Часть 1

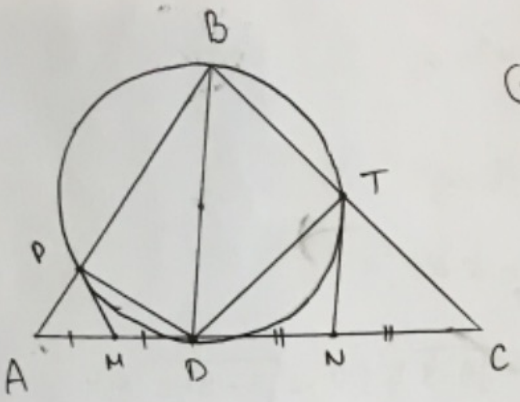
Олимпиада: **Математика, 10 класс (1 часть)**

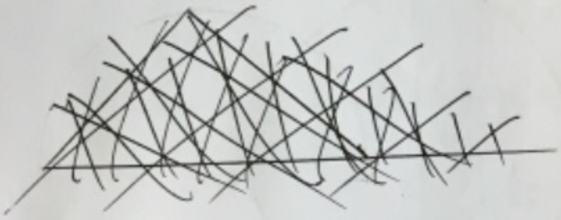
Шифр: **211006493**

ID профиля: **872851**

Вариант 12

1





(а) ▷ 1) BD – диам. $\Rightarrow \angle BPD = \angle BTD = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle APD = \angle CTD = 90^\circ$

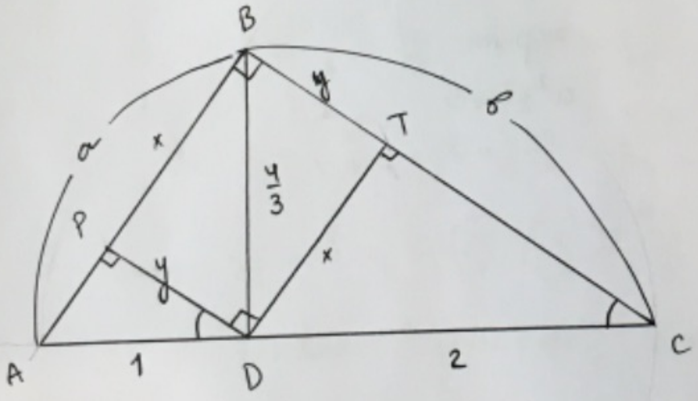
2) в прямоуг. $\triangle APD$ M – сер. AD, $\angle P = 90^\circ$
$\Rightarrow PM =$ медиана $= AM = MD$;
аналогично $TN = DN = NC$

3) $PM = MD \Rightarrow \angle P = \angle D = 90^\circ - \frac{\angle M}{2}$ (в р/б $\triangle PMD$);
аналогично $TN = ND \Rightarrow \angle T = \angle D = 90^\circ - \frac{\angle N}{2}$

$\Rightarrow PM \parallel TN$, MN – секущая $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle PMD + \angle DNT = 180^\circ$ (внутр. одностор.);

4) $\angle PDT = \angle MDN - \angle PDM - \angle TDN =$
$= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\angle PMD}{2} + 90^\circ - \frac{\angle TND}{2}\right) =$
$= \frac{\angle PMD + \angle TND}{2} = 90^\circ$

5) в выпукл. четырёхуг. BTDP
$\angle T = \angle P = \angle D = 90^\circ \Rightarrow \angle B =$
$= 360^\circ - 3 \cdot 90^\circ = \underline{90^\circ}$ ◀



(б) 1) $PM = AM = MD = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = AM + MD = 1$;
аналогично $DC = 2$.

2) $BC \perp AB$, $PD \perp AB \Rightarrow BC \parallel PD \Rightarrow$
$\Rightarrow$ при сек. AC $\angle PDA = \angle BCA$.

3) ~~по т. Пиф.~~ $\angle B, \angle T, \angle D, \angle P = 90^\circ \Rightarrow$ BTDP – прямоуг. $\Rightarrow BT = PD$; $BP = TD$.

4) назовём $BT = PD = y$; $PB = DT = x$; $BC = b$; $AB = a$.

5) по т. Пиф. $a^2 + b^2 = 9$; ($\triangle ABC$)
$(a-x)^2 + y^2 = 1$; ($\triangle APD$)
$(b-y)^2 + x^2 = 4$; ($\triangle DTC$)
$x^2 + y^2 = \frac{16}{3}$; ($\triangle BPD$)

6) $\operatorname{tg} \angle C = \frac{x}{b-y} = \frac{a}{b} = \frac{a-x}{y}$
($\triangle DTC$) ($\triangle ABC$) ($\triangle APD$)

См. стр. 3 →

211006493 (U872851 M1276706)

Чистовик

3. 1) $2a^2 - 2ax - 6ay + x^2 + 2xy + 5y^2 = x^2 + 2x(y-a) + y^2 - 2ay + a^2 +$

$+ 4y^2 - 4ay + a^2 = (x+y-a)^2 + (2y-a)^2.$

$(x+y-a)^2 + (2y-a)^2 = 0;$

$(x+y-a)^2, (2y-a)^2 \geq 0$, т.к. в квадрате $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y-a=0 \\ 2y-a=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = \frac{a}{2} \\ x + \frac{a}{2} - a = 0 \end{cases}$

$x = y = \frac{a}{2}$. $A\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$.

2) $ax^2 + 4a^2x - ay + 4a^3 + 2 = 0$

($a=0$ не явл. реш. $\Rightarrow$)

$x^2 + 4ax - y + 4a^2 + \frac{2}{a} = 0$

$y = x^2 + 4ax + 4a^2 + \frac{2}{a}$

$y = (x+2a)^2 + \frac{2}{a}$

$B\left(-2a; \frac{2}{a}\right)$.

3) $A\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $B\left(-2a; \frac{2}{a}\right)$.

$y = 3-x$. (То же, что $x+y=3$)

Точка выше $y=3-x \Leftrightarrow y > 3-x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3-x-y<0 \Leftrightarrow x+y-3>0;$

Точка ниже $y=3-x \Leftrightarrow y<3-x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3-x-y>0 \Leftrightarrow x+y-3<0.$

Точки A, B по одну сторону от $y=3-x \Leftrightarrow$ знак $\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-3$ = знаку $-2a+\frac{2}{a}-3 \Leftrightarrow$

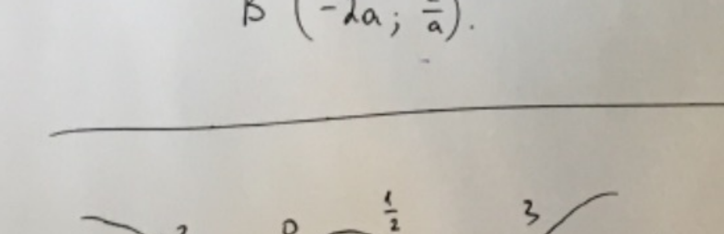
$\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}-3\right)\left(-2a+\frac{2}{a}-3\right)>0$

$\Leftrightarrow (a-3)\cdot\frac{-2a^2+2-3a}{a}>0$

$\Leftrightarrow \frac{a-3}{a}\cdot(2a^2+3a-2)<0$

$\Leftrightarrow 2\frac{a-3}{a}\left(a+\frac{4}{2}\right)\left(a-\frac{1}{2}\right)<0$

$\Leftrightarrow \frac{(a-3)(a+2)(a-\frac{1}{2})}{a}<0$



$a \in (-2;0) \cup \left(\frac{1}{2}; 3\right)$

Ответ: $a \in (-2;0) \cup \left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

211006493 (U872851 M1276706)

Чистовик

7) из п.6 $b \cdot y = \frac{bx}{a}$; $a - x = \frac{ay}{b}$; $\Rightarrow$ по п. 5

$$\begin{cases} \left(\frac{ay}{b}\right)^2 + y^2 = 1 & | \cdot b^2 \\ \left(\frac{bx}{a}\right)^2 + x^2 = 4 & | \cdot a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2y^2 + b^2y^2 = b^2 \\ b^2x^2 + a^2x^2 = 4a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a^2+b^2)y^2 = b^2 \\ (a^2+b^2)x^2 = 4a^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow (a^2+b^2)(x^2+y^2) = 4a^2+b^2$

по п.6 $a^2+b^2 = 9$; $x^2+y^2 = \frac{16}{9}$ $\Rightarrow$ $4a^2+b = 16$; $a^2+b^2 = 9$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = \frac{16-9}{3} = \frac{7}{3}$; $b^2 = 9 - \frac{7}{3} = \frac{20}{3}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{7}{3}}$; $b = \sqrt{\frac{20}{3}} = 2\sqrt{\frac{5}{3}}$

8) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot 2\sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{35}{9}} = \frac{\sqrt{35}}{3}$ ~~Ответ: S = 35/9~~

Ответ: $\angle ABC = 90°$; $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{35}}{3}$.

211006493 (U872851 M1276706)

Чистовик

2. $\sqrt{x+1} - \cancel{\ } \sqrt{4-x} + 3 = 2\sqrt{4+3x-x^2}$

1) пусть $\sqrt{x+1} = a$; $\sqrt{4-x} = b$. Тогда $a, b \geq 0$;

$a^2 + b^2 = x+1+4-x = 5$; $a - b + 3 = 2ab$.

2) $x=3$ - корень $(a=2;\ b=1)$. $\sqrt{3+1} - \sqrt{4-3} + 3 = 2\sqrt{4+9-9} = 4$.

3) $a - b + 3 = 2ab$

$a + 3 = b(2a+1)$

$\frac{a+3}{2a+1} = b$

$\frac{2a+6}{2a+1} = 2b$

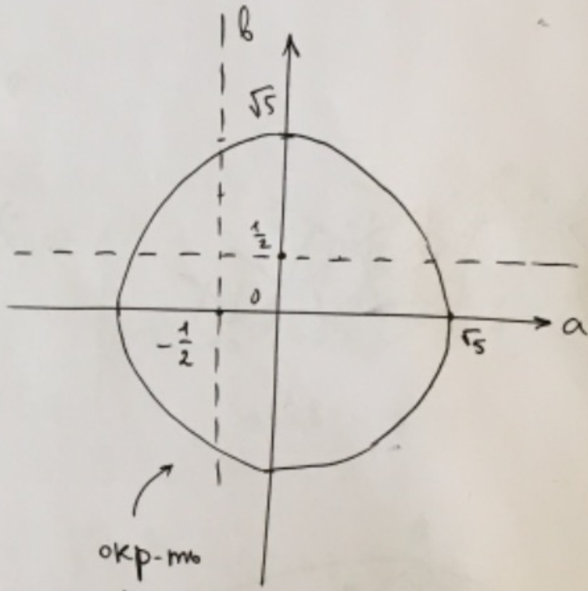
$1 + \frac{5}{2a+1} = 2b$

$5 = (2b-1)(2a+1)$

$\frac{1}{2} + \frac{1{,}25}{a+0{,}5} = b$

— гипербола

4)



окр-ть $a^2+b^2=5$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 10 класс (2 часть)**

Шифр: **211006493**

ID профиля: **872851**

Вариант 12

Чистовик

4. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2+y^2} + x^2y^2 = \dfrac{5}{4} \\ 2x^4 + 2y^4 + 5x^2y^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$

1) Пусть $a = x^2+y^2$; $b = x^2y^2$. $[a \geq 0,\ b \geq 0]$.

Тогда $x^4+y^4+2x^2y^2 = (x^2+y^2)^2 \Rightarrow 2x^4+2y^4+5x^2y^2 = 2(x^2+y^2)^2 + x^2y^2 = 2a^2+b$;

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} + b = \dfrac{5}{4}; \\ 2a^2+b = \dfrac{9}{4}. \end{cases}$$

2) $b = \frac{5}{4} - \frac{1}{a} = \frac{9}{4} - 2a^2 \Rightarrow 2a^2 = 1 + \frac{1}{a}$

a^2 возраст. на $a>0 \Rightarrow 2a^2 \uparrow$

$\frac{1}{a}$ убыв. на $a>0 \Rightarrow 1+\frac{1}{a} \downarrow$ $\Big| \Rightarrow$ $2a^2 = 1+\frac{1}{a}$ имеет ≤ 1 корень.

Очевидно, $a=1$ – корень $\Rightarrow$ $a=1$ – единств. реш. $2a^2 = 1+\frac{1}{a}$

3) $\begin{array}{l} \frac{1}{a} + b = \frac{5}{4} \\ 1 = a \end{array} \Big| \Rightarrow b = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$

4) $\begin{array}{l} x^2y^2 = \frac{1}{4} \\ x^2+y^2 = 1 \end{array} \Big| \Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{4x^2} = 1 \quad \Big| \cdot 4x^2$

$4x^4 + 1 - 4x^2 = 0$

$(2x^2-1)^2 = 0$

$2x^2 - 1 = 0$

$x^2 = \frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

5) $\begin{array}{l} x^2+y^2 = 1 \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{array} \Big| \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2}$

$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Ответ: $x, y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(т.е. реш.: 4 пары: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$).

5. 1) переформулируем условия: сетка ↦ таблица.

узлы ↦ клетки; $y=x$ и $y=63-x$ ↦ диагонали;

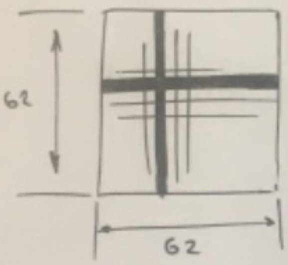
прямая, $\parallel$ одной из коорд. осей ↦ ряд (столбец/строка).

В этой таблице будет 62 строки и 62 столбца.

2) Клеток, лежащих на диагоналях, $2\cdot 62 = 124$

(т.к. кол-во рядов чётное, диагонали не пересекаются).

3) Для каждой из них существует $62^2 - 62\cdot 2 + 1 = 62\cdot 61 + 1 = 3783$ способа выбрать второй узел, не лежащий на том же ряду.

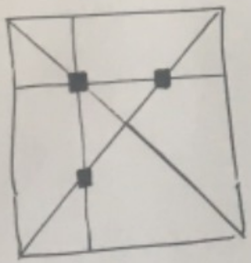


4) Итого (из п.2-3) $\cancel{2\cdot 62\cdot((62-1)(62)+1)}$ пар

$2n(n(n-1)+1)$, где $n=62$ - ширина таблицы.

В этом подсчёте два раза учтены пары, у которых обе клетки лежат на диагоналях.

Учтём их количество: $\frac{2\cdot 62\cdot(2\cdot 62-3)}{2} = 62(2\cdot 62-3)$.



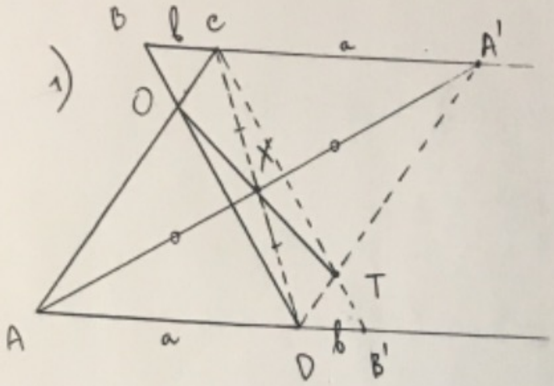
Итого (совсем итого) $2n(n(n-1)+1) - n(2n-3) =$

$= 2n^2(n-1) + 2n - 2n^2 + 3n = 2n^2(n-2) + 5n =$

$= n(2n(n-2)+5) = 62(2\cdot 62(62-2)+5) = \underline{461590}$

Чистовик

6. 1)



отразим A и B отн. X (= сер CD).

$CX = XD$ (опр.)
$AX = XA'$ (симм.) $\Rightarrow ACA'D$ - пар-м $\Rightarrow$
$\Rightarrow A'C \parallel AD$; $AD = A'C$.

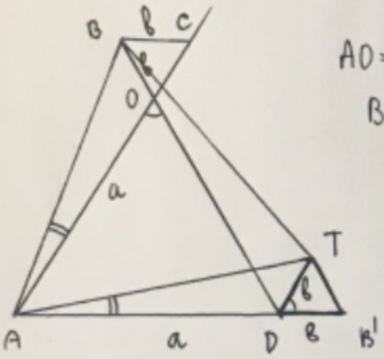
$A'C \parallel AD$
$C \in A'C \cap BC$ $\Rightarrow (BC) = (CA') \Leftrightarrow A' \in (BC)$.
$AD \parallel BC$

т.к. $\angle BCA = \angle CAD = 60°$ - накр. леж.
(углы в равностор., т.е. прав, $\triangle$ равны $60°$)

Аналогично $B' \in (AD)$,
$DB' = BC$.

По симметрии $T = A'D \cap CB'$;
$\triangle DTB'$ - прав. со стор. b
(т.е. $DT = b$ и $\angle TDB' = 60°$)

2)



$AO = a = AD$ ($\triangle AOD$ - прав)
$BO = b = DT$ (п. 1)
$\angle BOA = 120°$ (т.к. $\angle AOD = 60°$)
$\angle ADT = 120°$ (т.к. $\angle TDB' = 60°$) $\Rightarrow \angle BOA = \angle ADT$

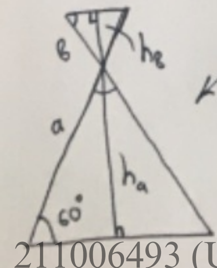
по 2 ст. и $\angle$ между ними $\triangle AOB = \triangle ADT \Rightarrow$ равны соот. углы и стороны.
пусть $\angle A = \alpha$; $AT = AB = c$.

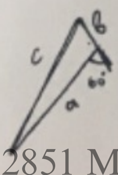
~~Рассмотрим поворот на α + гомотетию с коэф. $\frac{c}{a}$~~

$\angle BAD = 60°$, т.к. $\triangle OAD$ - прав.; $\angle BAT = \angle BAD - \angle DAT = \angle OAD + \angle BAO - \angle DAT =$
$= 60° + \alpha - \alpha = 60°$;

в $\triangle BAT$ $BA = AT \Rightarrow$ он р/б;
$\angle BAT = 60°$ $\Rightarrow \triangle BAT$ - правильный.

3) $a = 4$; $b = 2$. $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot (h_b + h_a)$ (по ф. трапеции, т.к. $BC \parallel AD$);
$h_a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a$; $h_b = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot b \Rightarrow S_{ABCD} = (a+b) \cdot \frac{1}{2} \cdot (a+b) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}(a+b)^2}{4} = 9\sqrt{3}$





$S_{BAT} = \frac{\sqrt{3}}{4} c^2$ (по ф. для правильного $\triangle$), причем из $\triangle ABO$ по т. косинусов $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120° = a^2 + b^2 + \sqrt{3}ab = 20 + 8\sqrt{3}$

страница 4 ⟼

Чистовик

$$S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{4}(a+b)^2 = 9\sqrt{3};$$

$$S_{ABT} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2+b^2+\sqrt{3}ab\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(20+8\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}\left(5+2\sqrt{3}\right).$$

$$\frac{S_{ABT}}{S_{ABCD}} = \frac{a^2+b^2+\sqrt{3}ab}{(a+b)^2} = \frac{20+8\sqrt{3}}{36} = \frac{5+2\sqrt{3}}{9}$$

Ответ: $\frac{5+2\sqrt{3}}{9}$.