначально

$2a^3-a-1=0. \rightarrow a=1$ корень

$(a-1)(2a^2+2a+1)=0$

$\downarrow$

$D=4-8<0 \Rightarrow \cancel{2a^2+2a+1=0}$ $a\in\varnothing$

$\boxed{1}$

$\Rightarrow a=1 \Rightarrow b^2=\frac{1}{4}$

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ xy=\pm\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow 2xy=\pm1$

x и $y\neq0$, т.к. если $x=0 \Rightarrow$ $\begin{cases} \frac{1}{y^2}=\frac{5}{4} \Leftrightarrow y^2=\frac{4}{5} \\ 2y^4=\frac{9}{4} \Leftrightarrow y^4=\frac{9}{8} \end{cases}$

и $\left(\frac{4}{5}\right)^2\neq\frac{9}{8}$

Чистовик

№4. (продолжен.)

$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{2y} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4y^2}$

Подставим в 1: $\frac{1}{4y^2} + y^2 = 1$

$\Rightarrow \frac{4y^4 - 4y^2 + 1}{4y^2} = 0$

$4y^2 \to \cancel{x} \neq 0$

$\Rightarrow 4y^4 - 4y^2 + 1 = 0$

$(2y^2 - 1)^2 = 0$

$\Rightarrow 2y^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

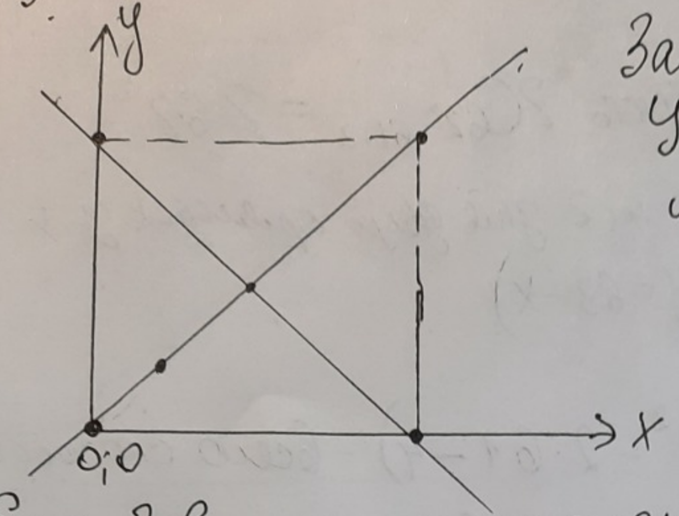
$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\boxed{2}$

№5. Чистовик



Заметим, что прямая $y=x$ проходит через $(0;0)$ и $(63;63)$; $y=63-x$ проходит через $(0;63)$ и $(63;0)$

Есть 2 вар-та расположения ~~точек~~ узлов.

1) Оба узла лежат на одной прямой $y=x$ или $y=63-x$ (условие про прямые || осям выполняется)

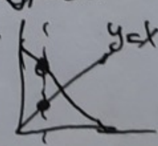
На прямой $y=x$ можно выбрать C_{62}^2 способами 2 узла (в т.$(63;63)$ нельзя расп-ть узел и в т.$(0;0)$)

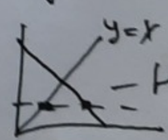
$\Rightarrow$ в этом случае $2C_{62}^2$ способов $=2\cdot61\cdot62$ (для $y=x$ и $y=63-x$ суммарно)

2) Только один узел лежит на прямой $y=x$ или $y=63-x$

Предположим, что один узел лежит на прямой $y=x$

Таких вар-тов располож. узла $C_{62}^1=62$.

Второй узел по усл. не лежит на прямой $y=63-x$ с абсциссой или ординатой, равной абсциссе или ординате соответств. первого узла (



= нельзя)

Всего внутри квадрата 62^2 узлов сетки

Второй узел можно выбрать $C^1_{62^2-61-2}=62^2-61-2$ способами

61 — узлы на $y=x$; 2 — 2 вар-та, противореч. усл.

$\boxed{3}$

Чистовик

№5. (продолжен.)

$\Rightarrow$ для 2) для 2 прямых можно выбрать $2C^1_{62^2-61-2} = 2\cdot 62^2 -$

$- 2\cdot 61 - 4$ (умножаем на 2 для двух прямых $y=x$ и $y=63-x$)

$\Rightarrow$ 2) ~~2 2мал~~ $62\cdot(2\cdot 62^2 - 2\cdot 61 - 4)$ - всего способов для 2) вар-та по правилу произв-ия

$\Rightarrow$ всего способов $2\cdot 61\cdot 62 + 62\cdot(2\cdot 62^2 - 2\cdot 61 - 4) =$

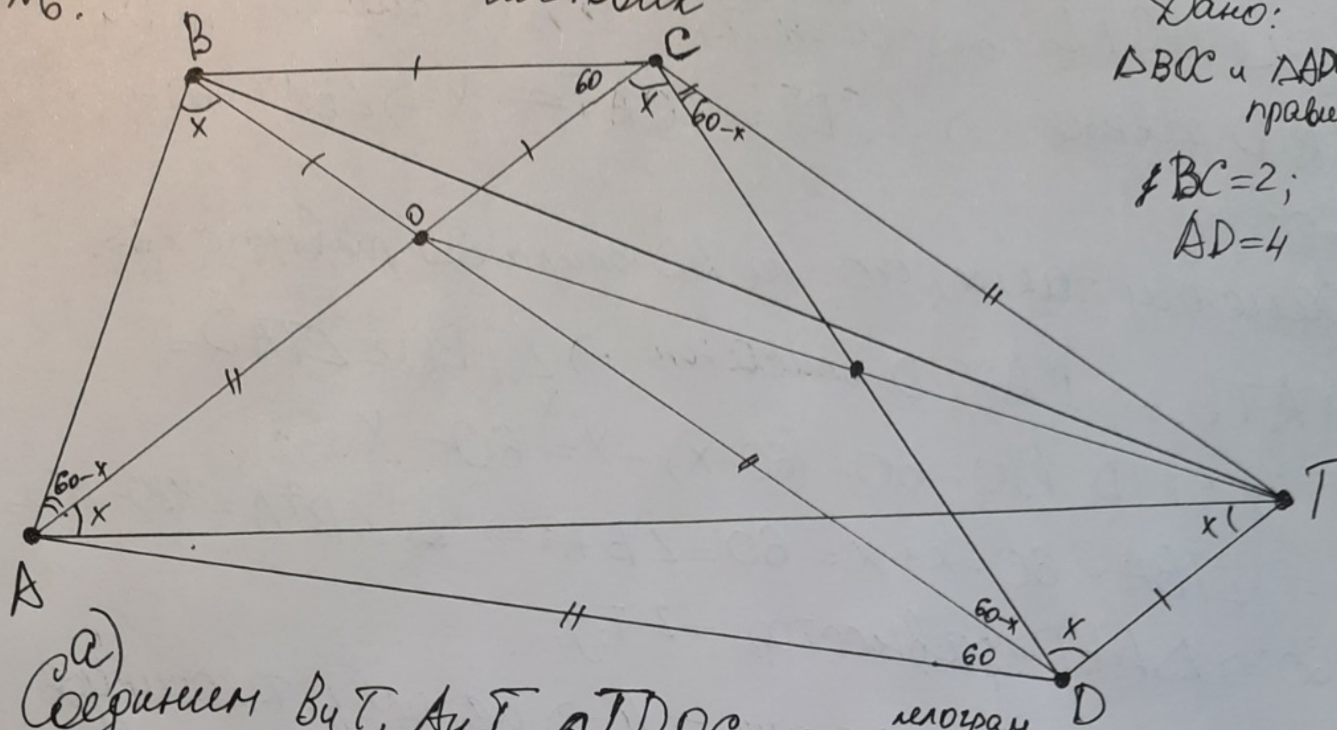
$= 2\cdot 62\cdot(\cancel{61} + 62^2 - \cancel{61} - 2) = 2\cdot 62(62^2 - 2) = 476408$ способов

Ответ: 476408 сп-в.

4

№6. Чистовик

Дано:
$\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ правильн.
$BC=2$;
$AD=4$



а)

Соединим B и T, A и T. $\triangle TDOC$ — парал-лелогран, т.к. диагонали делятся т. пересеч. пополам. (расст-ие от середины DC до O и T равны)

$\Rightarrow OC \parallel DT$ и $OC = DT$; $OD \parallel CT$ и $OD = CT$ — св-ва паралел-ма

Т.к. $\angle BOC = \angle AOD = 60°$ как вертик $\Rightarrow \angle AOB = \angle COD = 120°$.

$\angle OCT = 180 - \angle COD = 60°$, т.к. $OD \parallel CT$

$\triangle AOB = \triangle COD$ по 2 сторонам и углу между ними

Пусть $\angle OBA = x \Rightarrow \angle OCD = x$ $^{=CDT}$ по св-ву рав-ва AOB и COD

$\Rightarrow$ из равенства AOB и COD: $AB = CD$.

Также $\triangle ABD = \triangle ACD$ по III пр. (по 3 сторон.) ($BD = AC$)

Заметим, что на AD опираются равные $\angle ABD$ и $\angle ACD \Rightarrow ABCD$ — вписанн. $\square$

Т.к. $\angle BOA = 120°$ и $\angle ABO = x \Rightarrow \angle BAO = 180 - 120 - x = 60 - x = \angle CDO$

из рав-ва AOB и COD.

$\boxed{5}$

Заметим, что $\triangle ADT = \triangle$ ~~COD~~ ~~DCO~~ DOC по 2 стор. и углу между ними.

($\angle COD = 120°$, $\angle ADT = 60 + 60 - x + x = 120°$) $\Rightarrow$ из этого рав-ва

$\angle ATD = \angle OCD = x$

Чистовик

$\Rightarrow \square ACTD$ вписанн. т.к. на AD опир-ся $\angle ACD$ и $\angle ATD$ равные. $\Rightarrow \angle CDT = \angle CAT = x \Rightarrow \angle BAT = 60 - x + x = 60°$.

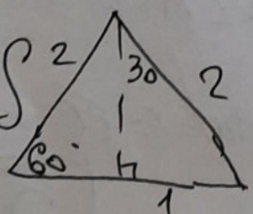
Заметим также, что на AD опираются равные $\angle ABD$ и $\angle ATD$. $\Rightarrow \square ABTD$ вписанн. $\Rightarrow \angle TBO = \angle TAD =$ из $\triangle ATD$ $180 - 60 - (60 - x) - x = 60 - x$.

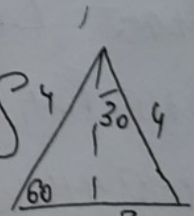
$\Rightarrow \angle TBA = 60 - x + x = 60° = \angle BAT \Rightarrow \angle BTA = 180 - 60\cdot 2 = 60° \Rightarrow \triangle ABT$ — равностор. — ч.т.д.

б) т.к. $AD = CT$ по доказанн. $= 4 \Rightarrow$ использ. т. косинусов для $\triangle BCT$, также $\angle BCT = 120°$: $BT^2 = 2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cos 120° = 28 \Rightarrow BT = 2\sqrt{7} = AT = AB$, т.к. $\triangle ABT$ равност.

$\Rightarrow S_{ABT} = \frac{1}{2}\sin\underset{60°}{\angle ATB}\cdot BT\cdot AT = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7} = 7\sqrt{3}$

$S_{ABCD} = S_{ABO} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} = 2S_{ABO} + S_{BOC} + S_{AOD}$, т.к. $\triangle ABO = \triangle COD$. $S_{ABO} = \frac{1}{2}\sin\underset{120°}{\angle AOB}\cdot BO\cdot AO = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 8 = 2\sqrt{3}$.

$S_{BOC} = S$ 

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $S_{AOD} = S$ 

$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{12}\cdot 4 = 4\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = 4\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 4\sqrt{3} = \frac{17}{2}\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{7\sqrt{3}}{\frac{17}{2}\sqrt{3}} = \boxed{\frac{14}{17}}$ Ответ: $\frac{14}{17}$. $\boxed{6}$

Черновик

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} + (xy)^2 = \frac{5}{4} \\ 2(x^2+y^2)^2 + (xy)^2 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$x=0$

$$\begin{cases} \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4} \\ y^4 = \frac{9}{8} \end{cases}$$

$y^2 = \frac{4}{5}$

$8x^4 - 5x^2 + 2 = 0$

$(4x^4+2)(2x^4+1)$

$(x^2+y^2) = a$; $(xy)^{\cancel{2}} = b$

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + b^{2} = \frac{5}{4} \\ 2a^2 + b^2 = \frac{9}{4} \end{cases} \Bigg| -$$

$1 = 2a^2 - \frac{1}{a}$

$\frac{2a^3 - a - 1 = 0}{a}$

$a \neq 0 \Rightarrow 2a^3 - a - 1 = 0$

$(a-1)(2a^2+2a+1) = 0$

$2a^3 - a - 1 \,|\, a-1$

$2a^3 - 2a^2 \quad 2a^2+2a+1$

$2a^2 - a$

$2a^2 - 2a$

$a - 1$

$a = 1$, т.к. $D = 4 - 8 = -4$ $\boxed{> 0}$

$a = 1 \Rightarrow b = \pm\frac{1}{2}$

$2 + \frac{1}{4} = \cancel{\frac{33}{16}}\ \frac{9}{4}$

$2x^4 = \frac{1}{2}$

$1 + \frac{5}{4}$

$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ xy = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

$2xy = \pm 1$

1) $xy = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2y} \Rightarrow \frac{1}{2y^2} + y^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{2} = y^2$

$(x+y)^2 = \left[\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}\right.$

$\frac{2y^4 - 2y^2 + 1}{2y^2} = 0$

$2t^2 - 2t + 1 = 0$

$y \neq 0 \Rightarrow$

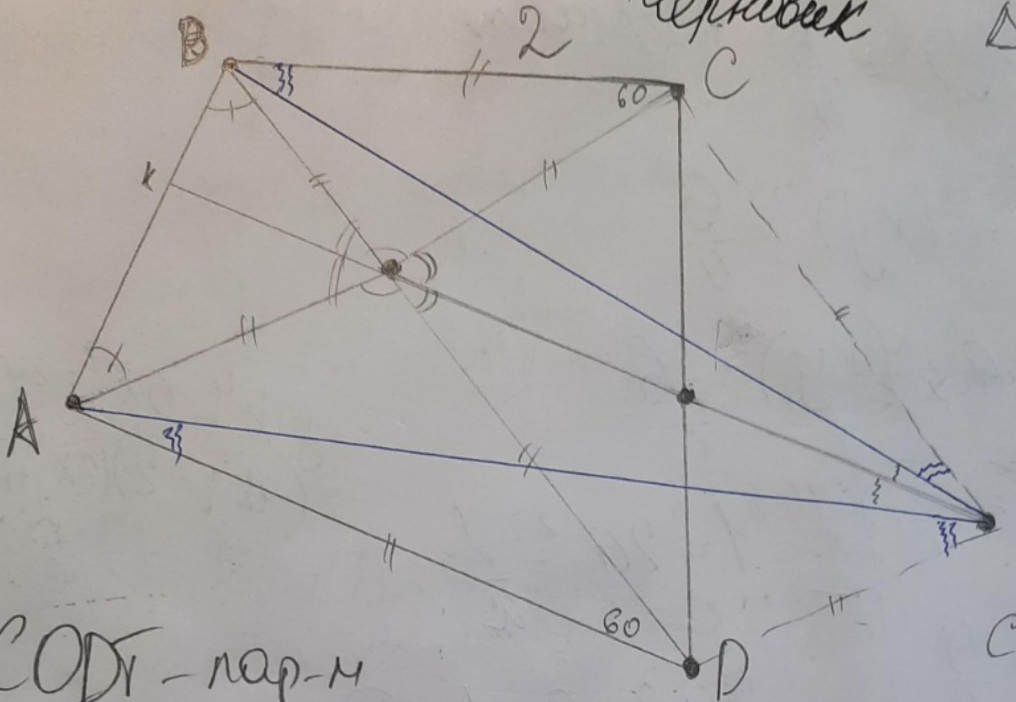
$D = 4 - 8 = \cancel{0}\ 0 \Rightarrow \varnothing$

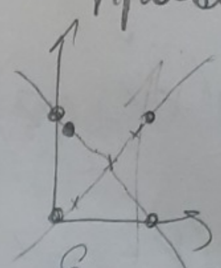
$xy = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{-2y} \Rightarrow -\frac{1}{2y^2}$

$x = \pm\frac{1}{2y}$ $\quad \frac{1}{4y^2}$

Черновик

$\triangle COB$ и $\triangle AOD$ правил





Если оба лежа

$2C_{62}^2 = \frac{2\cdot 61\cdot 62}{2} = 61\cdot 62$

$C_{62}^1 \cdot C_{59}^1 = 62\cdot 59$

$= 62(61+59) = 120\cdot 62 =$

$62 \times 12 = 124$, 62

$\boxed{7440}$

CODГ – пар-м

$\triangle BOC = \triangle AOD$, т.к. $\angle AOD = \angle BOC$

=> CODГ – ромб

$\triangle BOГ = \triangle AOГ$ по углу и 2 ст-м

=> AГ = BГ => OГ – бисс-са в $\triangle ABГ$

т.к. CODГ – ромб => $\angle CГO = \angle OГD$ => $\angle AГD = \angle CГB$

$= \angle ГAD = \angle CBГ$ ($\triangle BCГ$ и ADГ равноб.)

$\angle COГ = \angle KOA$ как вертик.

Аналог. $\angle BOK = DOГ$

$(x+y)^2 = \left[\begin{array}{l} 2 \\ 0 \end{array}\right.$

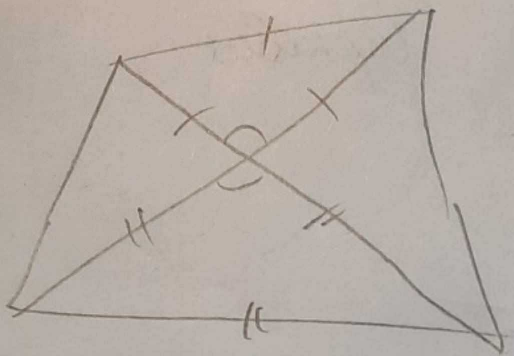
$\Rightarrow 4\alpha = 360 - 60\cdot 2 = 240 \Rightarrow \alpha = 60 = \angle ГOD$

=> $\triangle DOГ$ равност.

=> OГ = AD => AOГD ромб => $\angle OГA = \angle ГAD$ => их сумм 60.

=> $\angle BГA = 60°$ . . .

Черновик



$S_{ABT} = \frac{1}{2}\sin 60^\circ \cdot BT^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4 \cdot 7 = 7\sqrt{3}$

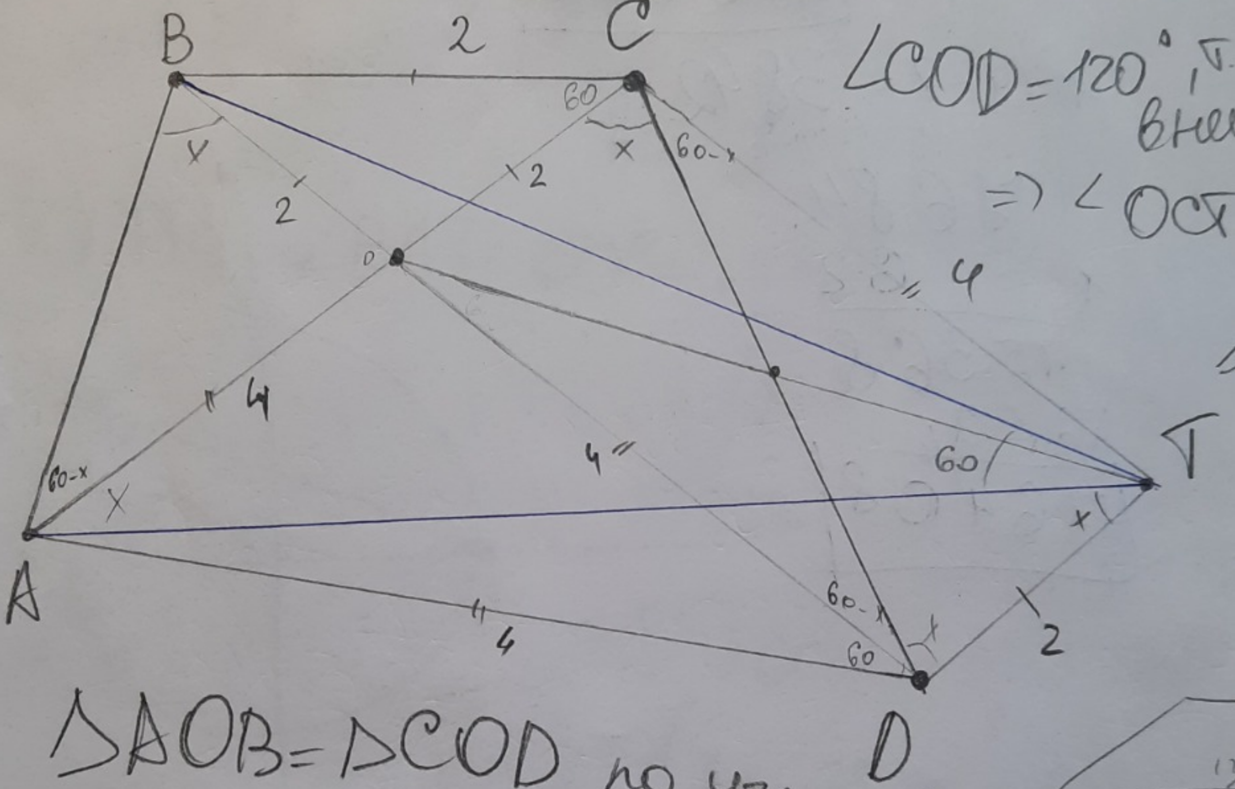
$20 + \frac{16}{2}$

CODT – парал-м

$\angle COD = 120^\circ$, т.к. внешн. у

$\Rightarrow \angle OCT = 60^\circ$

4



$\Delta AOB = \Delta COD$ по угл. и 2 ст-м

$\Rightarrow AB = CD$

$\Rightarrow \Delta ABD = \Delta ACD$ по III пр.

$\Rightarrow$ ~~∠ABD = 60~~ $\angle ABD = \angle ACD$

ABCD - вписанн.

$\sqrt{16-4} = \sqrt{12}$

$\angle BAO = 60 - x$

$\Delta ADT = \Delta COD$ по 2 ст-м и углу

$\Rightarrow \angle ATD = \angle OCD = x \Rightarrow$ ACTD вписан ($\angle ADT = 120^\circ$)

Черновик

$\Rightarrow \angle CDГ = \angle CAГ \Rightarrow \angle BAГ = 60°$

$\Rightarrow ABГD$ вписан, т.к. AD опир. се на ABD и $AГD$

$\Rightarrow \angle ГBO = \underbrace{\angle ГAD = \angle DCГ}_{\text{впис. } ACГD} = 60 - x$

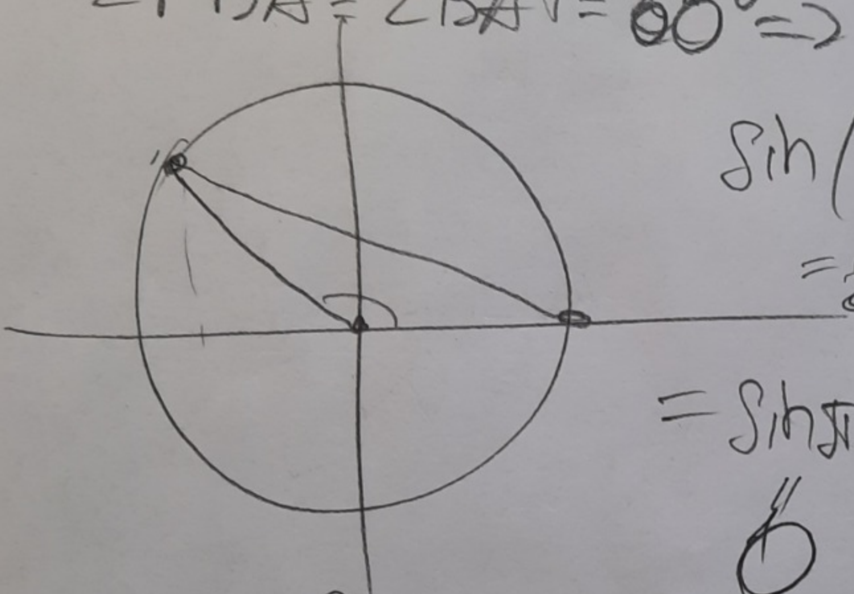
$\Rightarrow \angle ГBA = \angle BAГ = 60° \Rightarrow \triangle Г$

$\sin 90 = 1$

$\sin 0 = 0$

$\cos(0) = 1$

$\cos 90 = 0$



$\sin(\pi - x) =$

$\sin(\alpha - \beta) =$

$= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$= \underbrace{\sin\pi}_{0}\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = \sin\alpha$

$\cos 180 = \cos 2 \cdot 90 = -1$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos^2 90 - \sin^2 90$

$0 \qquad 1$

$\sin 180 = 2\sin 90 \cos 90$

0

Черновик

$$\begin{array}{r} 62 \\ \times 62 \\ \hline 124 \\ 372 \\ \hline 3844 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3844 \\ \times 62 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7688 \\ \times 62 \\ \hline 15376 \\ 46128 \\ \hline \boxed{\cancel{476656}} \end{array}$$

$3844 - 2 = 3842$

$$\begin{array}{r} 7684 \\ \times 62 \\ \hline 15368 \\ 46104 \\ \hline \boxed{476408} \end{array}$$